因式分解唯一性定理

因式分解与基础域有关

例如　在Q上有$x^4-4=(x^2-2)(x^2+2)$,在R上有

$x^4-4=$ $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2)$, 在C上有

$$x^4-4=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x+2i)(x-2i)。$$

对 $\forall f(x)\in F[x], f(x)$ 恒有两类因式:

1）　$0\neq C\in F$;

2）　$cf(x),\forall 0\neq c\in F$. 称这样的因式为f(x)的平凡因式。

定义 如果域F上一个次数>0的多项式，除平凡因式外它没有别的因式，则称f(x)为F上的一个**不可约多项式**。

从前面的例子可以看出一个多项式是否可解与基础域有关。如x^2-2在Q上不可约,但在R上就可解。

不可约多项式的性质

1）若p(x)不可约，则cp(x)($0\neq c\in F$)也不可约。

证 因p(x),cp(x)有相同的因式。

2）若p(x)不可约,则对

$\forall f(x)\in F[x]$,有 $(p(x),f(x))=1$或$p(x)\mid f(x)$。

证 设d(x)=(p(x),f(x))，若d(x)=1，则结论成立。若$d(x)\neq 1$,则$d(x)\mid p(x)$.

因为p(x)不可约,所以d(x)=cp(x)。于是由$d(x)\mid f(x)$得$d(x)\mid f(x)$。

3）设p(x)不可约,对$\forall f(x), g(x)\in F[x]$,有p(x) | f(x)g(x),则p(x) | f(x)或　p(x) | g(x)。

证 若p(x) | f(x)，则由性质2）

(p(x),f(x))=1　从而p(x) | g(x)。

一般地，有如下性质：

$\forall f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)\in F[x]$,有$p(x) \mid f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$,则

$\exists f_i(x)$, s.t $p(x) \mid f_i(x), 1\le i\le n$.

唯一分解定理 （1）数域F上任一次数大于零的多项式f(x)都可以分解成F上的不可约多项式的乘积，

即$f(x)=p_1(x)p_2(x)\dots p_n(x)$；（分解的存在性）

（2）若f(x)又有分解

$$f(x)=q_1(x)q_2(x)\dots q_m(x),$$

其中$q_j(x)(j=1,2,\dots,m)$是F上不可约多项式，则m=n，且适当调换$q_j(x)$的次序后有

$$p_i(x)=c_iq_i(x),$$（分解唯一性）

其中$0\neq c_i\in F$，I=1,2，…，n，且$c_1c_2\dots c_n=1$

证　分解存在性。

　　若$f(x)$ 是不可约多项式，则分解以存在。若$f(x)$可解，则存在$f_1(x)$, $f_2(x)$使

$$f(x)=f_1(x)f_2(x), 0<\deg(f_1(x))<\deg(f(x)),$$

$$0<\deg(f_2(x))<\deg(f(x)).$$

　　若$f_1(x)$,$f_2(x)$均为不可约多项式，则分解完毕。若$f_1(x)$或$f_2(x)$可解，则继续分解，由于$\deg(f(x))$有解，因此有限步后必然分解完毕。

分解唯一性：

设$f(x)=p_1(x)p_2(x)\ldots p_n(x)=q_1(x)q_2(x)\ldots q_m(x)$，

$p_i(x)$,$q_j(x)$不可约，$1\leqq i\leqq n$，$1\leqq j\leqq m$。则

$p_1(x)\mid q_1(x)q_2(x)\ldots q_m(x)$。

由性质3）得：存在某$q_j(x)$，s.t，$p_1(x)\mid q_j(x)$，

因q_j不可约，有$p_1(x)=cq_j(x)$,其中$0\neq c\in F$，调

换$q_1(x),q_2(x),\ldots$，$q_m(x)$的秩序，使$q_j(x)$排在

第一位。于是有$p_1(x)=c_1(x)q_1(x)$，

从而$c_1q_1(x)p_2(x)\ldots p_n(x)=q_1(x)q_2(x)\ldots q_m(x)$,

$c_1(x)p_2(x)\ldots p_n(x)=q_2(x)\ldots q_m(x)$.

对$p_2(x),p_3(x),\ldots$，$p_n(x)$分别重复上面的讨论，并按需调整$q_2(x),\ldots$，$q_m(x)$的秩序可得:

$p_i(x)=c_iq_i(x),2\leqslant i\leqslant n$.

