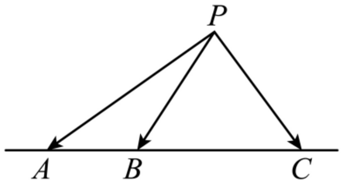
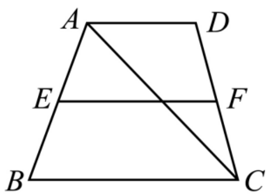
7.相似，锐角三角比，平面向量

一．平面向量

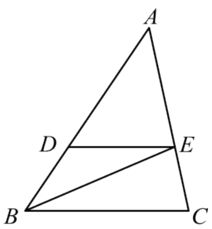
1.（2024·上海奉贤二模 15） 如图，已知点 A 、B 、C 在直线 l 上，点 P 在直线 l 外，$BC=2AB$，$\overrightarrow{PA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{PB}=\vec{b}$，那么 $\overrightarrow{PC}=$______.（用向量 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 表示）



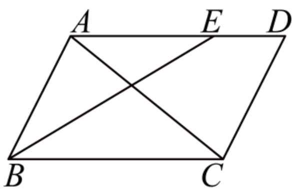
2.（2024·上海虹口二模 16）如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$BC=2AD$，点 E 、F 分别是边 AB 、CD 的中点，连接 AC，设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，那么用向量 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{EF}=$________.



3.（2024·上海黄浦二模 15） 如图，D、E 分别是 $\triangle ABC$ 边 AB 、AC 上点，满足 $AD=2BD$，$\angle ADE=\angle ABC$．记 $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，那么向量 $\overrightarrow{BE}=$________（用向量 a、b 表示）.



4.（2024·上海金山二模 15）如图，已知平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，$E$ 为 AD 上一点，$AE=2ED$，那么用 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{AE}=$________.

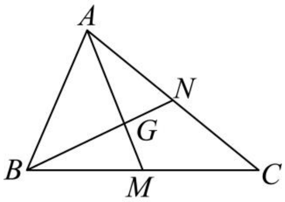


5.（2024·上海静安二模 15）在 $\triangle ABC$ 中，点 D、E、F 分别是边 AB、AC、BC

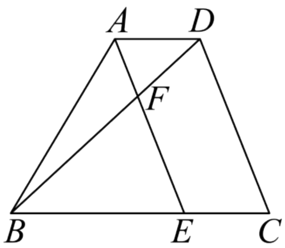
的中点，设 $\overrightarrow{DE}=\vec{a},\overrightarrow{DF}=\vec{b}$，那么向量 $\overrightarrow{AB}$ 用向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示为______.

6.（2024·上海闵行二模 10）计算：$3\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)+5\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)=$________.

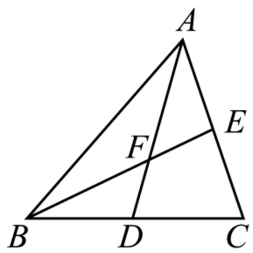
7.（2024·上海浦东二模 16）如图，已知 $\triangle ABC$ 中，中线 AM、BN 相交于点 G，设 $\overrightarrow{AG}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BG}=\vec{b}$，那么向量 $\overrightarrow{BC}$ 用向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示为________.



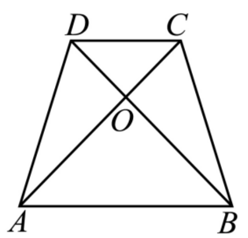
8.（2024·上海普陀二模 16）如图，梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，过点 A 作 $AE\parallel DC$ 分别交 BD、BC 于点 F、E，$\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{2}{3}$，设 $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，那么向量 $\overrightarrow{FE}$ 用向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示为______.



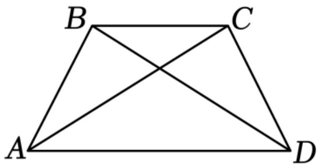
9.（2024·上海青浦二模 15）如图，在 $\triangle ABC$ 中，中线 AD、BE 相交于点 F，设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{FE}=\vec{b}$，那么向量 $\overrightarrow{BC}$ 用向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示为_______.



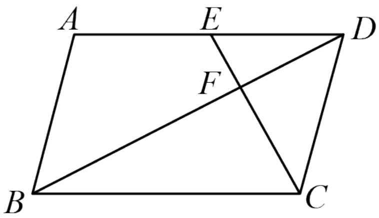
10.（2024·上海松江二模 15）如图，已知梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$AB=2CD$，AC、BD 交于点 O．设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，那么向量 $\overrightarrow{AO}$ 可用 $\vec{a},\vec{b}$ 表示为_____.



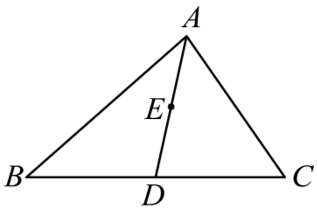
11.（2024·上海徐汇二模 16）如图，梯形 $ABCD$ 中， $BC // AD$， $AB = CD$， AC 平分 $\angle BAD$，如果 $AD = 2AB$， $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$， $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$，那么 $\overrightarrow{AC}$ 是_______（用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示）.



