学生面试问题

摘要

本文研究的学生面试问题，是在给定学生数量的前提下，按照每名学生的面试组由四名老师组成，且各个学生的面试组两两不完全相同的要求，研究需要的老师数量，并求出面试分组方案。为了保证面试的公平性，组织者还提出了四条要求，需要考虑除 Y2 外使其它三条要求尽量满足的分配方案。

第一问是已知学生数量为 N，求任意两个面试组最多只有一名老师相同的最小老师数量，我们将此问题转化成一个 0-1 规划模型，并设计了优化搜索方法，通过 MATLAB 编程实现了最少 M 的近似解。

在第二问的解决中，首先对 Y1-Y4 四个要求进行了分析，并分别建立了相应的量化指标，在此基础上，建立了一个多目标规划模型。针对学生数较多，模型求解运算量大的问题，特别设计了优化算法，减少了搜索中的运算量。同时，通过讨论均衡与公平性的含义，以分目标为基础，建立了综合评价目标，以此为指引，使搜索算法更具有针对性。计算结果表明，分配方案满足 Y1-Y4 的情况是非常好的。

第二问中还运用组合数学中区组设计的理论，论证了 N=379、M=24 时不存在完全满足均衡和公平要求的理想分配方案。

第三问中，将老师组分成文、理两类，首先修改了问题一中的相应模型和算法，给出了求解结果。在第二问中提出了启发式－混合交叉算法，从模拟结果看，分配方案比原第二问中的方案要差些，但总体上在各个指标上满足的情况也是较好的。

第四问首先分析了均匀性与面试公平性的关系，并提出了公平率的评价指标。为了解决学生与面试老师有特殊关系，及个别老师打分过于苛刻或宽松的问题，本文提出了规避的解决方法。

关键词：多目标规划算法评价指标

1.问题重述

某高校采用专家面试的方式进行自主招生录取工作。经过初选合格进入面试的考生有 N 人，拟聘请老师 M 人进行面试。每位学生要分别接受“面试组”的每一位老师的单独面试。每个面试组由 4 名老师组成。各位老师独立地对考生提问并根据其回答问题的情况给出评分。为了保证面试工作的公平性，组织者提出如下要求：

Y1：每位老师面试的学生数量应尽量均衡；

Y2：面试不同考生的“面试组”成员不能完全相同；

Y3：两个考生的“面试组”中有两位或三位老师相同的情形尽量的少；

Y4：任意两位老师面试的两个学生集合中出现相同学生的人数尽量少。

请回答如下问题：

问题一：设考生数 N 已知，要求在满足条件二的情况下，说明聘请老师数 M

至少分别应为多大，才能做到任两位学生的“面试组”都没有两位以及三位面试老师相同的情形。

问题二：请根据条件一至条件四的要求建立学生与面试老师之间合理的分配模型，并就 N＝379，M＝24 的情形给出每位老师面试学生名单的具体分配方案，并分析该方案满足条件一至条件四的情况。

问题三：假设面试老师中理科与文科的老师各占一半，并且要求每位学生接受两位文科与两位理科老师的面试，请在此假设下分别回答问题一与问题二。

问题四：请讨论考生与面试老师之间分配的均匀性和面试公平性的关系。为了保证面试的公平性，除了组织者提出的要求外，你们认为还有哪些重要因素需要考虑，试给出新的分配方案或建议。

2.模型假设

根据题意，可以进行如下假设：

1. 所有参加面试的考生在建模中不作区分，认为是完全一样的；
2. 所有面试老师也认为是没有差别，完全一样的；
3. 只考虑面试分组，不考虑时间安排。
4. 制定分派方案时，只考虑尽量使老师交叉混合，而不考虑学生的主观要求。

3.符号约定

M	老师总数
N	学生总数
N_2	遇到两位老师相同情况的学生人数
N_3	遇到三位老师相同情况的学生人数
$N_{敏}$	敏感学生的人数
$N_{亏}$	吃亏学生的人数

$N_{幸}$ 幸运学生的人数

x_{ij} 第 i 个学生如果分配给第 j 位老师面试则此值为 1，否则为 0

I_i 第 i 位老师面试的学生人数

I_{max} 单独一位老师面试学生人数的最大值

R 评价每位老师面试人数均匀性的指标

T 两位老师共同面试人数的最大值的最小值

η 公平率

$\overline{X}$ 所有老师之间相同的学生个数的均值

σ^2 所有老师之间相同的学生个数的方差

4.模型建立和分析

4.1 问题一

4.1.1 分析与建模

无论是最多只有一位老师相同还是两位老师相同，该问题的解决都可以看成满足一定的约束要求，使得在给定的学生数下，寻求最少的聘请老师数。因此，我们把问题抽象为一个规划模型来寻优。

