习 题 2-1

1．由 6 名选手参加乒乓球比赛，成绩如下：选手 1 胜选手 2、4、5、6 而负于选手 3；选手 2 胜选手 4、5、6 而负于选手 1、3；选手 3 胜选手 1、2、4 而负于选手 5、6；选手 4 胜选手 5、6 而负于选手 1、2、3；选手 5 胜选手 3、6 而负于选手 1、2、4；选手 6 胜选手 2 而负于选手 1、3、4、5．若胜一场得 1 分，负一场得 0 分，使用矩阵表示输赢状况，并排序．

解：$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc}1&2&3&4&5&6\end{array}\\ \begin{pmatrix}0&1&0&1&1&1\\0&0&0&1&1&1\\1&1&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$，选手按胜多负少排序为：$1,2,3,4,5,6$．

2．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3x-y\\2x+3&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2\\5&z-2\end{pmatrix}$，已知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，求 x,y,z．

解：由于 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 得 $\begin{cases}3x-y=2\\2x+3=5\\z-2=0\end{cases}$，解得：$\begin{cases}x=1\\y=1\\z=2\end{cases}$。

习 题 2-2

1．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}$ ，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&2\\0&4\end{pmatrix}$，求

（1）$2\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{B}$；（2）$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$；（3）$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$．

解：（1）$2\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{B}=2\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}-1&2\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2\\2&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5&10\\0&20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&-8\\2&-20\end{pmatrix}$；

（2）$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\0&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&2\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&8\\-1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-1\\4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&9\\-5&2\end{pmatrix}$；

（3）$\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2=\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&2\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&2\\2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&6\\0&16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-4\\2&-15\end{pmatrix}$．

2．已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&2&3&1\\0&3&-2&1\\4&0&3&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&3&2&-1\\5&-3&0&1\\1&2&-5&0\end{pmatrix}$，求 $3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$．

解：$3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}=3\begin{pmatrix}-1&2&3&1\\0&3&-2&1\\4&0&3&2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}4&3&2&-1\\5&-3&0&1\\1&2&-5&0\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}-3&6&9&3\\0&9&-6&3\\12&0&9&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8&6&4&-2\\10&-6&0&2\\2&4&-10&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11&0&5&5\\-10&15&-6&1\\10&-4&19&6\end{pmatrix}$$

3．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\2&1&2&1\\1&2&3&4\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&3&2&1\\-2&1&-2&1\\0&-1&0&-1\end{pmatrix}$，求

（1）$3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ ；　（2）$2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}$；

（3）若 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{X}$；

（4）若 $\boldsymbol{Y}$ 满足 $(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Y})+2(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{O}$，求 $\boldsymbol{Y}$．

解：（1）$3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=3\begin{pmatrix}1&2&1&2\\2&1&2&1\\1&2&3&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&3&2&1\\-2&1&-2&1\\0&-1&0&-1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}3&6&3&6\\6&3&6&3\\3&6&9&12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&3&2&1\\-2&1&-2&1\\0&-1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3&1&5\\8&2&8&2\\3&7&9&13\end{pmatrix};$$

（2）$2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}=2\begin{pmatrix}1&2&1&2\\2&1&2&1\\1&2&3&4\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}4&3&2&1\\-2&1&-2&1\\0&-1&0&-1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}2&4&2&4\\4&2&4&2\\2&4&6&8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}12&9&6&3\\-6&3&-6&3\\0&-3&0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&13&8&7\\-2&5&-2&5\\2&1&6&5\end{pmatrix};$$

（3）由 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ 得，

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\2&1&2&1\\1&2&3&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&3&2&1\\-2&1&-2&1\\0&-1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-1&-1&1\\4&0&4&0\\1&3&3&5\end{pmatrix};$$

（4）由 $(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Y})+2(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{O}$ 得，

$$\boldsymbol{Y}=\frac{2}{3}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}5&5&3&3\\0&2&0&2\\1&1&3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{10}{3}&\frac{10}{3}&2&2\\0&\frac{4}{3}&0&\frac{4}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&2&2\end{pmatrix}。$$

4．计算下列矩阵的乘积：

（1）$\begin{pmatrix}4&3&1\\1&-2&3\\5&7&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\times7+3\times2+1\times1\\1\times7+(-2)\times2+3\times1\\5\times7+7\times2+0\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}35\\6\\49\end{pmatrix}$；