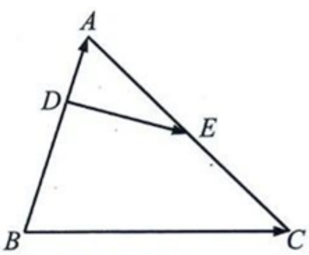
12.（2024·上海杨浦二模 14）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，E 是边 AD 的中点，CE 与对角线 BD 相交于点 F，设向量 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，向量 $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，那么向量 $\overrightarrow{BF} =$______.（用含 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示）



13.（2024·上海嘉定二模 15）如图，在 $\triangle ABC$ 中，线段 AD 是边 BC 上的中线，点 E 是 AD 的中点，设向量 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$， $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，那么向量 $\overrightarrow{AE} =$____（结果用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示）.



14.（2024·上海长宁二模 15）如图，在△ABC 中，点 D 在边 AB 上，且 $BD = 2AD$，点 E 是 AC 的中点，联结 DE，设向量 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$，如果用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{DE}$，那么 $\overrightarrow{DE} =$ ___________.



15.（2024·上海宝山二模 15）如图 3，正六边形 $ABCDEF$，连接 OE、OD，如果 $\overrightarrow{OD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OE}=\vec{b}$,

那么 $\overrightarrow{AB}=$____▲____.

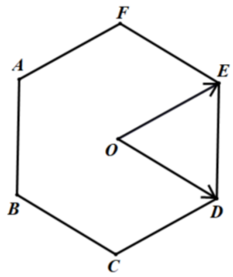
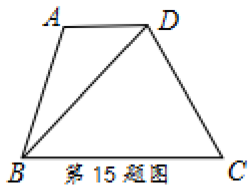


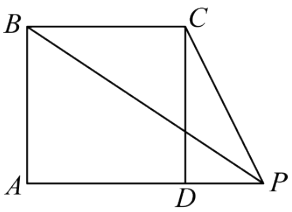
图 3

16.（2024·上海崇明二模 15）如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$2BC=5AD$，若 $\overrightarrow{DA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{DC}=\vec{b}$，用 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{DB}=$________▲________.

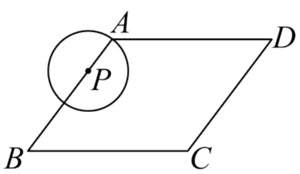


二．相似，锐角三角比

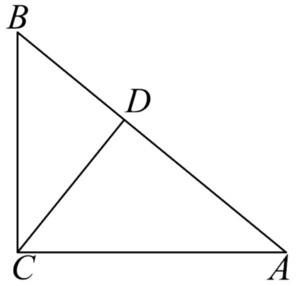
1.（2024·上海奉贤二模 17）如图，正方形 $ABCD$ 的边长为1，点 P 在 AD 延长线上 $(PD<CD)$，连接 PB、PC，如果$\triangle CDP$与$\triangle PAB$相似，那么 $\tan\angle BPA=$______.



2.（2024·上海虹口二模 17）如图，在▱$ABCD$ 中，$AB=7$，$BC=8$，$\sin B=\dfrac{4}{5}$．点 P 在边 AB 上，$AP=2$，以点 P 为圆心，AP 为半径作⊙P．点 Q 在边 BC 上，以点 Q 为圆心，CQ 为半径作⊙Q．如果⊙P 和⊙Q 外切，那么 CQ 的长为________.



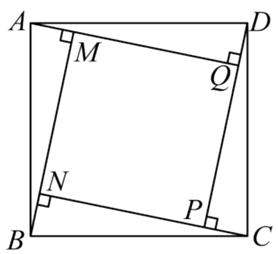
3.（2024·上海黄浦二模 21）　如图，D 是 $\triangle ABC$ 边 AB 上点，已知 $\angle BCD=\angle A$，$AD=5$，$BD=4$．



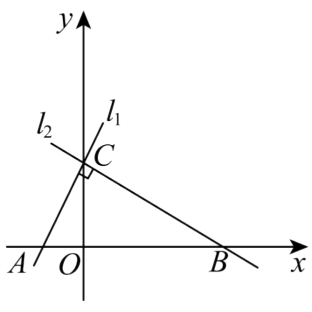
（1）求边 BC 的长；

（2）如果 $\triangle ACD \backsim \triangle CBD$（点 A、C、D 对应点 C、B、D），求 $\angle ACB$ 的度数．

4.（2024·上海黄浦二模 17）如图，由 4 个全等的直角三角形拼成一个大正方形 $ABCD$，内部形成一个小正方形 $MNPQ$．如果正方形 $MNPQ$ 的面积是正方形 $ABCD$ 面积的一半，那么．$\angle ABM$ 的正切值是________．

