2024 年普通高等学校招生全国统一考试（新课标 II 卷）

数　学

养成良好的答题习惯，是决定成败的决定性因素之一。做题前，要认真阅读题目要求、题干和选项，并对答案内容作出合理预测;答题时，切忌跟着感觉走，最好按照题目序号来做，不会的或存在疑问的，要做好标记，要善于发现，找到题目的题眼所在，规范答题，书写工整;答题完毕时，要认真检查，查漏补缺，纠正错误。

本试卷共 10 页，19 小题，满分 150 分.

注意事项：

1.答题前，先将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.

2.选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

3.填空题和解答题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内.写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

4.考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交.

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的．请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.

1. 已知 $z=-1-\mathrm{i}$，则 $|z|=$（　　）

A. 0　　　　B. 1　　　　C. $\sqrt{2}$　　　　D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】由复数模的计算公式直接计算即可.

【详解】若 $z=-1-\mathrm{i}$，则 $|z|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

故选：C

2. 已知命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$|x+1|>1$；命题 q：$\exists x>0$，$x^3=x$，则（　　）

A. p 和 q 都是真命题　　　　B. $\neg p$ 和 q 都是真命题

C. p 和 $\neg q$ 都是真命题　　　　D. $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题

【答案】B

【解析】

【分析】对于两个命题而言，可分别取 $x=-1$、$x=1$，再结合命题及其否定的真假性相反即可得解.

【详解】对于 p 而言，取 $x=-1$，则有 $|x+1|=0<1$，故 p 是假命题，$\neg p$ 是真命题，

对于 q 而言，取 $x=1$，则有 $x^3=1^3=1=x$，故 q 是真命题，$\neg q$ 是假命题，

综上，$\neg p$ 和 q 都是真命题.

故选：B.

3. 已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1,|\vec{a}+2\vec{b}|=2$，且 $(\vec{b}-2\vec{a})\perp\vec{b}$，则 $|\vec{b}|=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 1

【答案】B

【解析】

【分析】由 $(\vec{b}-2\vec{a})\perp\vec{b}$ 得 $\vec{b}^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}$，结合 $|\vec{a}|=1,|\vec{a}+2\vec{b}|=2$，得 $1+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2=1+6\vec{b}^2=4$，由此即可得解.

【详解】因为 $(\vec{b}-2\vec{a})\perp\vec{b}$，所以 $(\vec{b}-2\vec{a})\cdot\vec{b}=0$，即 $\vec{b}^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}$，

又因为 $|\vec{a}|=1,|\vec{a}+2\vec{b}|=2$，

所以 $1+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2=1+6\vec{b}^2=4$，

从而 $|\vec{b}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故选：B.

4. 某农业研究部门在面积相等的 100 块稻田上种植一种新型水稻，得到各块稻田的亩产量（单位：kg）并部分整理下表

亩产量	[900，950）	[950，1000）	[1000，1050）	[1100，1150）	[1150，1200）
频数	6	12	18	24	10

据表中数据，结论中正确的是（　　）

A. 100 块稻田亩产量的中位数小于 1050kg

B. 100 块稻田中亩产量低于 1100kg 的稻田所占比例超过 80%

C. 100 块稻田亩产量的极差介于 200kg 至 300kg 之间

D. 100 块稻田亩产量的平均值介于 900kg 至 1000kg 之间

【答案】C

【解析】

【分析】计算出前三段频数即可判断 A；计算出低于 1100kg 的频数，再计算比例即可判断 B；根据极差计算方法即可判断 C；根据平均值计算公式即可判断 D.

【详解】对于 A, 根据频数分布表可知, $6+12+18=36<50$,

所以亩产量的中位数不小于 1050kg, 故 A 错误；

对于 B，亩产量不低于1100kg的频数为$24+10=34$，

所以低于1100kg的稻田占比为$\dfrac{100-34}{100}=66\%$，故 B 错误；

对于 C，稻田亩产量的极差最大为$1200-900=300$，最小为$1150-950=200$，故 C 正确；

对于 D，由频数分布表可得，亩产量在$[1050,1100)$的频数为$100-(6+12+18+24+10)=30$，

所以平均值为$\dfrac{1}{100}\times(6\times925+12\times975+18\times1025+30\times1075+24\times1125+10\times1175)=1067$，故 D 错误.