（1）最多只有一位老师重复的情况

设 x_{ij} (x_{ij}为0,1变量)，取值为 1 时表示第 i 个学生分配给第 j 位老师面试，取值为 0 时表示第 i 个学生不分配给第 j 位老师面试，满足问题要求的约束首先是每个学生面试组的成员数为 4，并且使得任意两个学生的面试组最多只有一名老师重复。目标是使聘请老师数 M 最小，即

$$Min \quad M$$

$$\begin{cases} x_{ik}+x_{ij}+x_{is}+x_{il}=4 & \forall i=1,2,\cdots,N \\ x_{ik}+x_{ij}+x_{hk}+x_{hj}<4 & k,j,h,l=1,2,\cdots,M\text{且各不相同} \\ & \forall i,h=1,2,\cdots,N,i\neq h \\ x_{ij}=0\text{或}1 & \end{cases} \tag{4.1}$$

针对该模型，我们设计了寻优算法，采用 Matlab 编程实现。该算法的流程图如图 1 所示。

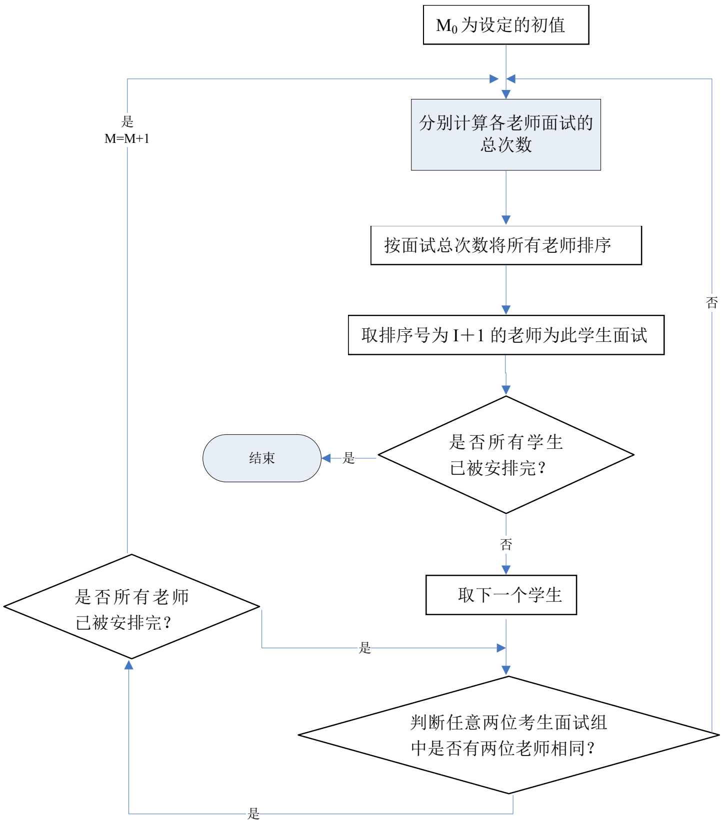


图 1 寻优算法流程图

表 1 列出了部分数值，图 2 是该数值的可视化。

表 1　任两位学生的“面试组”都没有两位老师相同时最少的老师数

学生人数	最少老师人数	学生人数	最少老师人数	学生人数	最少老师人数	学生人数	最少老师人数
1	4	6	11	16~1	16	24~2	20

				7		7	
2	7	7~9	12	18~1 9	17	28~3 0	21

3	9	10~13	13	20	18	31~32	22
4~5	10	14~15	15	21~23	19	33	23

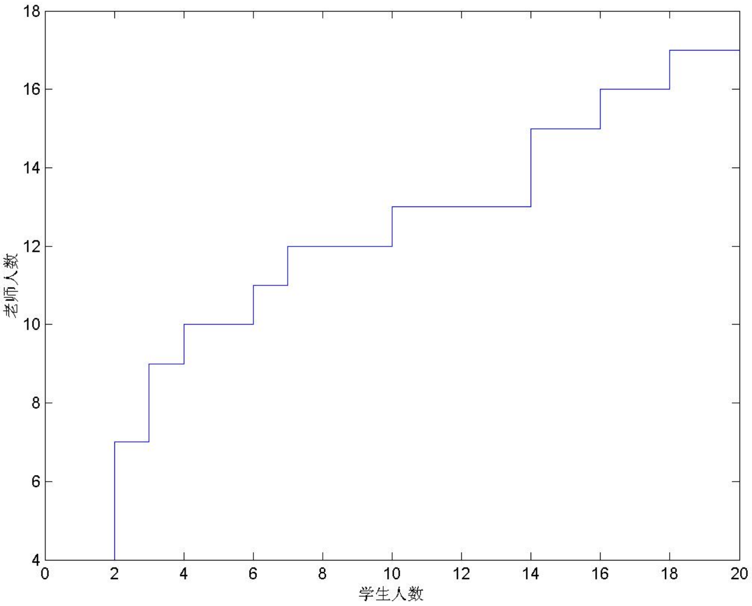


图 2 任两位学生的“面试组”都没有两位老师相同时最少的老师数

（2）最多只有两位老师重复的情况

同（1）中 x_{ij} 的含义相同，（4.1）式中第一个约束仍然不变，只是使得任意两个学生的面试组最多只有两名老师重复。

$$Min \quad M$$