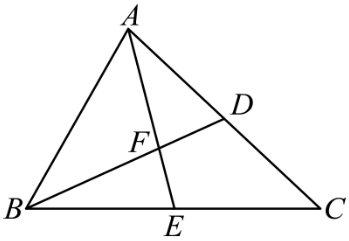


5.（2024·上海静安二模16）如图，在平面直角坐标系中，已知直线 l_1 与直线 l_2 交于点 $C\left(0,1\right)$，它们的夹角为 $90°$．直线 l_1 交 x 负半轴于点 A，直线 l_2 与 x 正半轴交于点 $B\left(2,0\right)$，那么点 A 的坐标是______．

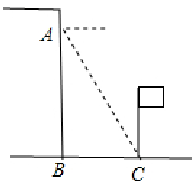


6.（2024·上海闵行二模 17）　如图，在 $\triangle ABC$ 中，BC、AC 上的中线 AE、BD 相交于点 F

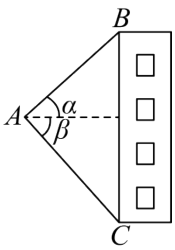
，如果$\angle BAE=\angle C$，那么$\dfrac{AF}{AC}$的值为______.



7.（2024·上海浦东二模15）小丽在大楼窗口A测得校园内旗杆底部C的俯角为α度，窗口离地面高度$A=h$（米），那么旗杆底部与大楼的距离$BC=$________米（用α的三角比和h的式子表示）

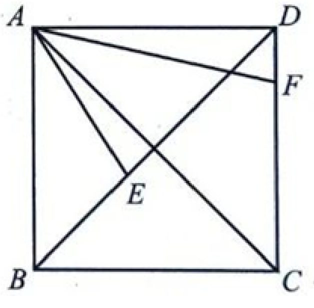


8.（2024·上海青浦二模14）如图，热气球的探测器显示，从热气球A处看一栋楼顶部B的仰角为α，看这栋楼底部C的俯角为β，热气球A处与楼的水平距高为m米，那么这栋楼BC的高度为_______米.（用含α、β、m的式子表示）



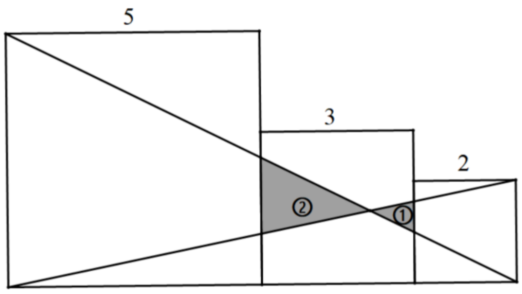
9.（2024·上海徐汇二模14） 小杰沿着坡比$i=1:2.4$的斜坡，从坡底向上步行了130米，那么他上升的高度是______米.

10.（2024·上海长宁二模16）如图，正方形$ABCD$中，点E在对角线BD上，点F在边CD上（点F不与点C重合），且$\angle EAF=45°$，那么$\dfrac{CF}{BE}$的值为__________.

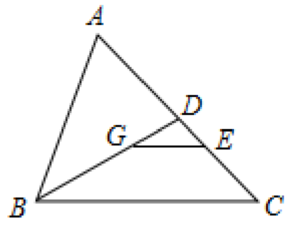


11.（2024·上海长宁二模 17）在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，$AC > BC$，将 $\triangle ABC$ 绕着点 C 旋转，点 A、点 B 的对应点分别是点 D、点 E，如果点 A 在 DE 的延长线上，且 $CE \parallel AB$，那么 $\angle CAE$ 的余弦值为__________.

12.（2024·上海宝山二模 17）如图 5，边长分别为 5，3，2 的三个正方形拼接在一起，它们的一边在同一直线上，那么图中阴影三角形①和②的面积之比 $\frac{S_1}{S_2}$ 的比值为______.



13.（2024·上海崇明二模 16）如图，点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，BG 的延长线交 AC 于点 D，过点 G 作 $GE \parallel BC$，交 AC 于点 E，则 $\frac{S_{\triangle DGE}}{S_{\triangle ABD}} =$______▲______.

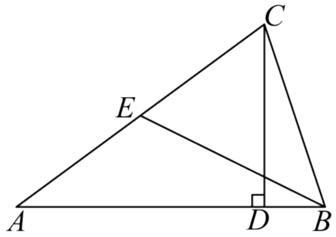


第 16 题图

14.（2024·上海崇明二模 17）已知在矩形 $ABCD$ 中，$AB = 6$，$BC = 4$，将矩形 $ABCD$ 绕点 B 旋转，AB 的对应边 $A'B$ 与边 CD 相交于点 E，联结 $A'C$，当点 E 是 CD 中点时，$\tan\angle A'CD =$______▲______.