故选：C.

5. 已知曲线 C：$x^2+y^2=16$（$y>0$），从 C 上任意一点 P 向 x 轴作垂线段 PP'，P' 为垂足，则线段 PP' 的中点 M 的轨迹方程为（　　）

A. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$（$y>0$）

B. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{8}=1$（$y>0$）

C. $\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{x^2}{4}=1$（$y>0$）

D. $\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{x^2}{8}=1$（$y>0$）

【答案】A

【解析】

【分析】设点$M(x,y)$，由题意，根据中点的坐标表示可得$P(x,2y)$，代入圆的方程即可求解.

【详解】设点$M(x,y)$，则$P(x,y_0),P'(x,0)$，

因为M为PP'的中点，所以$y_0=2y$，即$P(x,2y)$，

又P在圆$x^2+y^2=16(y>0)$上，

所以 $x^2+4y^2=16(y>0)$，即 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1(y>0)$，

即点 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1(y>0)$.

故选：A

6. 设函数 $f(x)=a(x+1)^2-1$，$g(x)=\cos x+2ax$，当 $x\in(-1,1)$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 恰有一个交点，则 $a=$（　　）

A. -1　　　B. $\frac{1}{2}$　　　C. 1　　　D. 2

【答案】D

【解析】

【分析】解法一：令 $F(x)=ax^2+a-1, G(x)=\cos x$，分析可知曲线 $y=F(x)$ 与 $y=G(x)$ 恰有一个交点，结合偶函数的对称性可知该交点只能在 y 轴上，即可得 $a=2$，并代入检验即可；解法二：令 $h(x)=f(x)-g(x), x\in(-1,1)$，可知 $h(x)$ 为偶函数，根据偶函数的对称性可知 $h(x)$ 的零点只能为 0，即可得 $a=2$，并代入检验即可.

【详解】解法一：令 $f(x)=g(x)$，即 $a(x+1)^2-1=\cos x+2ax$，可得 $ax^2+a-1=\cos x$，

令 $F(x)=ax^2+a-1, G(x)=\cos x$，

原题意等价于当 $x\in(-1,1)$ 时，曲线 $y=F(x)$ 与 $y=G(x)$ 恰有一个交点，

注意到 $F(x), G(x)$ 均为偶函数，可知该交点只能在 y 轴上，

可得 $F(0)=G(0)$，即 $a-1=1$，解得 $a=2$，

若 $a=2$，令 $F(x)=G(x)$，可得 $2x^2+1-\cos x=0$

因为 $x\in(-1,1)$，则 $2x^2\geq 0, 1-\cos x\geq 0$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，

可得 $2x^2+1-\cos x\geq 0$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，

则方程 $2x^2+1-\cos x=0$ 有且仅有一个实根 0，即曲线 $y=F(x)$ 与 $y=G(x)$ 恰有一个交点，

所以 $a=2$ 符合题意；

综上所述：$a=2$.

解法二：令 $h(x)=f(x)-g(x)=ax^2+a-1-\cos x, x\in(-1,1)$，

原题意等价于 $h(x)$ 有且仅有一个零点，

因为$h(-x)=a(-x)^2+a-1-\cos(-x)=ax^2+a-1-\cos x=h(x)$，

则$h(x)$为偶函数，

根据偶函数的对称性可知$h(x)$的零点只能为0，

即$h(0)=a-2=0$，解得$a=2$，

若$a=2$，则$h(x)=2x^2+1-\cos x, x\in(-1,1)$，

又因为$2x^2\geq 0, 1-\cos x\geq 0$当且仅当$x=0$时，等号成立，

可得$h(x)\geq 0$，当且仅当$x=0$时，等号成立，

即$h(x)$有且仅有一个零点0，所以$a=2$符合题意；

故选：D.

