芜湖市重点中学 2022-2023 学年高三第二次月考数学试题

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（B）填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角"条形码粘贴处"。

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。

3．非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4．考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．设 $e\approx 2.71828\ldots$ 为自然对数的底数，函数 $f\left(x\right)=e^{x}-e^{-x}-1$，若 $f\left(a\right)=1$，则 $f\left(-a\right)=$（　　）

A． -1　　B． 1　　C． 3　　D． -3

2．已知 $\triangle ABC$ 是边长为 3 的正三角形，若 $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$

A． $-\frac{3}{2}$　　B． $\frac{15}{2}$

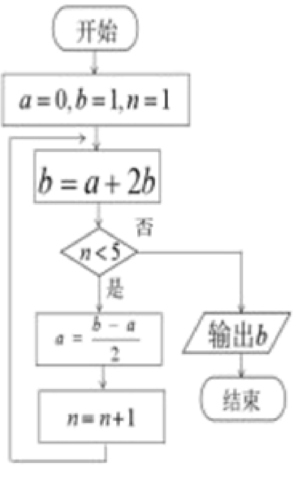
C． $\frac{3}{2}$　　D． $-\frac{15}{2}$

3．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}x, x>0\\ a\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x}, x\leq 0\end{cases}$，若关于 x 的方程 $f[f(x)]=0$ 有且只有一个实数根，则实数 a 的取值范围是（　　）

A． $(-\infty,0)\cup(0,1)$　　B． $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

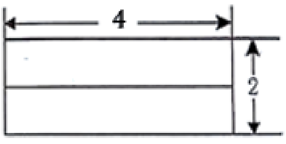
C． $(-\infty,0)$　　D． $(0,1)\cup(1,+\infty)$

4．执行程序框图，则输出的数值为（　　）



A． 12　　B． 29　　C． 70　　D． 169

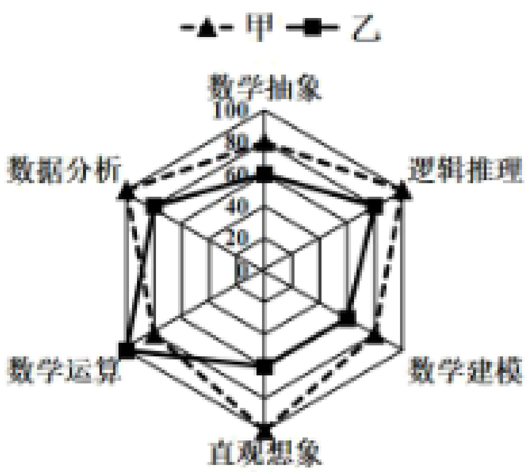
5．一个空间几何体的正视图是长为4，宽为$\sqrt{3}$的长方形，侧视图是边长为2的等边三角形，俯视图如图所示，则该几何体的体积为（　　）



俯视图

A．$\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　B．$4\sqrt{3}$　　C．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D．$2\sqrt{3}$

6．为比较甲、乙两名高中学生的数学素养，对课程标准中规定的数学六大素养进行指标测验（指标值满分为100分，分值高者为优），根据测验情况绘制了如图所示的六大素养指标雷达图，则下面叙述不正确的是（　　）



A．甲的数据分析素养优于乙　　B．乙的数据分析素养优于数学建模素养

C．甲的六大素养整体水平优于乙　　D．甲的六大素养中数学运算最强

7．若i为虚数单位，则复数$z=-\sin\frac{2\pi}{3}+i\cos\frac{2\pi}{3}$的共轭复数$\overline{z}$在复平面内对应的点位于（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

8．若函数$f\left(x\right)=-\ln x+x+h$，在区间$\left[\frac{1}{e},e\right]$上任取三个实数$a$，$b$，$c$均存在以$f\left(a\right)$，$f\left(b\right)$，$f\left(c\right)$为边长的三角形，则实数$h$的取值范围是（　　）

A．$\left(-1,\frac{1}{e}-1\right)$　　B．$\left(\frac{1}{e}-1,e-3\right)$　　C．$\left(\frac{1}{e}-1,+\infty\right)$　　D．$\left(e-3,+\infty\right)$

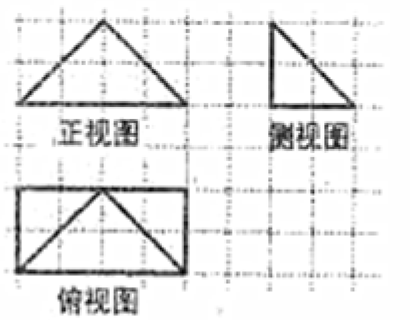
9．已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (a>0，b>0)的右焦点为F，若过点F且倾斜角为60°的直线l与双曲线的右支有且只有一个交点，则此双曲线的离心率e的取值范围是（　　）