三．解答题

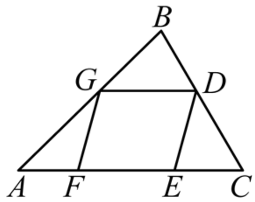
1.（2024·上海浦东二模21）如图，在$\triangle ABC$中，CD是边AB上的高．已知$AB=AC$，$BC=\sqrt{10}$，$\tan\angle BAC=\frac{3}{4}$．



（1）求AD的长；

（2）如果点E是边AC的中点，连接BE，求$\cot\angle ABE$的值．

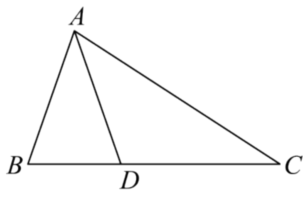
2.（2024·上海闵行二模21）如图，在$\triangle ABC$中，点D在边BC上，点G在边AB上，点E、F在边AC上，$GD\parallel AC$，$\angle DGF=\angle DEF$，$\angle B=\angle GFE$．



（1）求证：四边形$EDGF$是平行四边形；

（2）求证：$\frac{GF}{AB}=\frac{CD}{AC}$．

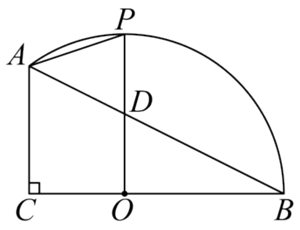
3.（2024·上海普陀二模21）如图，在$\triangle ABC$中，$\angle B=2\angle C$，点D在边BC上，$AB=AD=13$，$BC=23$．



（1）求BD的长；

（2）求$\tan C$的值．

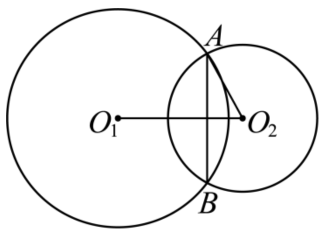
4.（2024·上海松江二模21）如图，已知$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°, AC=4, BC=8$．点$O$在边$BC$上，以$O$为圆心，$OB$为半径的弧经过点$A$．



（1）求$\odot O$的半径长；

（2）P是$\overset{\frown}{AB}$上一点，$PO \perp BC$，交AB于点D，联结AP．求$\angle PAB$的正切值．

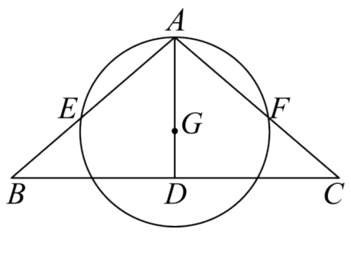
5. （2024·上海徐汇二模21）如图，$\odot O_1$和$\odot O_2$相交于点A、B，连接AB、O_1O_2、AO_2，已知$AB=48$，$O_1O_2=50$，$AO_2=30$．



（1）求$\odot O_1$的半径长；

（2）试判断以O_1O_2为直径的$\odot P$是否经过点B，并说明理由．

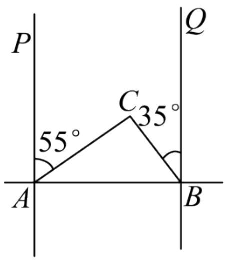
6.（2024·上海杨浦二模21）如图，已知在$\triangle ABC$中，$AB=AC=9$，$\cos B=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，点$G$是$\triangle ABC$的重心，延长$AG$交边$BC$于点$D$，以$G$为圆心，$GA$为半径的圆分别交边$AB$、$AC$于点$E$、$F$.

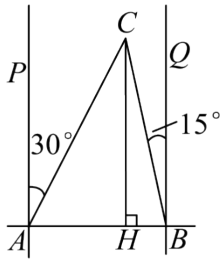


（1）求AG的长；

（2）求BE的长．

7.（2024·上海嘉定二模21）某东西方向的海岸线上有A、B两个码头，这两个码头相距60千米（$AB=60$），有一艘船C在这两个码头附近航行．





（1）当船 C 航行了某一刻时，由码头 A 测得船 C 在北偏东 $55°$，由码头 B 测得船 C 在北偏西 $35°$，如图，求码头 A 与 C 船的距离（ AC 的长），其结果保留 3 位有效数字；

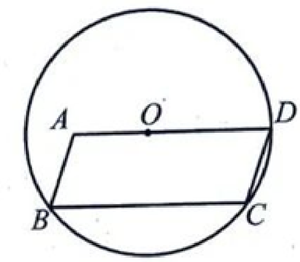
（参考数据：$\sin 35° \approx 0.5736$， $\cos 35° \approx 0.8192$， $\tan 35° \approx 0.7002$， $\cot 35° \approx 1.428$）

（2）当船 C 继续航行了一段时间时，由码头 A 测得船 C 在北偏东 $30°$，由码头 B 测得船 C 在北偏西 $15°$，船 C 到海岸线 AB 的距离是 CH （即 $CH \perp AB$），如图，求 CH 的长，其结果保留根号．