$$\begin{cases} x_{ik}+x_{ij}+x_{is}+x_{il}=4 & \forall i=1,\cdots,N \\ x_{ik}+x_{ij}+x_{il}+x_{hk}+x_{hj}+x_{hl}<6 & \forall k,j,s,l=1,\cdots,M \text{且各不相同} \\ & \forall i,h=1,\cdots,N \\ x_{ij}=0\text{或}1 & \end{cases} \quad (4.2)$$

表 2 列出了部分数值，图 3 是数值的可视化。

表 2　任两位学生的“面试组”都没有三位老师相同时最少的老师数

学生人数	最少老师人数	学生人数	最少老师人数	学生人数	最少老师人数	学生人数	最少老师人数

1	4	20~26	11	141~143	17	310~358	23
2~3	6	27~41	12	144~165	18	359~404	24
4~7	7	42~55	13	166~195	19		
8~14	8	56~75	14	196~229	20		
15~18	9	76~105	15	230~263	21		
19	10	106~140	16	264~309	22		

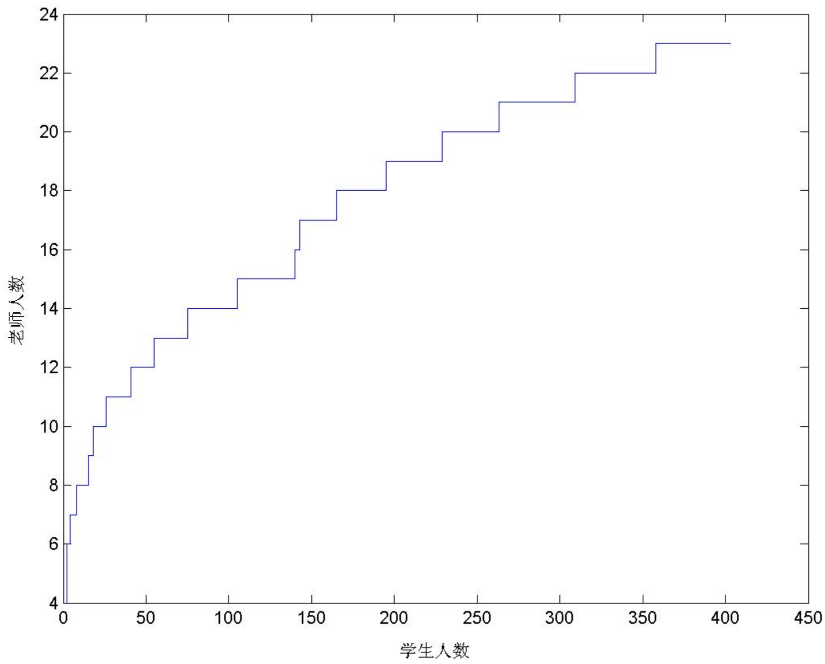


图 3 任两位学生的“面试组”都没有三位老师相同时最少的老师数

4.1.2 结果分析

从图 2、图 3 可以看出，随着学生人数增加，最少面试老师数是增多的；而且随着老师数增多，学生人数的变化率是加快的，这种趋势是比较符合直观经验的。但在图 3 数据中也发现有个别不满足这种情况的点。对于原因还未找到，有可能是算法精度的问题。并且每个最少面试老师数上，都有一个学生数的“持续期”。

4.2 问题二

4.2.1 理想的分派方案的存在性分析

这里我们认为理想的分派应当是同时严格满足题中四条要求的分派。通过对 Y1~Y4 的分析，我们发现这样的分配方案就是满足平衡不完全区组设计要求的某种构形。而具有(b,v,r,k,λ)-构形的平衡区组设计的必要条件如定理 1[1]：