（2）$\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=1\times3+2\times2+3\times1=10$；

（3）$\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}(-1\quad 2)=\begin{pmatrix}2\times(-1)&2\times2\\1\times(-1)&1\times2\\3\times(-1)&3\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&4\\-2&2\\-3&6\end{pmatrix}$；

（4）$\begin{pmatrix}2&1&4&0\\1&-1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&2\\0&-1&2\\1&-3&1\\4&0&-2\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} 2\times1+1\times0+4\times1+0\times4 & 2\times3+1\times(-1)+4\times(-3)+0\times0 & 2\times2+1\times2+4\times1+0\times(-2) \\ 1\times1+(-1)\times0+3\times1+4\times4 & 1\times3+(-1)\times(-1)+3\times(-3)+4\times0 & 1\times2+(-1)\times2+3\times1+4\times(-2) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 6 & -7 & 10 \\ 20 & -5 & -5 \end{pmatrix};$$

（5）$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3 & a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{32}x_3 & a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=(a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3)x_1+(a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{32}x_3)x_2+(a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3)x_3$$
$$=a_{11}x_1^2+(a_{12}+a_{21})x_1x_2+(a_{13}+a_{31})x_1x_3+a_{22}x_2^2+(a_{23}+a_{32})x_2x_3+a_{33}x_3^2。$$

（6）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$。

5．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^3$．

解：$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}$。

6．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$，

（1）求 $\boldsymbol{AB}$ 及 $\boldsymbol{AC}$；

（2）如果 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，是否必有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$？

（3）求 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$．

解：（1）$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$；

（2）由（1）知 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，而 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{C}$；

（3）$B^T A^T = (AB)^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$。

7．已知 $f(x) = x^2 - x - 1$，$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，求 $f(A)$.

解：$f(A) = A^2 - A - E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 13 & 3 & 5 \\ 14 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 4 \\ 11 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$。

8．举反例说明下列命题是错误的：

（1）若 $A^2 = O$，则 $A = O$；

（2）若 $A^2 = A$，则 $A = O$ 或 $A = E$；

（3）若 $AX = AY$，且 $A \neq O$，则 $X = Y$.

解：（1）举例若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$，而 $A^2 = 0$；

（2）举例若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$A^2 = A$ 而 $A \neq 0$ 且 $A \neq E$；

（3）举例若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$，$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$AX = AY$，且 $A \neq O$ 而 $X \neq Y$。

9．证明： 如果 $CA = AC, CB = BC$ ，则有

（1）$(A+B)C = C(A+B)$；（2）$(AB)C = C(AB)$.

证明：（1）$(A+B)C = AC + BC = CA + CB = C(A+B)$；

（2）$(AB)C = A(BC) = A(CB) = (AC)B = (CA)B = C(AB)$

10．设 A, B 均为 n 阶矩阵，证明下列命题是等价的：

（1）$AB = BA$；

（2）$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$；

（3）$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$；

（4）$(A+B)(A-B) = (A-B)(A+B) = A^2 - B^2$.

证明：（1）⇒（2）因为 $AB = BA$，所以 $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$；

（2）⇒（1）$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$，所以 $AB = BA$；

（1）⇒（3）因为 $AB = BA$，所以 $(A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2 = A^2 - 2AB + B^2$

（3）⇒（1）$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 = A^2 - AB - BA + B^2$，所以 $AB = BA$；

（1）⇒（4）因为 $AB = BA$，所以 $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2$

（4）⇒（1）$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2$，所以 $AB = BA$。

11．设 A 与 B 是两个 n 阶反对称矩阵，证明：当且仅当 $AB = -BA$ 时，AB 是反对称矩阵.