A．$[2,+\infty)$　　　B．**(1,2),**　　　C．$(2,+\infty)$　　　D．$(1,2]$

10．若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线与直线 $6x-3y+1=0$ 垂直，则该双曲线的离心率为（　　）

A．2　　　B．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　　C．$\frac{\sqrt{10}}{2}$　　　D．$2\sqrt{3}$

11．如图，正方形网格纸中的实线图形是一个多面体的三视图，则该多面体各表面所在平面互相垂直的有（　　）



A．2 对　　　B．3 对

C．4 对　　　D．5 对

12．已知 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$，$\tan(\alpha-\pi)=-\frac{3}{4}$，则 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 等于（　　）．

A．$\pm\frac{1}{5}$　　　B．$-\frac{1}{5}$　　　C．$\frac{1}{5}$　　　D．$-\frac{7}{5}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_n=2(a_n+1)$，则满足 $S_n=-126$ 的正整数 n 的值为______．

14．已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 为 60°，在其内部取点 A，在半平面 α，β 内分别取点 B，C．若点 A 到棱 l 的距离为 1，则 ΔABC 的周长的最小值为_____．

15．函数 $f(x)=\sqrt{\log_2 x-2}$ 的定义域是________．

16．已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的渐近线与准线的一个交点坐标为 $(1,\sqrt{3})$，则双曲线的焦距为______．

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程是 $\begin{cases}x=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos\alpha,\\ y=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 是参数），以原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系．

（1）求曲线 C 的极坐标方程；

（2）在曲线 C 上取一点 M，直线 OM 绕原点 O 逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$，交曲线 C 于点 N，求 $|OM|\cdot|ON|$ 的最大值．

18．（12 分）在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos\alpha \\ y=\sin\alpha \end{cases}$（$\alpha$ 为参数），以原点 O 为极点，以 x 轴正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6})=2$．

（1）求曲线 C_1 的普通方程与曲线 C_2 的直角坐标方程；

（2）设 A,B 为曲线 C_1 上位于第一，二象限的两个动点，且 $\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}$，射线 OA,OB 交曲线 C_2 分别于 D,C，求 ΔAOB 面积的最小值，并求此时四边形 $ABCD$ 的面积．

19．（12 分）以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_1 的参数方程是 $\begin{cases} x=1+\sqrt{5-a}\cos\theta \\ y=2+\sqrt{5-a}\sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数，常数 $a<5$），曲线 C_2 的极坐标方程是 $\rho\sin^2\theta+4\sin\theta=\rho$．

（1）写出 C_1 的普通方程及 C_2 的直角坐标方程，并指出是什么曲线；

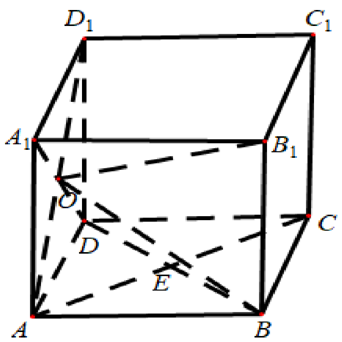
（2）若直线 l 与曲线 C_1，C_2 均相切且相切于同一点 P，求直线 l 的极坐标方程．

20．（12 分）已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）经过点 $(0,1)$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，A、B、C 为椭圆上不同的三点，且满足 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，$O$ 为坐标原点．

（1）若直线 AB、OC 的斜率都存在，求证：$k_{AB}\cdot k_{OC}$ 为定值；

（2）求 $|AB|$ 的取值范围．

21．（12 分）如图，在直棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形，$AB=BD=2$，$BB_1=2$，BD 与 AC 相交于点 E，A_1D 与 AD_1 相交于点 O．



（1）求证：$AC\perp$ 平面 BB_1D_1D；

（2）求直线 OB 与平面 OB_1D_1 所成的角的正弦值．

22．（10 分）已知函数 $f(x)=|x+a|+|2x-5|(a>0)$．

（1）当 $a=2$ 时，解不等式 $f(x)\ge 5$；

（2）当 $x\in[a,2a-2]$ 时，不等式 $f(x)\le|x+4|$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．**D**

【解析】

利用 $f\left(a\right)$ 与 $f\left(-a\right)$ 的关系，求得 $f\left(-a\right)$ 的值.