定理 1　对于一个平衡不完全区组设计，有

$bk=vr$ 和 $r(k-1)=\lambda(v-1)$ （4.3）

当我们将学生与老师间的某个理想分派方案看成一个平衡区组设计结果，则学生数v、老师数b、任两位学生的"面试组"中相同的个数λ以及每位老师面试的学生人数k应该满足（4.3）。我们以学生数 379，老师数 24 进行检验，发现同时满足（4.3）式两个方程的整数k是不存在的。这就说明，并不是在任意给定的学生数和老师数下均存在满足 Y1~ Y4 的理想方案。通过以上分析可知，当$N=379, M=24$时，**同时严格满足四条标准的理想分派是不存在的。**基于上述分析，可知四条标准不能同时严格满足。那么，若仅以其中某一标准是否严格满足作为衡量成员交叉混合好坏的唯一依据， 可行吗？我们在论证绝对理想的分派是否存在的过程中发现：这四条标准间存在着某些内在的微妙的联系，仅以一条标准作为衡量依据，一味追求单一标准的严格满足，将会使其他标准的满足程度发生相应的改变，这种改变通常是向着不理想的方向发展的。因此，我们应该将四条标准综合考虑，寻找一种使它们都尽可能满足的规则。基于上述分析，我们设计了如下模型。

根据对题目中组织者提出的要求的分析，发现 Y2 这一要求实际上是对学生和老师分配模型作了强制性的限制，可以作为模型中的约束来考虑。而 Y1、Y3、Y4 条件体现了组织者对面试工作的均衡性和公平性的要求。而根据实际经验判断，均衡性和公平性往往是相互矛盾的两个方面，因此这个问题实际上是一个多目标规划问题。建立模型的关键首先需要通过对要求的理解，对每一个优化目标进行量化，同时还需要考虑各个目标对整个分配方案的作用关系。

4.2.2 对每一个评价标准的量化

(1)对于题目给出的条件 Y1

每位老师面试的人数完全均衡，是指分配方案中每位老师面试的人数完全相等。但是在多种目标的约束下，完全达到这个目标是很难的。因此尽量均衡，也就要尽量使每位老师面试人数与所有老师面试人数的最大值之比应接近 1。用一个量化的指标来表示，我们选取上述比值与 1 之差的平方和取得最小值，即

$$R=\mathrm{Min}\sum_{i=1}^{M}\left(\frac{I_i}{I_{\max}}-1\right)^2$$

(2)对于题目给出的条件 Y2

不同考生的"面试组"成员不能完全相同，这是必须满足的约束条件。对于那些不同学生的"面试组"的四位老师完全相同的情况，不符合此条件，可以直接排除在本题的思考范围之外，不进行考虑。

(3)对于题目给出的条件 Y3

用任意两位学生面试组中三位老师相同的组合数 N_3 与任意两名学生面试分配的总组合数 N 之比，来标准化有三位老师相同的情形;用任意两位学生面试组中两位老师相同的组合数 N_2 与任意两名学生面试分配的总组合数 N 之比，来标准化有两位老师相同的情形。可以采用两种方式来表达满足条件 Y3 的要求。一种是采用优先序的方法，另一种是采用两个指标加权和来综合两个方面。从公平性的角度来看，我们认为优先满足使三位老师相同的情况尽量少，在此基础上进一步要求两位老师相同的情况尽量少，更能体现公平性的原则。因此，在后面的具体方案计算中，为了分配搜索中的寻优，虽然采用两个指标的加权和，单是将满足三个指标时选的较大。

(4)对于题目给出的条件 Y4

虽然用任意两个老师共同面试的学生个数 t_{ij} 中的最大值可以反映 Y4 的要求，但考虑到即使相同的 $\max t_{ij}$ 值，对不同大小的学生总数，它反映公平性的程度是不一样的，因此，这里采用 t_{ij} 除以总学生数来反映 Y4 这一要求，并使该指标尽量小，即

$$T = \mathrm{Min}\left(\frac{\max_{i,j} t_{ij}}{N}\right)$$

4.2.3 建立多目标规划模型

对 4.2.1 提出的多个指标，应进行综合考虑。一种可行的方法是将几个指标按照不同的优先级进行排序。我们选用的优先序依次为 z_1， z_2， z_3， z_4，如下模型所示：