8.（2024·上海长宁二模 21）（本题满分 10 分，第（1）小题 5 分，第（2）小题 5 分）

如图，e O 经过平行四边形 $ABCD$ 的顶点 B、C、D，点 O 在边 AD 上，

$AO = 3$，$OD = 5$．



（1）求平行四边形 $ABCD$ 的面积；

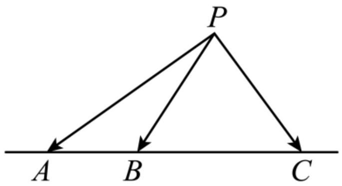
（2）求 $\angle D$ 的正弦值．

$= \frac{3}{10}\sqrt{10}$

7.相似，锐角三角比，平面向量

一．平面向量

1.（2024·上海奉贤二模 15） 如图，已知点 A、B、C 在直线 l 上，点 P 在直线 l 外，$BC=2AB$，$\overrightarrow{PA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{PB}=\vec{b}$，那么 $\overrightarrow{PC}=$______.（用向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示）



【答案】$3\vec{b}-2\vec{a}$##$-2\vec{a}+3\vec{b}$

【分析】本题考查平面向量，在 $\triangle ABP$ 中，利用三角形法则求得 $\overrightarrow{AB}$；然后结合 $BC=2AB$ 求得 $\overrightarrow{AC}$；最后在 $\triangle PAC$ 中，再次利用三角形法则求得答案.

【详解】解：$\because \overrightarrow{PA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{PB}=\vec{b}$，

$\therefore \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}=\vec{b}-\vec{a}$，

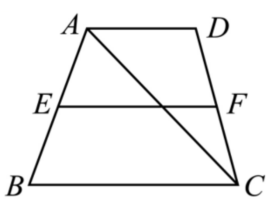
$\because BC=2AB$，

$\therefore \overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}=3\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=3\vec{b}-3\vec{a}$，

$\therefore \overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}=\vec{a}+3\vec{b}-3\vec{a}=3\vec{b}-2\vec{a}$

故答案为：$3\vec{b}-2\vec{a}$.

2.（2024·上海虹口二模 16）如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$BC=2AD$，点 E、F 分别是边 AB、CD 的中点，连接 AC，设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，那么用向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{EF}=$________.



【答案】$-\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$

【分析】本题考查了平面向量的问题，熟练掌握三角形法则是解题的关键，根据梯形的中位线定理及向量的三角形法则解答即可.

【详解】解：∵ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，

∴ $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-\vec{a}+\vec{b}$，

∵ $AD\parallel BC, BC=2AD$，

∴ $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$，

∴ $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{b}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$，

∵ 点 E、F 分别是边 AB、CD 的中点，

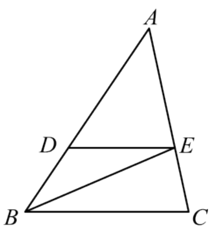
∴ $\overrightarrow{EA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\vec{a}$，

∴ $\overrightarrow{DF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$，

∴ $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\left(-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)+\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}\right)=-\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$，

故答案为：$-\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$．

3.（2024·上海黄浦二模15） 如图，D、E分别是$\triangle ABC$边 AB、AC 上点，满足 $AD=2BD$，$\angle ADE=\angle ABC$．记 $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，那么向量 $\overrightarrow{BE}=$________（用向量 a、b 表示）．



【答案】$\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$

【分析】本题主要考查了平行线的判定，相似三角形的判定以及性质，向量的知识．由 $\angle ADE=\angle ABC$ 判定出 $DE\parallel BC$，由平行线的得出 $AE=\frac{2}{3}AC$，再根据向量得知识即可得出 $\overrightarrow{BE}$．

【详解】解：∵ $\angle ADE=\angle ABC$，

∴ $DE // BC$，

∴ $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$，

∵ $AD = 2BD$，

∴ $AE = 2EC$，

∴ $AE = \frac{2}{3}AC$，

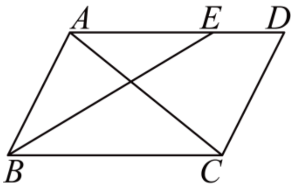
∴ $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$，

∵ $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$

∴ $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$，

故答案为：$\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$．

4.（2024·上海金山二模 15）如图，已知平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC} = \vec{b}$，$E$ 为 AD 上一点，$AE = 2ED$，那么用 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{AE} =$__________.



【答案】$\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$

【分析】此题考查了平面向量的知识．注意掌握三角形法则的应用。利用三角形法则，可求得 $\overrightarrow{BC}$，由平行四边形的对边平行且相等和已知条件可以推知：$AE = \frac{2}{3}BC$，求得答案

【详解】解：∵ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$，$\overrightarrow{AC} = \vec{b}$，

∴ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$．

∵ $AE = 2ED$，∴ $AE = \frac{2}{3}AD$．

在▱ $ABCD$ 中，$AD = BC$，$AD // BC$，

∴ $AE = \frac{2}{3}BC$，$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$．

∴ $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$．

∴ $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$．

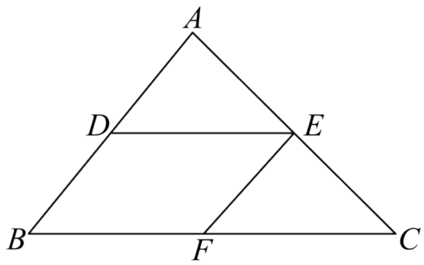
故答案为：$\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a}$.

