高二 —人教A版—数学选择性必修第一册—第三章

求圆锥曲线的离心率

学习目标

1. 能理解椭圆与双曲线离心率的概念和相关性质，借助题目条件进行求值应用.

2. 通过问题的层层引入，总结出求离心率的方法.

3. 通过分析一般情况下求离心率的方法，形成认识事物规律要抓住一般性的科学思维.

基础知识回顾

	椭圆	双曲线
离心率 e	$e=\frac{c}{a}$	
a,b,c的关系式	$a^2=b^2+c^2$	$c^2=a^2+b^2$
e的取值范围	$e\in(0,1)$	$e\in(1,+\infty)$
e越大，曲线特征	越扁	张口越大

探究1：求圆锥曲线离心率的值

例1. 已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{5}=1$的右焦点为（3，0），则该双曲线的离心率是（ C ）

A. $\dfrac{3\sqrt{14}}{14}$　B. $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$　C. $\dfrac{3}{2}$　D. $\dfrac{4}{3}$

解:由题可知$c=3$，$b^2=5$,

所以$a^2=c^2-b^2=9-5=4$,

所以$a=2$，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{2}$

公式法:

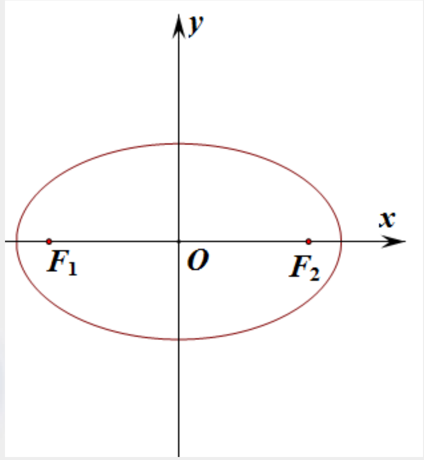
根据方程或条件直接求出a，c的值，再代入离心率公式计算。

练习1．椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{m}=1$的离心率为$\dfrac{1}{2}$，则$m=$________.

问：该椭圆中的a,c分别为多少？

练习1．椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{m}=1$的离心率为$\dfrac{1}{2}$，则$m=$ $\underline{3或\dfrac{16}{3}}$.

解:①当椭圆焦点在x轴上时，$4>m$

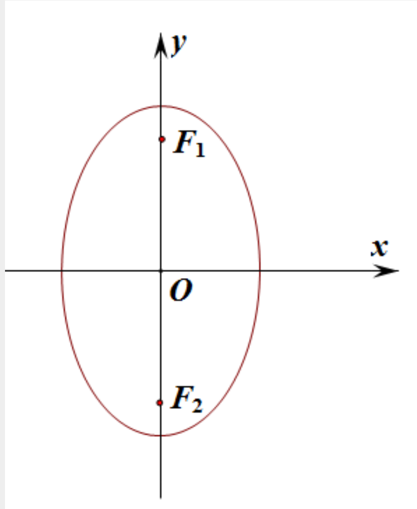


$a=2$，$c=\sqrt{4-m}$.

所以$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{4-m}}{2}=\dfrac{1}{2}$

所以$m=3$

②当椭圆焦点在y轴上时，$m>4$



$a=\sqrt{m}$，$c=\sqrt{m-4}$，

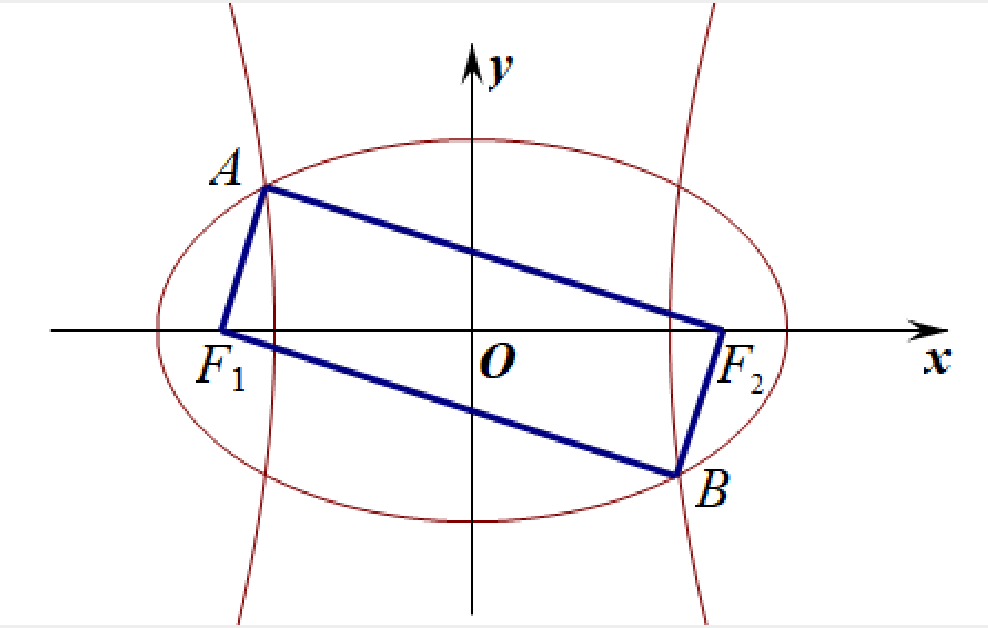
所以 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{m-4}}{\sqrt{m}}=\dfrac{1}{2}$