7. 已知正三棱台$ABC-A_1B_1C_1$的体积为$\frac{52}{3}$，$AB=6$，$A_1B_1=2$，则A_1A与平面ABC所成角的正切值为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【答案】B

【解析】

【分析】解法一：根据台体的体积公式可得三棱台的高$h=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，做辅助线，结合正三棱台的结构特征求得$AM=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，进而根据线面夹角的定义分析求解；解法二：将正三棱台$ABC-A_1B_1C_1$补成正三棱锥$P-ABC$，A_1A与平面ABC所成角即为PA与平面ABC所成角，根据比例关系可得$V_{P-ABC}=18$，进而可求正三棱锥$P-ABC$的高，即可得结果.

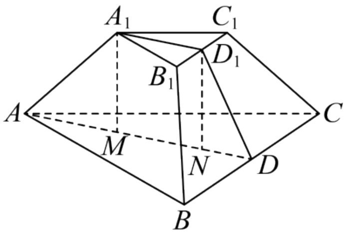
【详解】解法一：分别取BC, B_1C_1的中点D, D_1，则$AD=3\sqrt{3}, A_1D_1=\sqrt{3}$，

可知$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 6\times 6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}, S_{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$，

设正三棱台$ABC-A_1B_1C_1$的为h，

则$V_{ABC-A_1B_1C_1}=\frac{1}{3}\left(9\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{9\sqrt{3}\times\sqrt{3}}\right)h=\frac{52}{3}$，解得$h=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

如图，分别过 A_1,D_1 作底面垂线，垂足为 M,N，设 $AM=x$，



则 $AA_1=\sqrt{AM^2+A_1M^2}=\sqrt{x^2+\dfrac{16}{3}}$，$DN=AD-AM-MN=2\sqrt{3}-x$，

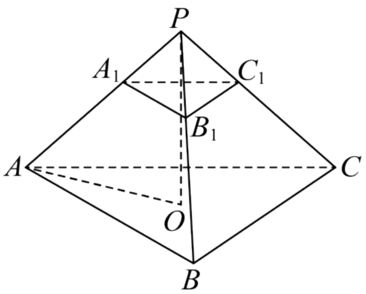
可得 $DD_1=\sqrt{DN^2+D_1N^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}-x\right)^2+\dfrac{16}{3}}$，

结合等腰梯形 BCC_1B_1 可得 $BB_1^2=\left(\dfrac{6-2}{2}\right)^2+DD_1^2$，

即 $x^2+\dfrac{16}{3}=\left(2\sqrt{3}-x\right)^2+\dfrac{16}{3}+4$，解得 $x=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，

所以 A_1A 与平面 ABC 所成角的正切值为 $\tan\angle A_1AD=\dfrac{A_1M}{AM}=1$；

解法二：将正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 补成正三棱锥 $P-ABC$，



则 A_1A 与平面 ABC 所成角即为 PA 与平面 ABC 所成角，

因为 $\dfrac{PA_1}{PA}=\dfrac{A_1B_1}{AB}=\dfrac{1}{3}$，则 $\dfrac{V_{P-A_1B_1C_1}}{V_{P-ABC}}=\dfrac{1}{27}$，

可知 $V_{ABC-A_1B_1C_1}=\dfrac{26}{27}V_{P-ABC}=\dfrac{52}{3}$，则 $V_{P-ABC}=18$，

设正三棱锥 $P-ABC$ 的高为 d，则 $V_{P-ABC}=\dfrac{1}{3}d\times\dfrac{1}{2}\times6\times6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=18$，解得 $d=2\sqrt{3}$，

取底面 ABC 的中心为 O，则 $PO\perp$ 底面 ABC，且 $AO=2\sqrt{3}$，

所以 PA 与平面 ABC 所成角的正切值 $\tan\angle PAO=\dfrac{PO}{AO}=1$.

故选：B.