若$m>n$,则$c_1c_2\ldots c_n=q_{n+1}(x)\ldots q_m(x)$,

但 $\deg(c_1c_2\ldots c_n)=0$,

$\deg(q_{n+1}(x)\ldots q_m(x))>0$，矛盾。

因而$m=n$，且$c_1c_2\ldots c_n=1$。证毕。

说明：(1) 这里所说的唯一性是相对唯一性，不是绝对唯一性。两种分解中的不可约多项式可以相差一个非零因子。

(2) 由于f(x)的分解中可能有一些不可约因式相同或相差一个非零常数，因此我们可以把它们归类成

$$f(x)=cp_1^{\alpha_1}(x)p_2^{\alpha_2}(x)\cdots p_k^{\alpha_k}(x),$$

$$\alpha_i > 0, i = 1, 2, \cdots, k,$$

其中c为f(x)的首次系数，$p_1(x)$为首项系数为1的不可约多项式。上式称为**f(x)的标准分解式。**

F上任意一个次数>0的多项式的标准分解式是唯一的

事实上，若$f(x)=cp_1^{\alpha_1}(x)p_2^{\alpha_2}(x)\cdots p_k^{\alpha_k}(x)=dq_1^{\beta_1}(x)q_2^{\beta_2}(x)\cdots q_l^{\beta_l}(x)$,

由唯一分解定理，适当调换顺序，有

$p_1(x)=c_1q_1(x)$。但$p_1(x),q_1(x)$均为首次系数为的多项式，从而$c_1=1,p_1(x)=q_1(x)$。

从而$\alpha_1=\beta_1$。同理可证$p_i(x)=q_i(x)$，$\alpha_i=\beta_i$，

于是 $k=l,c=d$。

标准分解式的应用

(1) 设 $f(x)=cp_1^{\alpha_1}(x)p_2^{\alpha_2}(x)\cdots p_k^{\alpha_k}(x), \alpha_i>0, i=1,2,\cdots, k,$

则 $d(x)|f(x) \Leftrightarrow d(x)=c_1p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}p_k^{\beta_k}, \alpha_i \ge \beta_i \ge 0,$

证 充分性显然

必要性 设$d(x)|f(x)$，则$f(x)=d(x)h(x)$.

由于 $f(x)$的标准分解式绝对唯一，因此

$d(x)$的标准分解式中的不可约因式只能是

$p_j(x), j=1,2,\ldots$，k中的某一些，且$p_j(x)$在

$d(x)$的标准分解式中出现的指数$\beta_j \le \alpha_i$，证毕。

(2) 设f(x)，g(x) ∈ F[x]且

$$f(x)=cp_1^{\alpha_1}(x)p_2^{\alpha_2}(x)p_t^{\alpha_t}(x),\alpha_i\geq 0, i=1,2,\cdots,t$$

$$g(x)=bp_1^{\beta_1}(x)p_2^{\beta_2}(x)\cdots p_t^{\beta_t}(x),\beta_i\geq 0, i=1,2,\cdots,t$$

则

$$(f(x),g(x))=p_1^{\delta_1}(x)p_2^{\delta_2}(x)\cdots p_t^{\delta_t}(x),\delta_i=\min(\alpha_i,\beta_i), i=1,2,\cdots, t$$

说明：这里指出的最大公因式乘法只是理论上的，因要得到一个次数很高的多项式的标准分解式，通常是很困难的。因此它没有辗转相除法有效。

重因式

定义 不可约多项式p(x)称为多项式f(x)的一个k重因式,如果$p^k(x)|f(x)$,但$p^{k+1}(x)\nmid f(x)$。若k>1,则称p(x)为f(x)的重因式;若k=1,则称p(x)为f(x)的单因式.如果p(x)根本不是f(x)的因式,为了方便，称p(x)为的零重因式。

设数域F上任给一多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0,$$

则称多项式$f'(x)=na_nx^{n-1}+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1$为f(x)的导数.它的定义与数学分析中的定义相同。

引理1 多项式的导数有以下的基本公式

（i） $(cf(x))' = cf'(x)$;

（ii） $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$;

（iii） $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$;

（iv） $(f^m(x))' = m(f^{m-1}(x)f'(x))$.

定理1　若不可约多项式$p(x)$是$f(x)$的k重因式,($k\geqslant 1$),则它是$f'(x)$的$k-1$重因式，特别地,$f(x)$的单因式不是$f'(x)$的因式或者是$f'(x)$的零重因式.