所以$m=\dfrac{16}{3}$

当焦点位置不确定时，要“先定位，再定量”

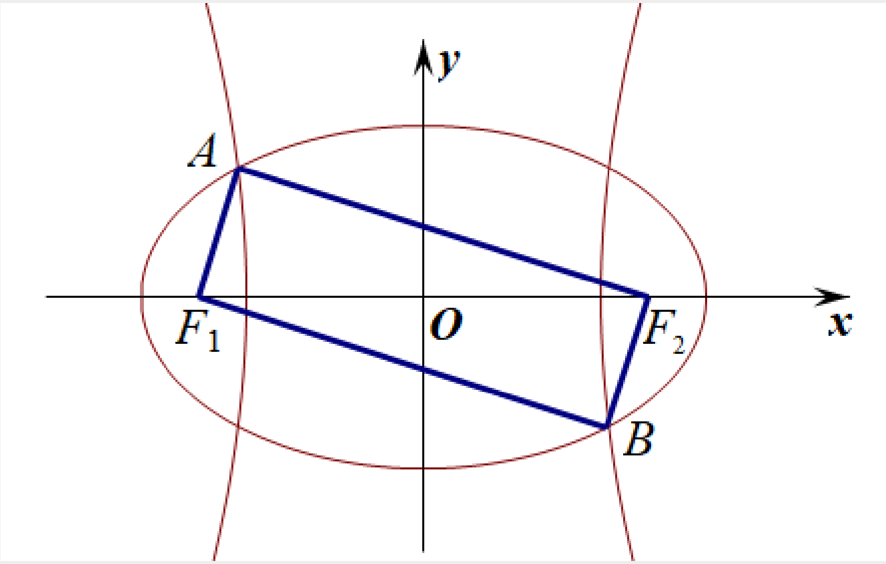
练习2．如图F_1, F_2是椭圆C_1：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$与双曲线C_2的公共焦点，A、B分别是C_1与C_2在第二、四象限的公共点，若四边形AF_1BF_2为矩形，则C_2的离心率是（　　）

A.$\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D.$\frac{\sqrt{6}}{2}$



分析：在椭圆中根据椭圆的定义及矩形的条件求出$|AF_1|$和$|AF_2|$，进而根据双曲线的定义求出$2a$.

练习2. 如图F_1, F_2是椭圆C_1: $\frac{x^2}{4}+y^2=1$与双曲线C_2的公共焦点，A、B分别是C_1与C_2在第二、四象限的公共点，若四边形AF_1BF_2为矩形，则C_2的离心率是（ D ）