$$\text{分目标}\qquad \begin{array}{ll} z_1 & \min R=\sum_{i=1}^{M}\left(\frac{I_i}{I_{\max}}-1\right)^2 \\ z_2 & \min \frac{N_3}{N} \\ z_3 & \min \frac{N_2}{N} \\ z_4 & \min\left(\frac{\max t_{ij}}{N}\right) \end{array} \qquad (4.3)$$

$$\text{综合目标：}\begin{array}{l} z=\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_3 z_3+\lambda_4 z_4 \\ \lambda_1>\lambda_2>\lambda_3>\lambda_4 \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=1 \end{array}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_{ik}+x_{ij}+x_{is}+x_{il}=4 & \forall i=1,\cdots,N \\ & \forall k,j,s,l=1,\cdots,M\text{且各不相同} \\ x_{ij}=0\text{或}1 & \end{cases}$$

4.2.4 模型求解的算法

（1）模型的思路设计

由前文，绝对理想的分派是不存在的，仅仅追求单一标准严格满足的作法也是不可行的，那么，寻找一种使四条标准都尽可能满足的规则是当前的关键。

通常，人们在安排该学生面试时，总是根据前几次面试的安排情况来决定本次面试老师的分派。因此，我们从以下两个方面出发进行思路设计：

*　假设目前已安排了 $i-1$ 次面试，在安排第 i 次面试时，首先应该根据每个老师在前

$i-1$次面试中与学生见面次数由多到少的顺序，对老师进行排序。在制订分派计划时，应以此顺序对老师加以考虑。

因为，如果先安排那些同其他老师见面次数少的人，一旦他们进行面试学生后，再安排那些与学生见面次数较多的人时，就会出现无论这些人被分派到哪一组，都有可能同已见过多次面的老师分在同一组。为避免以上情况发生，我们应优先考虑分派那些同学生见面次数较多的人。

* 在老师的优先排序方案确定之后，就可以依次对各个老师的分派加以考虑了。假定前$i-1$个老师已被编入面试小组内，由于第i名老师面试不同的学生产生的效果是不同的，而效果的好坏又是以四条标准的满足程度来衡量的。因此，通过对不同面试四条标准满足程度的对比，可确定究竟将其面试哪一个学生。由于这四条标准对某个老师来说都是限制性的。如果我们希望以四条标准的综合满足程度来描述交叉混合好坏的话，则这种综合满足程度可看作是各约束条件的一个方面。于是我们可以通过比较各面试小组对第 i 名老师综合满足程度的大小来决定该组老师应去哪个学生的面试小组。对某个老师来说，他最终被编入的面试组必是对他综合满足程度最大的组。

（2）状态变量的定义

由于该模型在求解过程中，将某位老师编入哪一位学生面试组取决于前几次面试的安排情况，故模型求解的关键就在于如何存储和利用前几次面试的安排的的信息。在这里，我们定义“当前状态”为前几次面试的安排情况。主要包括以下几个方面。

 前几次面试的安排中，每位老师面试学生的个数。

它是确定面试老师优先排序准则及由见面熟引起的尽量满足目标为 Y1 的重要因素。I_i表示第 i 个老师几次面试学生的次数(i = 1,2,……,24)。

* 前几次面试的安排中，任意两面试老师之间的相同的学生次数。

它是确定面试老师面试那个学生的重要因素。程序中，通过数组$T_{ij}(1 \le j < i \le 24)$来存储。$T_{ij}$表示老师 i 与老师 j 在前几次面试中的相同的学生次数。

* 两个考生的“面试组”中有两位或三位老师相同的情形

判断方案优劣的一条标准。可以作为方案的备选标准。

（3）流程框图

图 4 是整个算法的框图, 它包括了对面试组的安排以及各种统计指标的计算输出。根据算法，我们用 MATLAB 7.0 编制了程序，见附件 **1.m，2.m。**

安排面试老师时应以各组人数尽量均衡性、公平性为主要原则。

(4)