证明：先证当 $AB = -BA$ 时，AB 是反对称矩阵。

因为 $(AB)^T = B^T A^T = BA = -AB$，所以 AB 是反对称矩阵。

反之，若 $\boldsymbol{AB}$ 是反对称矩阵，即 $(\boldsymbol{AB})^T=-\boldsymbol{AB}$，则 $\boldsymbol{AB}=-(\boldsymbol{AB})^T=-\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T=-\boldsymbol{BA}$。

习　题　2-3

1．判别下列方阵是否可逆，若可逆，求它们的逆矩阵：

（1）$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$；　（2）$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$；　（3）$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & -5\end{pmatrix}$；

（4）$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 3\end{pmatrix}$；　（5）$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$；　（6）$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

解：（1）$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & 3\end{vmatrix}=7\neq 0$，故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在，$\boldsymbol{A}_{11}=3\quad \boldsymbol{A}_{21}=1\quad \boldsymbol{A}_{12}=-4\quad \boldsymbol{A}_{22}=1$

从而 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{7} & \frac{1}{7}\\ -\frac{4}{7} & \frac{1}{7}\end{pmatrix}$

（2）$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}=1\neq 0$，故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在，

$$\boldsymbol{A}_{11}=\cos\theta\quad \boldsymbol{A}_{21}=\sin\theta\quad \boldsymbol{A}_{12}=-\sin\theta\quad \boldsymbol{A}_{22}=\cos\theta$$

从而 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

（3）$\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & -5\end{vmatrix}=2\neq 0$，故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在，$\boldsymbol{A}_{11}=-5$，$\boldsymbol{A}_{12}=10$，$\boldsymbol{A}_{13}=7$，$\boldsymbol{A}_{21}=2$，$\boldsymbol{A}_{22}=-2$，

$\boldsymbol{A}_{23}=-52,\ \boldsymbol{A}_{31}=-1,\ \boldsymbol{A}_{32}=2,\ \boldsymbol{A}_{33}=1$

从而 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\\ 5 & -1 & 1\\ \frac{7}{2} & -1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

（4）$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 3\end{vmatrix}=2\neq 0$，故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在，$\boldsymbol{A}_{11}=2$，$\boldsymbol{A}_{12}=-3$，$\boldsymbol{A}_{13}=2$，$\boldsymbol{A}_{21}=6$，$\boldsymbol{A}_{22}=-6$，

$\boldsymbol{A}_{23}=2,\ \boldsymbol{A}_{31}=-4,\ \boldsymbol{A}_{32}=5,\ \boldsymbol{A}_{33}=-2$

从而 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2}\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$

（5）$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}=0$，故 A^{-1} 不存在。

（6）$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$，故 A^{-1} 存在，$A_{11}=1$, $A_{12}=0$, $A_{13}=0$, $A_{14}=0$, $A_{21}=-2$，

$$A_{22}=1, A_{23}=0, A_{24}=0, A_{31}=1$$

$$A_{32}=-2, A_{33}=1, A_{34}=0, A_{41}=0, A_{42}=1, A_{43}=-2, A_{44}=1$$

从而 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$。

2．设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$，求矩阵 X 使满足 $AXB=C$．

解：由 1 题中的（4）小题知 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2}\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$，又知 $B^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}$

所以

$$X=A^{-1}CB^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2}\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 10 & -4\\ -10 & 4\end{pmatrix}。$$

3．设 $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，解下列矩阵方程：

（1）$AX=B$；（2）$XA=B$；（3）$AXB=C$．

解：$A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，$B^{-1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}1 & 6\\ -2 & 4\end{pmatrix}$

（1）$AX=B\Rightarrow X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -23\\ 0 & 8\end{pmatrix}$

（2）$XA=B\Rightarrow X=BA^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & -32\\ 5 & -8\end{pmatrix}$

(3) $AXB=C\Rightarrow X=A^{-1}CB^{-1}=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&4\\2&1\end{pmatrix}\frac{1}{16}\begin{pmatrix}1&6\\-2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{15}{8}&-\frac{17}{4}\\ \frac{5}{8}&\frac{7}{4}\end{pmatrix}$

4．利用逆矩阵解下列线性方程组：

（1）$\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=4\\3x_1+4x_2-2x_3=11\\3x_1-2x_2+4x_3=11\end{cases}$；　　（2）$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=1\\2x_1+2x_2+5x_3=2\\3x_1+5x_2+x_3=3\end{cases}$.