A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

解: 在椭圆中$|AF_1|+|AF_2|=4$，

在Rt△AF_1F_2中满足$|AF_1|^2+|AF_2|^2=|F_1F_2|^2=12$，

联立解得$|AF_1|=2-\sqrt{2}$，$|AF_2|=2+\sqrt{2}$，

则在C_2中$2a=|AF_2|-|AF_1|=2\sqrt{2}$，又$c=\sqrt{3}$，所以$e=\frac{\sqrt{6}}{2}$

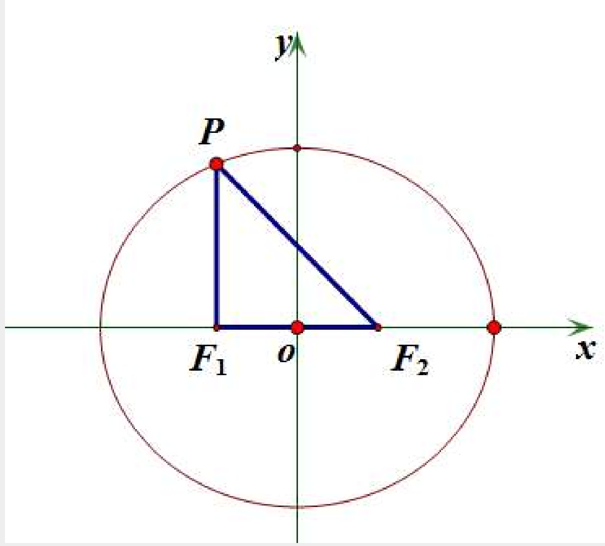
方法小结1：**公式法**

已知圆锥曲线的标准方程或a，c易求时，可利用离心率公式直接求值。

当焦点位置不确定时，需分类讨论，注意“先定位，再定量”。

例2．已知 F_1、F_2是椭圆的两个焦点，过 F_1 且与椭圆长轴垂直的直线交椭圆于点P，若$\triangle PF_1F_2$是等腰直角三角形，则该椭圆的离心率是（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　B. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$　C. $2-\sqrt{2}$　D. $\sqrt{2}-1$



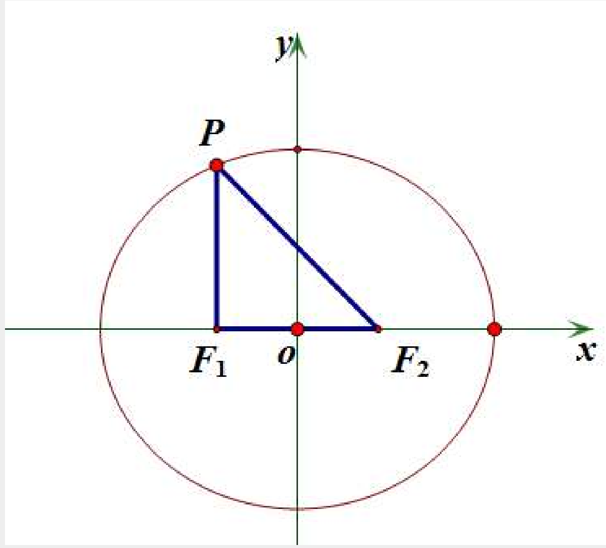
等腰直角三角形说明了什么？

等腰：$|PF_1| = |F_1F_2|$

直角：$|PF_1|$是通径的一半

例2．已知 F_1、F_2是椭圆的两个焦点，过 F_1 且与椭圆长轴垂直的直线交椭圆于点P ，若$\triangle PF_1F_2$是等腰直角三角形，则该椭圆的离心率是（ D）

A．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ B.$\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ C．$2-\sqrt{2}$ D．$\sqrt{2}-1$



解：由题可知$|PF_1|$是通径的一半，即$|PF_1|=\dfrac{b^2}{a}$，

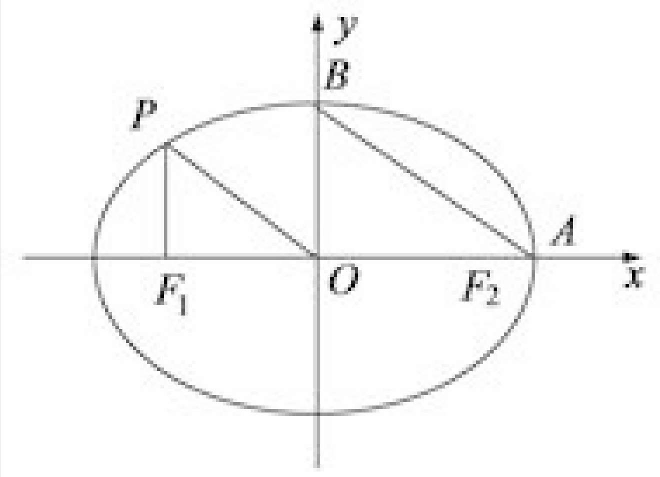
等腰直角$\triangle PF_1F_2$中$|PF_1|=|F_1F_2|$，所以$\dfrac{b^2}{a}=2c$，

转化为$a^2-c^2=2ac$，左右同时除以a^2，

化为$e^2+2e-1=0$，解得$e=\sqrt{2}-1$

练习3．从椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上一点 P向 x轴作垂线，垂足恰为左焦点 F_1，A是椭圆与 x轴正半轴的交点，B是椭圆与 y轴正半轴的交点，且 $AB//OP$（O是坐标原点），则该椭圆的离心率是（　）

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　**B.** $\dfrac{1}{2}$　**C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　**D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



问：$AB/\!/OP$说明了什么？

由$AB/\!/OP$可得$k_{AB}=k_{OP}$.