8. 设函数 $f(x)=(x+a)\ln(x+b)$，若 $f(x)\geq 0$，则 a^2+b^2 的最小值为（　　）

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

【答案】C

【解析】

【分析】解法一：由题意可知：$f(x)$ 的定义域为 $(-b,+\infty)$，分类讨论 $-a$ 与 $-b,1-b$ 的大小关系，结合符号分析判断，即可得 $b=a+1$，代入可得最值；解法二：根据对数函数的性质分析 $\ln(x+b)$ 的符号，进而可得 $x+a$ 的符号，即可得 $b=a+1$，代入可得最值.

【详解】解法一：由题意可知：$f(x)$ 的定义域为 $(-b,+\infty)$，

令 $x+a=0$ 解得 $x=-a$；令 $\ln(x+b)=0$ 解得 $x=1-b$；

若 $-a\leq -b$，当 $x\in(-b,1-b)$ 时，可知 $x+a>0,\ln(x+b)<0$，

此时 $f(x)<0$，不合题意；

若 $-b<-a<1-b$，当 $x\in(-a,1-b)$ 时，可知 $x+a>0,\ln(x+b)<0$，

此时 $f(x)<0$，不合题意；

若 $-a=1-b$，当 $x\in(-b,1-b)$ 时，可知 $x+a<0,\ln(x+b)<0$，此时 $f(x)>0$；

当 $x\in[1-b,+\infty)$ 时，可知 $x+a\geq 0,\ln(x+b)\geq 0$，此时 $f(x)\geq 0$；

可知若 $-a=1-b$，符合题意；

若 $-a>1-b$，当 $x\in(1-b,-a)$ 时，可知 $x+a<0,\ln(x+b)>0$，

此时 $f(x)<0$，不合题意；

综上所述：$-a=1-b$，即 $b=a+1$，

则 $a^2+b^2=a^2+(a+1)^2=2\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}$，当且仅当 $a=-\frac{1}{2},b=\frac{1}{2}$ 时，等号成立，

所以 a^2+b^2 的最小值为 $\frac{1}{2}$；

解法二：由题意可知：$f(x)$ 的定义域为 $(-b,+\infty)$，

令 $x+a=0$ 解得 $x=-a$；令 $\ln(x+b)=0$ 解得 $x=1-b$；

则当$x\in(-b,1-b)$时，$\ln(x+b)<0$，故$x+a\le 0$，所以$1-b+a\le 0$；

$x\in(1-b,+\infty)$时，$\ln(x+b)>0$，故$x+a\ge 0$，所以$1-b+a\ge 0$；

故$1-b+a=0$， 则$a^2+b^2=a^2+(a+1)^2=2\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\ge\frac{1}{2}$，

当且仅当$a=-\frac{1}{2},b=\frac{1}{2}$时，等号成立，

所以a^2+b^2的最小值为$\frac{1}{2}$.

故选：C.

【点睛】关键点点睛：分别求$x+a=0$、$\ln(x+b)=0$的根，以根和函数定义域为临界，比较大小分类讨论，结合符号性分析判断.

二、多项选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对得 6 分，选对但不全的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 对于函数$f(x)=\sin 2x$和$g(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{4})$，下列正确的有（　　）

A. $f(x)$与$g(x)$有相同零点

B. $f(x)$与$g(x)$有相同最大值

C. $f(x)$与$g(x)$有相同的最小正周期

D. $f(x)$与$g(x)$的图像有相同的对称轴

【答案】BC

【解析】

【分析】根据正弦函数的零点，最值，周期公式，对称轴方程逐一分析每个选项即可.

【详解】A 选项，令$f(x)=\sin 2x=0$，解得$x=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，即为$f(x)$零点，

令$g(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{4})=0$，解得$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8},k\in\mathbf{Z}$，即为$g(x)$零点，

显然$f(x),g(x)$零点不同，A 选项错误；

B 选项，显然$f(x)_{\max}=g(x)_{\max}=1$，B 选项正确；

C 选项，根据周期公式，$f(x),g(x)$的周期均为$\frac{2\pi}{2}=\pi$，C 选项正确；

D 选项，根据正弦函数的性质$f(x)$的对称轴满足$2x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$，

$g(x)$的对称轴满足$2x-\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8},k\in\mathbf{Z}$，

显然$f(x),g(x)$图像的对称轴不同，D 选项错误.