5.（2024·上海静安二模 15）在$\triangle ABC$中，点D、E、F分别是边AB、AC、BC的中点，设$\overrightarrow{DE}=\vec{a},\overrightarrow{DF}=\vec{b}$，那么向量$\overrightarrow{AB}$用向量$\vec{a}$、$\vec{b}$表示为______.

【答案】$2\vec{a}-2\vec{b}$

【分析】首先利用三角形中位线定理求得$EF=\frac{1}{2}AB$，则$AB=2EF$；然后由三角形法则求得$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{DE}$．代入求值即可.

【详解】解：在$\triangle ABC$中，$\because$点E、F分别是边AC、BC的中点，



$\therefore FE$是$\triangle ABC$的中位线.

$\therefore EF=\frac{1}{2}AB$.

$\therefore AB=2EF$.

$\because \overrightarrow{DE}=\vec{a}$，$\overrightarrow{DF}=\vec{b}$，

$\therefore \overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{DE}=\vec{a}-\vec{b}$.

$\therefore \overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{EF}=2\vec{a}-2\vec{b}$.

故答案为：$2\vec{a}-2\vec{b}$.

6.（2024·上海闵行二模 10）计算：$3\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)+5\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)=$________.

【答案】$16\vec{a}+12\vec{b}$

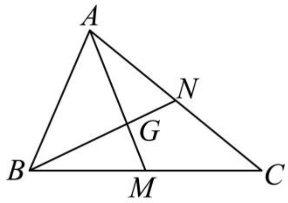
【分析】向量的加减法计算.

【详解】原式=$6\vec{a}-3\vec{b}+10\vec{a}+15\vec{b}=16\vec{a}+12\vec{b}$

故答案为：$16\vec{a}+12\vec{b}$.

7.（2024·上海浦东二模 16）如图，已知$\triangle ABC$中，中线AM、BN相交于点G，设

$\overrightarrow{AG}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BG}=\vec{b}$，那么向量$\overrightarrow{BC}$用向量$\vec{a}$、$\vec{b}$表示为________.



【答案】$\vec{a}+2\vec{b}$

【分析】本题考查了三角形的重心，三角形法则等知识．解题的关键在于对知识的熟练掌握与灵活运用．根据重心的性质可得$AG=2GM$，$BC=2BM$，利用三角形法则求出$\overrightarrow{BM}$，进而可得结果．

【详解】解：∵中线AM、BN交于点G，

∴$AG=2GM$，$BC=2BM$，

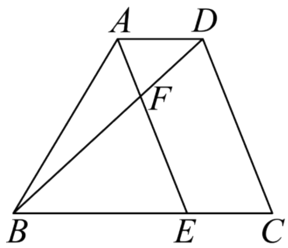
∴$GM=\dfrac{1}{2}AG$，

∵$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GM}$，即$\overrightarrow{BM}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$，

∴$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BM}=\vec{a}+2\vec{b}$．

故答案为：$\vec{a}+2\vec{b}$．

8.（2024·上海普陀二模16）如图，梯形$ABCD$中，$AD\parallel BC$，过点A作$AE\parallel DC$分别交BD、BC于点F、E，$\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{2}{3}$，设$\overrightarrow{AD}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，那么向量$\overrightarrow{FE}$用向量$\vec{a}$、$\vec{b}$表示为______.



【答案】$\dfrac{4}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$

【分析】本题考查了平行四边形的判定，相似三角形的性质与判定，平面向量的线性运算，先证明四边形$AECD$是平行四边形，根据已知得出$\dfrac{BE}{EC}=\dfrac{BE}{AD}=\dfrac{2}{1}$，进而证明

$\triangle FAD \backsim \triangle FEB$ 得出 $BF=\frac{2}{3}BD$， $BE=2AD$，进而根据三角形法则，进行计算即可求解.

【详解】解：$\because AD\,//\,BC$， $AE\,//\,DC$

$\therefore$四边形 $AECD$ 是平行四边形,

$\therefore EC=AD$，

$\because \frac{BE}{BC}=\frac{2}{3}$，

$\therefore \frac{BE}{EC}=\frac{BE}{AD}=\frac{2}{1}$

$\because AD\,//\,BC$，

$\therefore \triangle FAD \backsim \triangle FEB$，

$\therefore \frac{BF}{DF}=\frac{BE}{AD}=2$，则 $BF=\frac{2}{3}BD$， $BE=2AD$

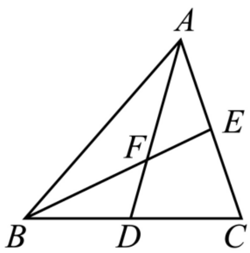
$\because \overrightarrow{AD}=\vec{a}$， $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，

$\therefore \overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{2}{3}\left(-\vec{b}+\vec{a}\right)$， $\overrightarrow{BE}=2\vec{a}$

$\therefore \overrightarrow{FE}=\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BF}=2\vec{a}-\frac{2}{3}\left(-\vec{b}+\vec{a}\right)=\frac{4}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$

故答案为：$\frac{4}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$.