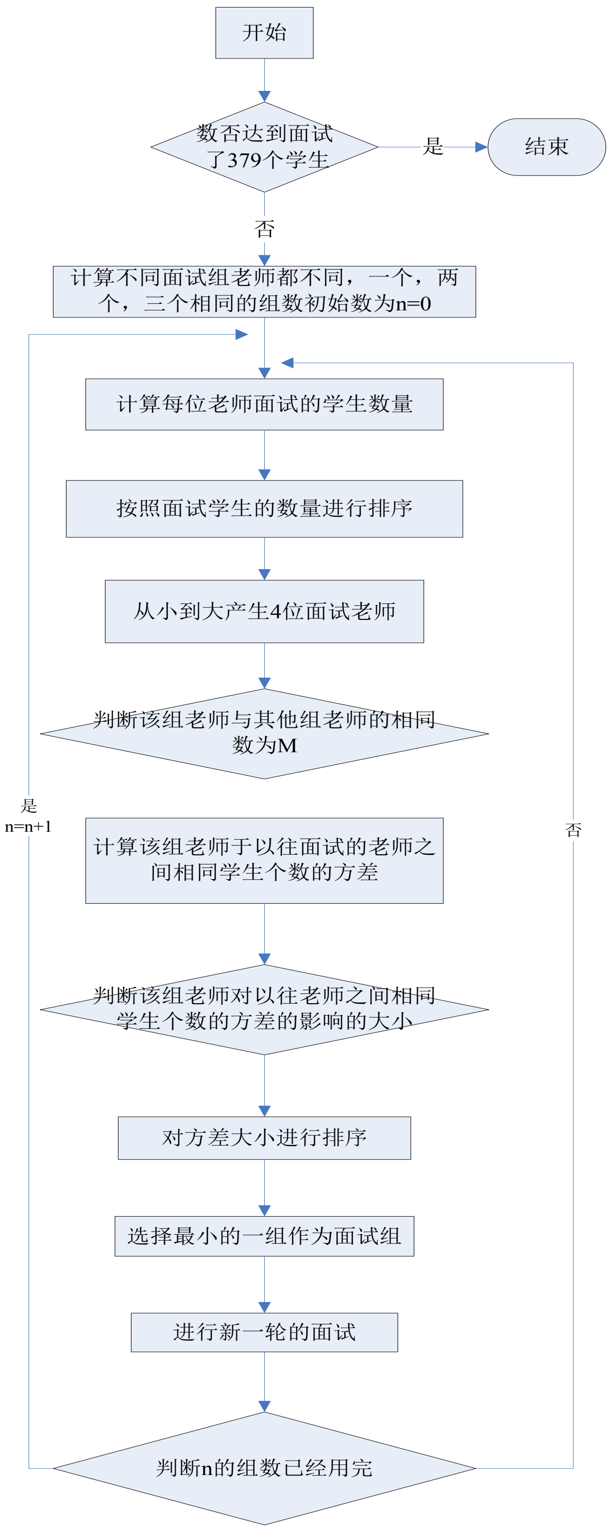


图 4 面试分组程序流程图

（4）算法步骤：

假设进行了第 i 个学生的面试，判断 i 是否达到要求，如果 i=379 则结束，否则继续判断；

 依次选择面试老师相同个数最少的排序进行选择，如果选择完毕，则任意两个学生面试老师相同个数增加 1；

 计算每位面试老师的面试学生数量，并按照由小到大的顺序进行优选选择排序，选择 4 位老师作为该学生的面试老师；

 计算所有老师之间相同学生次数的方差；作为进一步选择的依据；

 找到最佳的一组老师作为该学生的面试老师，直至满足所有面试要求结束；

4.2.5 模型结果

 Y1 满足的情况

每个老师的面试学生个数 $T_i(1 \le i \le 24)$ 如表 3 所示，图 5 为每个老师的面试学生个数的条形图。

表 3 每个老师的面试学生个数

老师序号	面试学生个数	老师序号	面试学生个数	老师序号	面试学生个数
1	63	9	63	17	63
2	63	10	63	18	63
3	63	11	63	19	63
4	63	12	63	20	63
5	63	13	68	21	64
6	63	14	64	22	63
7	63	15	64	23	64
8	63	16	63	24	63