证　设$f(x)=p^k(x)g(x)$,且$p(x)$整除$g(x)$,于是$f'(x)=p^{k-1}(x)(kp'(x)g(x)+p(x)g'(x))$,所以$p^{k-1}(x)\mid f'(x)$.又因$\deg(p(x))>\deg(p'(x))$有$p(x)$不整除$p'(x)$，从而$p(x)$不整除$p'(x)g(x)$，必然$p(x)$与$kp'(x)g(x)+p(x)g'(x)$互素。故$p(x)$是$f'(x)$的$k-1$重因式。由此也可到$p(x)$为单因式的情况。证毕。

推论1　若不可约多项式p(x)是f(x)的k重因式（k≥1），则$p(x)\mid f(x), p(x)\mid f'(x), \ldots,$ $p(x)\mid f^{(k-1)}(x)$, $p(x)$不整除$f^{(k)}(x)$。

推论2　不可约多项式p(x)是f(x)的重因式的充要条件是$p(x)\mid (f(x), f'(x))$，并且p(x)是f(x)的k(k>1)重因式的充要条件是p(x)是$(f(x),f'(x))$的 k-1重因式。

证　易知后一结论成立，前一结论自然成立。因此只须证明后一结论。

设$f(x)=p_1^{\alpha_1}(x)p_2^{\alpha_2}(x)\ldots p_k^{\alpha_k}(x)$为f(x)的标准分解式，

由定理1知$p_i^{\alpha_i-1}(x)\mid f'(x)$，$p_i^{\alpha_i}(x)$不整除f(x)。

由于$p_1^{\alpha_1-1}(x),p_2^{\alpha_2-1}(x),\ldots,p_k^{\alpha_k-1}(x)$互素。因此

$$f'(x)=p_1^{\alpha_1-1}(x)p_2^{\alpha_2-1}(x)\ldots p_k^{\alpha_k-1}(x)g(x)$$

其中个g(x)不再含因式$p_1(x),p_2(x),\ldots$，$p_k(x)$。于是$(f(x),f'(x))=p_1^{\alpha_1-1}(x)p_2^{\alpha_2-1}(x)\ldots p_k^{\alpha_k-1}(x)$

故结论成立。

说明 由推论2的证明可知，

(1) $f(x)$的重因式是$(f(x),f'(x))$的因式

(2) $f(x)/(f(x),f'(x))=p_1(x)p_2(x)\dots p_r(x)$是$f(x)$的全体不可约因式，因此求$f(x)$的不可解因式，可先将$f(x)/(f(x),f'(x))$求出并分解。

推论3　设$f(x)\in F[x]$，则 $f(x)$无重因式的充要条件是$(f'(x),f(x))=1$.

例1　分解多项式 $f(x)=x^4+x^3-3x^2-5x-1$.

解：$f'(x)=4x^3+3x^2-6x-5$用展转相除法，

求得$(f(x),f'(x))=(x+1)^2$. 因此$x+1$是$f(x)$的三重因式，于是$(x+1)^3|f(x)$.用$(x+1)^3$除$f(x)$得$x-2$，即$f(x)=(x+1)^3(x-2)$。

例2 设$f(x)=x^5-6x^4+16x^3-24x^2+20x-8$，求

一个多项式与f(x)有完全相同的不可解因

式，但无重因式。

解：由前面的说明知，只须求出

$f(x) / (f(x),f'(x))$。

由$f'(x)= 5x^4-24x^3+48x^2-48x+20$，

用辗转相除法,求得 $(f(x),f'(x))=x^2-2x+2$。

于是$f(x)/(f(x),f'(x))=x^3-4x^2+6x-4$.

复数域与实数域上多项式的因式分解

一、复数域上多项式的因式分解

代数基本定理　复数域C上次数大于零的多项式中有一复根。

代数基本定理的证明有很多方式,但在高等代范围内证明不可能,因为多少都需数学分析知识,最简单的证明是用复变函数的知识证明。

推论1　设 $f(x)\in C[x],\deg(f(x))>0$,则必 $\exists c\in C$ ，使得：$f(x)=(x-a)f_1(x)$ ，其中 $\deg(f(x))>0$.即复数域上的任何次数大于0的多项式都有一次因式。

于是由上述推论得:

定理1 复数域C上任意次数大于0的多项式都可以唯一分解成一次因式的乘积。

由上述定理 得:

推论2 复数域上的n（n>0）次多项式恰有n个复根（重根按重数计算）

说明：在一般的数域上面，上述定理一般是不成立的。