解：（1）取 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\3&4&-2\\3&-2&4\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}4\\11\\11\end{pmatrix}$，则原方程组为 $AX=B$

$|A|=\begin{vmatrix}2&-1&-1\\3&4&-2\\3&-2&4\end{vmatrix}=60$，$A^{-1}=\frac{1}{60}\begin{pmatrix}12&6&6\\-18&11&1\\-18&1&11\end{pmatrix}$　$\therefore X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$，即 $\begin{cases}x_1=3\\x_2=1\\x_3=1\end{cases}$。

（2）取 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&5\\3&5&1\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，则原方程组为 $AX=B$

$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&5\\3&5&1\end{vmatrix}=15$，$A^{-1}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}-23&13&4\\13&-8&1\\4&1&-2\end{pmatrix}$　$\therefore X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，即 $\begin{cases}x_1=1\\x_2=0\\x_3=0\end{cases}$。

5．设 $A^k=O$（k 为正整数），证明 $(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$.

证明：因为 $(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})$

$=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}-(A+A^2+\cdots+A^{k-1}+A^k)=E$（由 $A^k=O$）

所以 $(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$。

6．设方阵 A 满足 $A^2-A-2E=O$，证明 A 和 $A+2E$ 都可逆，并求 A^{-1} 和 $(A+2E)^{-1}$.

证明：因为 $A^2-A-2E=O$ 可知 $A\cdot\frac{1}{2}(A-E)=E$，所以 A 可逆且 $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E)$；

又有 $A^2-A-2E=O$ 得 $(A+2E)\cdot\frac{1}{4}(3E-A)=E$，所以 $A+2E$ 可逆且

$(A+2E)^{-1}=\frac{1}{4}(3E-A)$。

7．设 $A=\begin{pmatrix}0&3&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$，$AB=A+2B$，求 B.

解：因为 $AB=A+2B$，所以 $(A-2E)B=A$，而 $A-2E=\begin{pmatrix}-2&3&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$，$|A-2E|=2$，

$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 3 & 3\\ -1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$，所以

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 3 & 3\\ -1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ -1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}。$$

8．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}, \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}$，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解：由于 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}$，有 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$

而 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 且 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=-1\neq 0$，可知 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆，所以 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$。

9．设 $\boldsymbol{A}^*$ 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，证明：

（1）若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$；

（2）若 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $|\boldsymbol{A}^*|=0$；

（3）$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$；

（4）若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $(\boldsymbol{A}^{-1})^*=(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$；

（5）若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*=(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}$.

证明：（1）$\because \boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，而 $\boldsymbol{A}$ 可逆，$\therefore \boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{-1}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$

（2）$|\boldsymbol{A}|=0$，当 $\boldsymbol{A}=0$，则 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$，$\therefore |\boldsymbol{A}^*|=0$

当 $\boldsymbol{A}\neq 0$，则由 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=0$，$\therefore \boldsymbol{A}=0$ 矛盾。$\therefore |\boldsymbol{A}^*|=0$

故当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，有 $|\boldsymbol{A}^*|=0$。

（3）若 $|\boldsymbol{A}|=0$ 由（2）知 $|\boldsymbol{A}^*|=0$ 此时命题也成立，故有 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$。

若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则由 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}\Rightarrow |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^*|=||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}|^n$，$\therefore |\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$

综上有 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$。

（4）$\because \boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，而 $\boldsymbol{A}$ 可逆，$\therefore (\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$

又 $\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}^{-1}|\boldsymbol{E}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{E}$，$\therefore (\boldsymbol{A}^{-1})^*=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$，即 $(\boldsymbol{A}^{-1})^*=(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$

（5）$\because \boldsymbol{A}$ 可逆，$\therefore \boldsymbol{A}^T$ 可逆

又 $\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}^T)^*=|\boldsymbol{A}^T|\boldsymbol{E}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，　　$\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}^*)^T=(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})^T=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E})^T=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$

即 $\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*=\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}$，　　$\therefore (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*=(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}$

10．设 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{E}$，

求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解：由 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{E}\Rightarrow\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{A}\Rightarrow\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$

$$\Rightarrow|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}+3|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}\Rightarrow(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*)\boldsymbol{B}=6\boldsymbol{E}$$

而 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}$，$\therefore\boldsymbol{B}=6(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{pmatrix}$。

11．设 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&-4\\1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{11}$.