【详解】

依题意 $f\left(a\right)=e^{a}-e^{-a}-1=1,e^{a}-e^{-a}=2$，

所以 $f\left(-a\right)=e^{-a}-e^{a}-1=-\left(e^{a}-e^{-a}\right)-1=-2-1=-3$

故选：**D**

【点睛】

本小题主要考查函数值的计算，属于基础题.

2．**A**

【解析】

由 $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ 可得 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，因为 $\triangle ABC$ 是边长为 3 的正三角形，所以

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}^{2}=3\times3\cos120^{\circ}+\frac{1}{3}\times3^{2}=-\frac{3}{2}$，故选 **A**.

3．**B**

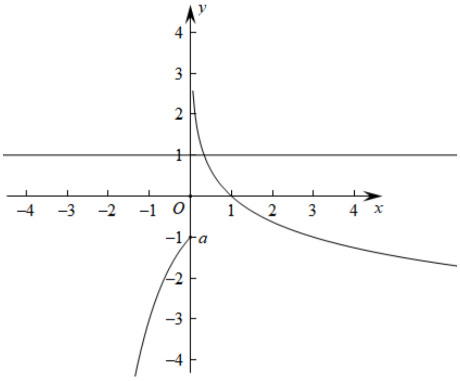
【解析】

利用换元法设 $t=f\left(x\right)$，则等价为 $f\left(t\right)=0$ 有且只有一个实数根，分 $a<0,a=0,a>0$ 三种情况进行讨论，结合函数的图象，求出 a 的取值范围.

【详解】

解：设$t=f\left(x\right)$，则$f\left(t\right)=0$有且只有一个实数根.

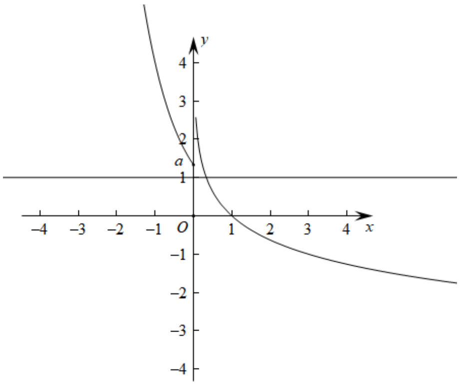
当$a<0$ 时，当$x\le 0$ 时，$f\left(x\right)=a\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}<0$，由$f\left(t\right)=0$即$\log_{\frac{1}{3}}t=0$，解得$t=1$，



结合图象可知，此时当$t=1$时，得$f\left(x\right)=1$，则$x=\dfrac{1}{3}$ 是唯一解，满足题意；

当$a=0$时，此时当$x\le 0$时，$f\left(x\right)=a\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}=0$，此时函数有无数个零点，不符合题意；

当$a>0$ 时，当$x\le 0$ 时，$f\left(x\right)=a\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}\in\left[a,+\infty\right)$，此时$f\left(x\right)$ 最小值为a，



结合图象可知，要使得关于x的方程$f[f(x)]=0$有且只有一个实数根，此时$a>1$.

综上所述：$a<0$ 或$a>1$.

故选:**A.**

【点睛】

本题考查了函数方程根的个数的应用.利用换元法，数形结合是解决本题的关键.

4．**C**

【解析】

由题知：该程序框图是利用循环结构计算并输出变量b的值，计算程序框图的运行结果即可得到答案.

【详解】

$a=0$，$b=1$，$n=1$，$b=0+2=2$，$n<5$，满足条件，

$a=\frac{2-0}{2}=1$，$n=2$，$b=1+4=5$，$n<5$，满足条件，

$a=\frac{5-1}{2}=2$，$n=3$，$b=2+10=12$，$n<5$，满足条件，

$a=\frac{12-2}{2}=5$，$n=4$，$b=5+24=29$，$n<5$，满足条件，

$a=\frac{29-5}{2}=12$，$n=5$，$b=12+58=70$，$n=5$，不满足条件，

输出$b=70$．

故选：C

【点睛】

本题主要考查程序框图中的循环结构，属于简单题.

5．B

【解析】

由三视图确定原几何体是正三棱柱，由此可求得体积．

【详解】

由题意原几何体是正三棱柱，$V=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}\times 4=4\sqrt{3}$．

故选：B．

【点睛】

本题考查三视图，考查棱柱的体积．解题关键是由三视图不愿出原几何体．

6．D

【解析】

根据所给的雷达图逐个选项分析即可.