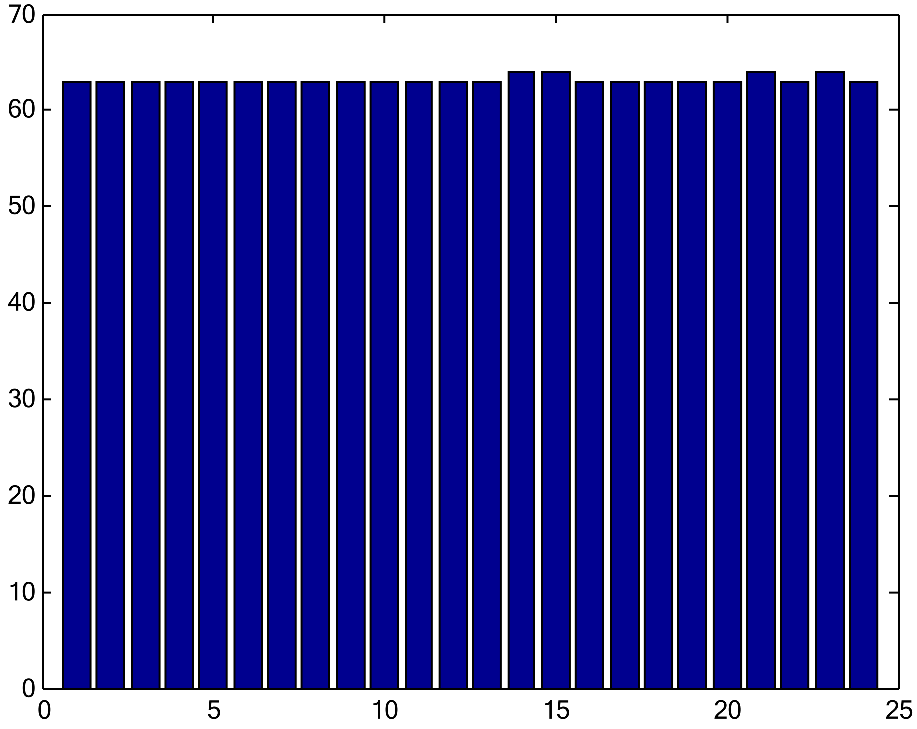


图 5 所有老师面试学生个数的统计图

□ Y2 满足的情况

两个考生的“面试组”中有零位、一位、两位、三位、四位老师相同的指标值如表 4 所示：

表 4 相同老师数量的个数的组数

相同老师数量的个数	t0	t1	t2	t3	t4
该组数的比值	0.464	0.415	0.120	0.001	0

可以看出该分配方案对满足没有三位老师相同的情况是非常好的，但对两位相同的情况有一定程度的不满足，但是从综合评价指标看还是比较优的。

□ Y4 满足的情况

任意两个老师之间相同的学生个数，为一个 23×24 的三角矩阵 $T_{ij}(1 \le j < i \le 24)$（见附录 1）。对 Y4 满足的评价指标值为 T=0.032。

可以看出 24 位老师面试的学生数是相当均匀的.

4.2.6 模型的结果分析

分配方案如下：$S_{ij}(1 \le i \le 379, 1 \le j \le 4)$ 为表示第 i 个学生的第 j 个面试老师。

（见附录 2）

（1）公共学生数的评估

从以上结果我们可以看出，最小公共学生数目为 7，最大数为 12，所以公共学生数是很小的，而且最大公共学生数为 12 的只有 1 组。可见公共学生数是令人满意的。

（2）公共老师数的评估

本模型最终结果中，虽然没能保证公共老师数没有，但从见面次数结果统计表来看，各老师之间的见面次数是比较合理的，没有出现两位老师、三位老师共同面试次数过多的情况。如表 4 所示。