9.（2024·上海青浦二模 15）如图，在 $\triangle ABC$ 中，中线 AD、BE 相交于点 F，设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{FE}=\vec{b}$，那么向量 $\overrightarrow{BC}$ 用向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示为_______.



【答案】$\vec{a}+6\vec{b}$

【分析】根据三角形的中位线定理和相似三角形的判定和性质可得 $\overrightarrow{BE}=3\overrightarrow{FE}=3\vec{b}$，利用三角形法 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{ED}$ 则求出即可.

【详解】解：连接 DE，

$\because$中线 AD、BE 相交于点 F，

∴ $DE \parallel AB$， $DE=\frac{1}{2}AB$，

∴ $\overrightarrow{ED}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\vec{a}$，

∴ $\triangle DEF \backsim \triangle ABF$，

∴ $\frac{EF}{FB}=\frac{ED}{AB}=\frac{1}{2}$，

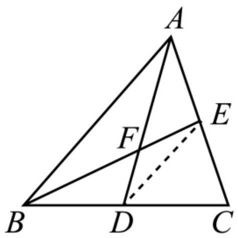
∴ $\overrightarrow{BE}=3\overrightarrow{FE}=3\vec{b}$，

∴ $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{ED}=\frac{1}{2}\vec{a}+3\vec{b}$，

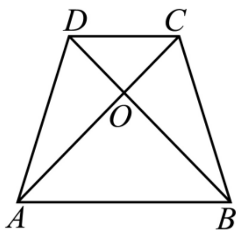
又∵点 D 是 BC 的中点，

∴ $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BD}=\vec{a}+6\vec{b}$，

故答案为：$\vec{a}+6\vec{b}$．



10.（2024·上海松江二模 15）如图，已知梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，$AB=2CD$，AC、BD 交于点 O．设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AD}=\vec{b}$，那么向量 $\overrightarrow{AO}$ 可用 $\vec{a},\vec{b}$ 表示为_____．



【答案】$\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$

【分析】本题考查向量的线性计算．熟练掌握三角形法则，是解题的关键．先证明 $OB=\frac{2}{3}DB$，再利用三角形法则，进行求解即可．

【详解】解：∵ $AB \parallel CD$，

∴ $\triangle AOB \backsim \triangle COD$，

∴ $\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}$，

∵ $AB=2CD$，

$\therefore OB = 2OD$，

$\therefore OB = \frac{2}{3}DB$，

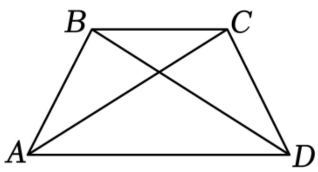
$\therefore \overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DB}$，

$\because \overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}$，

$\therefore \overrightarrow{AO} = \vec{a} - \overrightarrow{OB} = \vec{a} - \frac{2}{3}\left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$；

故答案为：$\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

11.（2024·上海徐汇二模 16）如图，梯形 $ABCD$ 中，$BC // AD$，$AB = CD$，AC 平分 $\angle BAD$，如果 $AD = 2AB$，$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$，$\overrightarrow{AD} = \vec{b}$，那么 $\overrightarrow{AC}$ 是_______（用向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示）.



【答案】$\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

【分析】本题主要考查了角平分线的定义，平行线的性质，向量的运算，解题的关键是熟练掌握这些知识．根据角平分线的定义，平行线的性质，推出 $AB = BC$，结合 $AD = 2BC$，可得 $BC = \frac{1}{2}AD$，最后根据 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，即可求解.

【详解】解：设 $\angle BAC = \alpha$，

$\because AC$ 平分 $\angle BAD$，

$\therefore \angle BAC = \angle CAD = \alpha$，

$\because BC // AD$，

$\therefore \angle BCA = \angle DAC = \alpha$，

$\therefore \angle BCA = \angle BAC$，

$\therefore AB = BC$，

$\because AD = 2AB$，

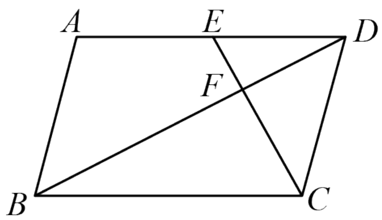
$\therefore AD = 2BC$，

$\therefore BC = \frac{1}{2}AD$，

$\therefore \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$，

故答案为：$\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$．

12.（2024·上海杨浦二模 14）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，E 是边 AD 的中点，CE 与对角线 BD 相交于点 F，设向量 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，向量 $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，那么向量 $\overrightarrow{BF}=$______．（用含 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的式子表示）



【答案】$\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a}$

【分析】本题主要考查平面向量的知识，结合平行四边形性质，相似三角形的性质解题是关键．利用平行四边形的性质可先证明 $BF=\frac{2}{3}BD$，然后用三角形法则表示出 $\overrightarrow{BD}$，即可得到 $\overrightarrow{BF}$．

【详解】解：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore DC// AB$，$DC=AB$，$AD// BC$，$AD=BC$，