【详解】

对于 A，甲的数据分析素养为 100 分，乙的数据分析素养为 80 分，

故甲的数据分析素养优于乙，故 A 正确；

对于 B，乙的数据分析素养为 80 分，数学建模素养为 60 分，

故乙的数据分析素养优于数学建模素养，故 B 正确；

对于 C，甲的六大素养整体水平平均得分为

$\frac{100+80+100+80+100+80}{6}=\frac{310}{3}$，

乙的六大素养整体水平均得分为$\frac{80+60+80+60+60+100}{6}=\frac{250}{3}$，故 C 正确；

对于 D，甲的六大素养中数学运算为 80 分，不是最强的，故 D 错误；

故选：D

【点睛】

本题考查了样本数据的特征、平均数的计算，考查了学生的数据处理能力，属于基础题.

7．B

【解析】

由共轭复数的定义得到$\overline{z}$，通过三角函数值的正负，以及复数的几何意义即得解

【详解】

由题意得$\overline{z}=-\sin\frac{2\pi}{3}-i\cos\frac{2\pi}{3}$，

因为$-\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$，$-\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}>0$，

所以$\overline{z}$在复平面内对应的点位于第二象限.

故选：B

【点睛】

本题考查了共轭复数的概念及复数的几何意义，考查了学生概念理解，数形结合，数学运算的能力，属于基础题.

8．D

【解析】

利用导数求得$f\left(x\right)$在区间$\left[\frac{1}{e},e\right]$上的最大值和最小，根据三角形两边的和大于第三边列不等式，由此求得h的取值范围.

【详解】

$f\left(x\right)$的定义域为$\left(0,+\infty\right)$，$f'\left(x\right)=-\frac{1}{x}+1=\frac{x-1}{x}$，

所以$f\left(x\right)$在$\left(\frac{1}{e},1\right)$上递减,在$\left(1,e\right)$上递增，$f\left(x\right)$在$x=1$处取得极小值也即是最小值，$f\left(1\right)=-\ln1+1+h=1+h$，

$f\left(\frac{1}{e}\right)=-\ln\frac{1}{e}+\frac{1}{e}+h=\frac{1}{e}+1+h$，$f\left(e\right)=-\ln e+e+h=e-1+h$，$f\left(\frac{1}{e}\right)<f\left(e\right)$，

所以$f\left(x\right)$在区间$\left[\frac{1}{e},e\right]$上的最大值为$f\left(e\right)=e-1+h$.

要使在区间$\left[\frac{1}{e},e\right]$上任取三个实数$a$，$b$，$c$均存在以$f\left(a\right)$，$f\left(b\right)$，$f\left(c\right)$为边长的三角形，

则需$f\left(a\right)+f\left(b\right)>f\left(c\right)$恒成立，且$f\left(1\right)>0$，

也即$\left[f(a)+f(b)\right]_{\min}>f(c)_{\max}$，也即当$a=b=1$、$c=e$时，$2f(1)>f(\mathrm{e})$成立，

即$2(1+h)>e-1+h$，且$f(1)>0$，解得$h>e-3$.所以h的取值范围是$(e-3,+\infty)$.

故选：**D**

【点睛】

本小题主要考查利用导数研究函数的最值，考查恒成立问题的求解，属于中档题.

9．A

【解析】

若过点F且倾斜角为$\frac{\pi}{3}$的直线与双曲线的右支有且只有一个交点，则该直线的斜率的绝对值小于等于渐近线的斜率．根据这个结论可以求出双曲线离心率的取值范围．

【详解】

已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为$F$，

若过点F且倾斜角为$\frac{\pi}{3}$的直线与双曲线的右支有且只有一个交点，

则该直线的斜率的绝对值小于等于渐近线的斜率$\frac{b}{a}$，

$\therefore \frac{b}{a}…\sqrt{3}$，离心率$e^2=\frac{a^2+b^2}{a^2}…4$，

$\therefore e…2$，

故选：A.

【点睛】

本题考查双曲线的性质及其应用，解题时要注意挖掘隐含条件．

10．B

【解析】

由题中垂直关系，可得渐近线的方程，结合$c^2=a^2+b^2$，构造齐次关系即得解

【详解】

双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一条渐近线与直线$6x-3y+1=0$垂直．

∴双曲线的渐近线方程为$y=\pm\frac{1}{2}x$.

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{1}{2}$，得$4b^2=a^2, c^2-a^2=\frac{1}{4}a^2$.

则离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.