解：$\because\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\Lambda$ 故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1}$，所以 $\boldsymbol{A}^{11}=\boldsymbol{P}\Lambda^{11}\boldsymbol{P}^{-1}$

而 $|\boldsymbol{P}|=3$，$\boldsymbol{P}^*=\begin{pmatrix}1&4\\-1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&4\\-1&-1\end{pmatrix}$，$\Lambda^{11}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}^{11}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2^{11}\end{pmatrix}$

故 $\boldsymbol{A}^{11}=\begin{pmatrix}-1&-4\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&2^{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{4}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+2^{13}&4+2^{13}\\-1-2^{11}&-4-2^{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2731&2732\\-683&-684\end{pmatrix}$

12．设 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-2\\1&-1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&5\end{pmatrix}$，

求 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^8(5\boldsymbol{E}-6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)$.

解：$\because|\boldsymbol{P}|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&-2\\1&-1&1\end{vmatrix}=-6$，$\boldsymbol{P}^*=\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\-3&0&3\\-1&2&-1\end{pmatrix}$，$\therefore\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{P}|}\boldsymbol{P}^*\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{6}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$

又 $\varphi(\Lambda)=\begin{pmatrix}\varphi(-1)&&\\&\varphi(1)&\\&&\varphi(5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

故 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}\varphi(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{6}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4&4\\4&4&4\\4&4&4\end{pmatrix}$。

13．设矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 及 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 都可逆，证明：

（1）$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 也可逆，并且 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$；

（2）$A(A+B)^{-1}B=B(A+B)^{-1}A$.

证明：（1）$\because (A^{-1}+B^{-1})(A(A+B)^{-1}B)=(E+B^{-1}A)(A+B)^{-1}B$

$=(B^{-1}B+B^{-1}A)(A+B)^{-1}B=B^{-1}(A+B)(A+B)^{-1}B=B^{-1}B=E$

$\therefore A^{-1}+B^{-1}$ 可逆且 $\left(A^{-1}+B^{-1}\right)^{-1}=A(A+B)^{-1}B$

（2）$\because B(A+B)^{-1}A(A^{-1}+B^{-1})=B(A+B)^{-1}(E+AB^{-1})B(A+B)^{-1}(BB^{-1}+AB^{-1})$

$=B(A+B)^{-1}(A+B)B^{-1}=BB^{-1}=E$

$\therefore (A^{-1}+B^{-1})^{-1}=B(A+B)^{-1}A$，又有（1）知 $\left(A^{-1}+B^{-1}\right)^{-1}=A(A+B)^{-1}B$

由逆矩阵的唯一性知，$A(A+B)^{-1}B=B(A+B)^{-1}A$ 。

习 题 2-4

1．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&1&2&4\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$ ，$B=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\2&0&0&0\\6&3&1&0\\0&-2&0&1\end{pmatrix}$，用分块矩阵计算：（1）$kA$；（2）$A+B$.

解：先对 A,B 进行分块 $A=\begin{pmatrix}E&A_1\\0&-E\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}B_1&0\\B_2&E\end{pmatrix}$，

其中 $A_1=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$，$B_1=\begin{pmatrix}1&2\\2&0\end{pmatrix}$，$B_2=\begin{pmatrix}6&3\\0&-2\end{pmatrix}$

（1）$kA=\begin{pmatrix}kE&kA_1\\0&-kE\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k&0&k&3k\\0&k&2k&4k\\0&0&-k&0\\0&0&0&-k\end{pmatrix}$；

（2）$A+B=\begin{pmatrix}E+B_1&A_1\\B_2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&1&3\\2&1&2&4\\6&3&0&0\\0&-2&0&0\end{pmatrix}$。

2．设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{pmatrix}$，求 AB .

解：先对 A,B 进行分块 $A=\begin{pmatrix}E&0\\A_1&E\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}B_1&E\\B_2&B_3\end{pmatrix}$，其中 $A_1=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}$，$B_1=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}$，$B_2=\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}$，$B_3=\begin{pmatrix}4&1\\2&0\end{pmatrix}$ 则 $AB=\begin{pmatrix}B_1&E\\A_1B_1+B_2&A_1+B_3\end{pmatrix}$，

而 $A_1B_1+B_2=\begin{pmatrix}-2&4\\-1&1\end{pmatrix}$，$A_1+B_3=\begin{pmatrix}3&3\\3&1\end{pmatrix}$，所以 $AB=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\-2&4&3&3\\-1&1&3&1\end{pmatrix}$。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/006122130051010104