故选：BC

10. 抛物线 C：$y^2=4x$ 的准线为 l，P 为 C 上的动点，过 P 作 $\odot A: x^2+(y-4)^2=1$ 的一条切线，Q 为切点，过 P 作 l 的垂线，垂足为 B，则（　　）

A. l 与 $\odot A$ 相切

B. 当 P，A，B 三点共线时，$|PQ|=\sqrt{15}$

C. 当 $|PB|=2$ 时，$PA\perp AB$

D. 满足 $|PA|=|PB|$ 的点 P 有且仅有 2 个

【答案】ABD

【解析】

【分析】A 选项，抛物线准线为 $x=-1$，根据圆心到准线的距离来判断；B 选项，P,A,B 三点共线时，先求出 P 的坐标，进而得出切线长；C 选项，根据 $|PB|=2$ 先算出 P 的坐标，然后验证 $k_{PA}k_{AB}=-1$ 是否成立；D 选项，根据抛物线的定义，$|PB|=|PF|$，于是问题转化成 $|PA|=|PF|$ 的 P 点的存在性问题，此时考察 AF 的中垂线和抛物线的交点个数即可，亦可直接设 P 点坐标进行求解.

【详解】A 选项，抛物线 $y^2=4x$ 的准线为 $x=-1$，

$\odot A$ 的圆心 $(0,4)$ 到直线 $x=-1$ 的距离显然是 1，等于圆的半径，

故准线 l 和 $\odot A$ 相切，A 选项正确；

B 选项，P,A,B 三点共线时，即 $PA\perp l$，则 P 的纵坐标 $y_P=4$，

由 $y_P^2=4x_P$，得到 $x_P=4$，故 $P(4,4)$，

此时切线长 $|PQ|=\sqrt{|PA|^2-r^2}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$，B 选项正确；

C 选项，当 $|PB|=2$ 时，$x_P=1$，此时 $y_P^2=4x_P=4$，故 $P(1,2)$ 或 $P(1,-2)$，

当 $P(1,2)$ 时，$A(0,4),B(-1,2)$，$k_{PA}=\dfrac{4-2}{0-1}=-2$，$k_{AB}=\dfrac{4-2}{0-(-1)}=2$，

不满足 $k_{PA}k_{AB}=-1$；

当 $P(1,-2)$ 时，$A(0,4),B(-1,2)$，$k_{PA}=\dfrac{4-(-2)}{0-1}=-6$，$k_{AB}=\dfrac{4-(-2)}{0-(-1)}=6$，

不满足 $k_{PA}k_{AB}=-1$；

于是 $PA\perp AB$ 不成立，C 选项错误；

D 选项，方法一：利用抛物线定义转化

根据抛物线的定义，$|PB|=|PF|$，这里 $F(1,0)$，

于是 $|PA|=|PB|$ 时 P 点的存在性问题转化成 $|PA|=|PF|$ 时 P 点的存在性问题，

$A(0,4),F(1,0)$，AF 中点 $\left(\frac{1}{2},2\right)$，$AF$ 中垂线的斜率为 $-\frac{1}{k_{AF}}=\frac{1}{4}$，

于是 AF 的中垂线方程为：$y=\frac{2x+15}{8}$，与抛物线 $y^2=4x$ 联立可得 $y^2-16y+30=0$，

$\Delta=16^2-4\times30=136>0$，即 AF 的中垂线和抛物线有两个交点，

即存在两个 P 点，使得 $|PA|=|PF|$，D 选项正确.