$\therefore \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\triangle DEF\backsim\triangle BCF$，

∵E 是边 AD 的中点，

$\therefore \frac{DE}{BC}=\frac{DF}{BF}=\frac{1}{2}$，

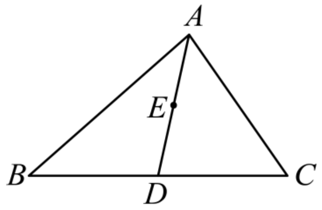
$\therefore BF=\frac{2}{3}BD$，

$\because \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\vec{b}-\vec{a}$，

$\therefore \overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a}$，

故答案为：$\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a}$

13.（2024·上海嘉定二模 15）如图，在 $\triangle ABC$ 中，线段 AD 是边 BC 上的中线，点 E 是 AD 的中点，设向量 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，那么向量 $\overrightarrow{AE}=$____（结果用 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示）．



【答案】$\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$

【分析】本题考查了平面向量的知识点，运用三角形法则是解题的关键．先用$\vec{a},\vec{b}$的线性组合表示$\overrightarrow{AD}$，再表示$\overrightarrow{AE}$即可．

【详解】解：$\because \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$，线段$AD$是边$BC$上的中线，

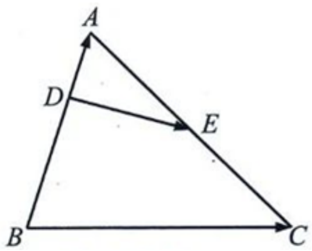
$\therefore \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$，

$\because$点E是AD的中点，

$\therefore \overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$，

故答案为：$\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$．

14.（2024·上海长宁二模15）如图，在$\triangle ABC$中，点D在边AB上，且$BD=2AD$，点E是AC的中点，联结DE，设向量$\overrightarrow{BA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，如果用$\vec{a}$、$\vec{b}$表示$\overrightarrow{DE}$，那么$\overrightarrow{DE}=$____________.



【答案】$\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{6}\vec{a}$

【分析】本题考查向量的运算，及三角形法则的应用，过程见详解

【详解】由题意得

$\overrightarrow{DA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{3}\vec{a}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{6}\vec{a}$

15.（2024·上海宝山二模 15）如图 3，正六边形 $ABCDEF$，连接 OE、OD，如果 $\overrightarrow{OD}=\vec{a},\overrightarrow{OE}=\vec{b}$,

那么 $\overrightarrow{AB}=$____▲____.

【答案】$\vec{a}-\vec{b}$

【分析】

【详解】

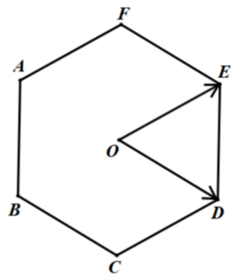


图 3

∵正六边形 ABCDEF

∴AB // DE

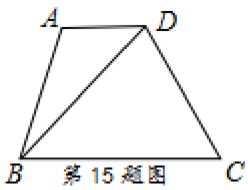
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ED}$

$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OD}=\vec{a}-\vec{b}$

∴答案为 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}-\vec{b}$

16.（2024·上海崇明二模 15）如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD // BC$，$2BC=5AD$，若 $\overrightarrow{DA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{DC}=\vec{b}$，用 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{DB}=$____▲____.

【答案】$\frac{5}{2}\vec{a}+\vec{b}$



【分析】本题考查向量的运算，及三角形法则的应用，过程见详解

【详解】

∵ $AD // BC$，$2BC=5AD$

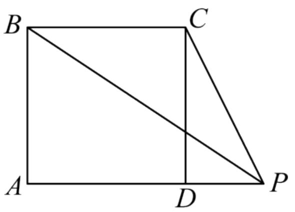
$\therefore \overrightarrow{CB}=\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}=\frac{5}{2}\vec{a}$

$\therefore \overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\vec{b}+\frac{5}{2}\vec{a}$

所以答案为$\frac{5}{2}\vec{a}+\vec{b}$

二．相似，锐角三角比

1.（2024·上海奉贤二模 17）如图，正方形$ABCD$的边长为1，点P在AD延长线上$(PD<CD)$，连接PB、PC，如果$\triangle CDP$与$\triangle PAB$相似，那么$\tan\angle BPA=$______.



【答案】$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

【分析】本题考查了相似三角形的性质，三角函数，设$DP=x$，利用相似三角形的性质可得$\frac{DP}{AB}=\frac{CD}{PA}$，即$\frac{x}{1}=\frac{1}{x+1}$，求出$x$，得到$DP=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，再根据正切的定义计算即可求解，利用相似三角形的性质求得DP是解题的关键．

【详解】解：设$DP=x$，则$PA=x+1$

$\because PD<CD$，$\triangle CDP$与$\triangle PAB$相似，

$\therefore \frac{DP}{AB}=\frac{CD}{PA}$，

$\therefore \frac{x}{1}=\frac{1}{x+1}$，

$\therefore x^2+x-1=0$，

解得$x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$（不合，舍去），