方法二：（设点直接求解）

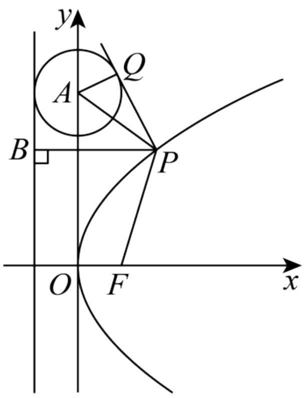
设 $P\left(\frac{t^2}{4},t\right)$，由 $PB\perp l$ 可得 $B(-1,t)$，又 $A(0,4)$，又 $|PA|=|PB|$，

根据两点间的距离公式，$\sqrt{\frac{t^4}{16}+(t-4)^2}=\frac{t^2}{4}+1$，整理得 $t^2-16t+30=0$，

$\Delta=16^2-4\times30=136>0$，则关于 t 的方程有两个解，

即存在两个这样的 P 点，D 选项正确.

故选：ABD



11. 设函数 $f(x)=2x^3-3ax^2+1$，则（　　）

A. 当 $a>1$ 时，$f(x)$ 有三个零点

B. 当 $a<0$ 时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

C. 存在 a，b，使得 $x=b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的对称轴

D. 存在 a，使得点 $(1,f(1))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的对称中心

【答案】AD

【解析】

【分析】A 选项，先分析出函数的极值点为 $x=0,x=a$，根据零点存在定理和极值的符号判断出 $f(x)$ 在 $(-1,0),(0,a),(a,2a)$ 上各有一个零点；B 选项，根据极值和导函数符号的关系进行分析；C 选项，假设存在这样的 a,b，使得 $\mathrm{x}=\mathrm{b}$ 为 $f(x)$ 的对称轴，则 $f(x)=f(2b-x)$ 为恒等式，据此计算判断；D 选项，若存在这样的 a，使得 $(1,3-3a)$ 为 $f(x)$ 的对称中心，则 $f(x)+f(2-x)=6-6a$，据此进行计算判断，亦可利用拐点结论直接求解.

【详解】A 选项，$f'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$，由于 $a>1$，

故 $x\in(-\infty,0)\cup(a,+\infty)$ 时 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0),(a,+\infty)$ 上单调递增，

$x\in(0,a)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取到极大值，在 $x=a$ 处取到极小值，

由 $f(0)=1>0$，$f(a)=1-a^3<0$，则 $f(0)f(a)<0$，

根据零点存在定理 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上有一个零点，

又 $f(-1)=-1-3a<0$，$f(2a)=4a^3+1>0$，则 $f(-1)f(0)<0,f(a)f(2a)<0$，

则 $f(x)$ 在 $(-1,0),(a,2a)$ 上各有一个零点，于是 $a>1$ 时，$f(x)$ 有三个零点，A 选项正确；

B 选项，$f'(x)=6x(x-a)$，$a<0$ 时，$x\in(a,0),f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

$x\in(0,+\infty)$ 时 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取到极小值，B 选项错误；

C 选项，假设存在这样的 a,b，使得 $\mathrm{x}=\mathrm{b}$ 为 $f(x)$ 的对称轴，

即存在这样的 a,b 使得 $f(x)=f(2b-x)$，

即 $2x^3-3ax^2+1=2(2b-x)^3-3a(2b-x)^2+1$，

根据二项式定理，等式右边 $(2b-x)^3$ 展开式含有 x^3 的项为 $2\mathrm{C}_3^3(2b)^0(-x)^3=-2x^3$，

于是等式左右两边 x^3 的系数都不相等，原等式不可能恒成立，

于是不存在这样的 a,b，使得 $\mathrm{x}=\mathrm{b}$ 为 $f(x)$ 的对称轴，C 选项错误；

D 选项，

方法一：利用对称中心的表达式化简

$f(1)=3-3a$，若存在这样的a，使得$(1,3-3a)$为$f(x)$的对称中心，

则$f(x)+f(2-x)=6-6a$，事实上，

$f(x)+f(2-x)=2x^3-3ax^2+1+2(2-x)^3-3a(2-x)^2+1=(12-6a)x^2+(12a-24)x+18-12a$，

于是$6-6a=(12-6a)x^2+(12a-24)x+18-12a$

即$\begin{cases}12-6a=0\\12a-24=0\\18-12a=6-6a\end{cases}$，解得$a=2$，即存在$a=2$使得$(1,f(1))$是$f(x)$的对称中心，D 选项正确.

方法二：直接利用拐点结论

任何三次函数都有对称中心，对称中心的横坐标是二阶导数的零点，

$f(x)=2x^3-3ax^2+1$，$f'(x)=6x^2-6ax$，$f''(x)=12x-6a$，

由$f''(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{a}{2}$，于是该三次函数的对称中心为$\left(\dfrac{a}{2},f\left(\dfrac{a}{2}\right)\right)$，

由题意$(1,f(1))$也是对称中心，故$\dfrac{a}{2}=1\Leftrightarrow a=2$，

即存在$a=2$使得$(1,f(1))$是$f(x)$的对称中心，D 选项正确.

故选：AD

【点睛】结论点睛：（1）$f(x)$的对称轴为$x=b\Leftrightarrow f(x)=f(2b-x)$；（2）$f(x)$关于$(a,b)$对称$\Leftrightarrow f(x)+f(2a-x)=2b$；（3）任何三次函数$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$都有对称中心，对称中心是三次函数的拐点，对称中心的横坐标是$f''(x)=0$的解，即$\left(-\dfrac{b}{3a},f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$是三次函数的对称中心

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$a_3+a_4=7$，$3a_2+a_5=5$，则$S_{10}=$________.

【答案】95

【解析】

【分析】利用等差数列通项公式得到方程组，解出a_1,d，再利用等差数列的求和公式节即可得到答案.

【详解】因为数列a_n为等差数列，则由题意得$\begin{cases}a_1+2d+a_1+3d=7\\3(a_1+d)+a_1+4d=5\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=-4\\d=3\end{cases}$，

则 $S_{10}=10a_1+\frac{10\times 9}{2}d=10\times(-4)+45\times 3=95$.

故答案为：95.

13. 已知 α 为第一象限角，β 为第三象限角，$\tan\alpha+\tan\beta=4$，$\tan\alpha\tan\beta=\sqrt{2}+1$，则 $\sin(\alpha+\beta)=$

________.

【答案】$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【解析】

【分析】法一：根据两角和与差的正切公式得 $\tan(\alpha+\beta)=-2\sqrt{2}$，再缩小 $\alpha+\beta$ 的范围，最后结合同角的平方和关系即可得到答案；法二：利用弦化切的方法即可得到答案.

【详解】法一：由题意得 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{4}{1-(\sqrt{2}+1)}=-2\sqrt{2}$，

因为 $\alpha\in\left(2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2}\right),\beta\in\left(2m\pi+\pi,2m\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$，$k,m\in Z$，

则 $\alpha+\beta\in\left((2m+2k)\pi+\pi,(2m+2k)\pi+2\pi\right)$，$k,m\in Z$，

又因为 $\tan(\alpha+\beta)=-2\sqrt{2}<0$，

则 $\alpha+\beta\in\left((2m+2k)\pi+\frac{3\pi}{2},(2m+2k)\pi+2\pi\right)$，$k,m\in Z$，则 $\sin(\alpha+\beta)<0$，

则 $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=-2\sqrt{2}$，联立 $\sin^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)=1$，解得 $\sin(\alpha+\beta)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

法二：因为 α 为第一象限角，β 为第三象限角，则 $\cos\alpha>0,\cos\beta<0$，

$\cos\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$，$\cos\beta=\frac{\cos\beta}{\sqrt{\sin^2\beta+\cos^2\beta}}=\frac{-1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}$，

则 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\cos\alpha\cos\beta(\tan\alpha+\tan\beta)$

$$=4\cos\alpha\cos\beta=\frac{-4}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}\sqrt{1+\tan^2\beta}}=\frac{-4}{\sqrt{(\tan\alpha+\tan\beta)^2+(\tan\alpha\tan\beta-1)^2}}=\frac{-4}{\sqrt{4^2+2}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

故答案为：$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

14. 在如图的 4×4 方格表中选 4 个方格，要求每行和每列均恰有一个方格被选中，则共有________