（3）老师工作量

在对结果的分析中，我们发现，老师面试次数最大的为 64，最小的为 63，不同老师之间工作量最大之差不超过 1，所以老师工作量非常均衡的。

综上所述，该分配方案对 Y1-Y4 的满足情况是比较好的。

4.3 问题三

在对老师进行编组时，作如下规定：1-12 位文科老师，13-24 位理科老师；其余条件见以上模型。

4.3.1 对问题一的模型的重新修改

面试老师分成文、理两类后，模型与 4.1.1 问题一中最大的不同是要求一个学生的面试方案中必须包括两个文科老师和两个理科老师，故约束上需要修改。改进后的模型为

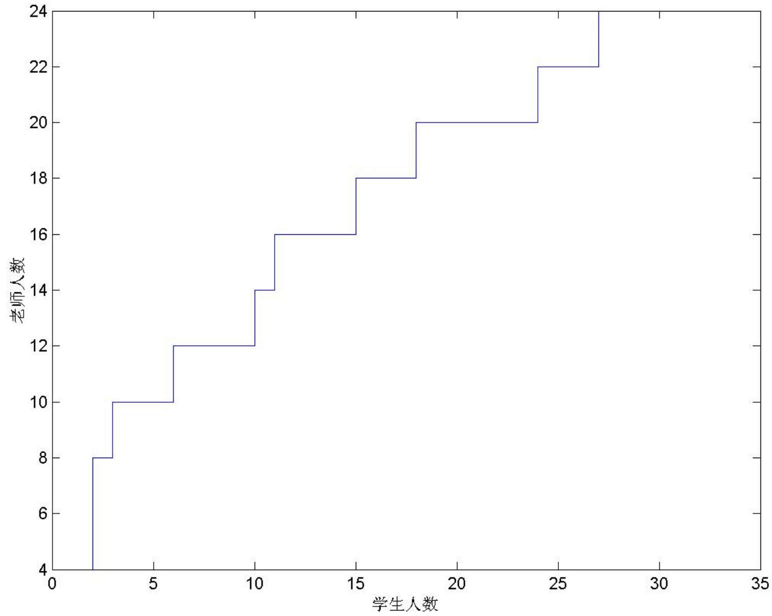
$$Min \quad M$$

$$\begin{cases} x_{ik}+x_{ij}+x_{is}+x_{il}=4 & \forall i=1,\cdots,N,(k,j\text{是文科老师}, s, l\text{ 是理科老师}) \\ x_{ik}+x_{ij}+x_{il}+x_{hk}+x_{hj}+x_{hl}<6 & \forall k,j,s,l=1,\cdots,M\text{且各不相同} \\ & \forall i,h=1,\cdots,N \\ x_{ij}=0\text{或}1 & \end{cases}$$

4.3.2 对问题一的模型的求解结果及分析

表 5 任两位学生的“面试组”都没有两位老师相同时最少的老师数

学生人数	最少老师人数	学生人数	最少老师人数	学生人数	最少老师人数
1	4	10	14	24~26	22
2	8	11~14	16	27~33	24
3~5	10	15~17	18		
6~9	12	18~23	20		



24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
老师人数
0
5
10
15
20
25
30
35
学生人数

图 6 任两位学生的"面试组"都没有两位老师相同时最少的老师

表 6 任两位学生的"面试组"都没有三位老师相同时最少的老师数

学生人数	最少老师人数	学生人数	最少老师人数	学生人数	最少老师人数
1	4	19~36	12	130~182	20
2~3	6	37~63	14	183~230	22
4~12	8	64~112	16	231~313	24
13~18	10	113~129	18		

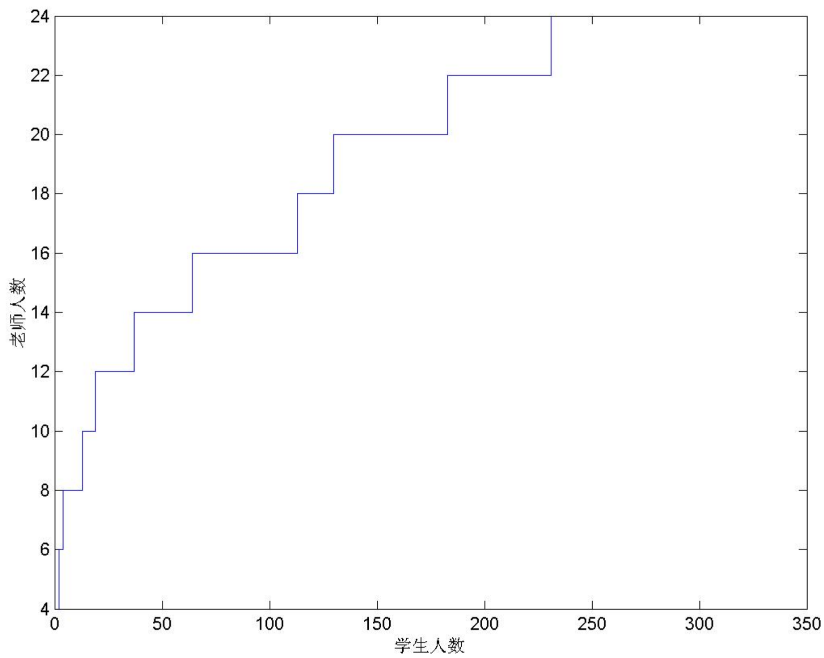


图 7 任两位学生的"面试组"都没有三位老师相同时最少的老师数

可以看出，求解结果具有与 4.1.2 类似的变化结论。

4.3.3 问题 3 的结果

两个考生的“面试组”中有零位、一位、两位、三位老师相同的数量$t_i(i=0,1,2,3,4)$

如表 7 所示。

表 7 相同老师数量的个数的组数

相同老师数量的个数	t0	t1	t2	t3	t4
该组数在总体中的比值	0.471	0.403	0.122	272	0.004

每个老师的面试学生个数$T_i(1 \le i \le 24)$如表 8 所示。

表 8 每个老师的面试学生个数

老师序号	面试学生个数	老师序号	面试学生个数	老师序号	面试学生个数
1	66	9	58	17	61
2	66	10	58	18	65
3	66	11	61	19	63
4	67	12	58	20	62
5	66	13	68	21	61
6	65	14	62	22	65
7	64	15	64	23	61
8	63	16	66	24	60

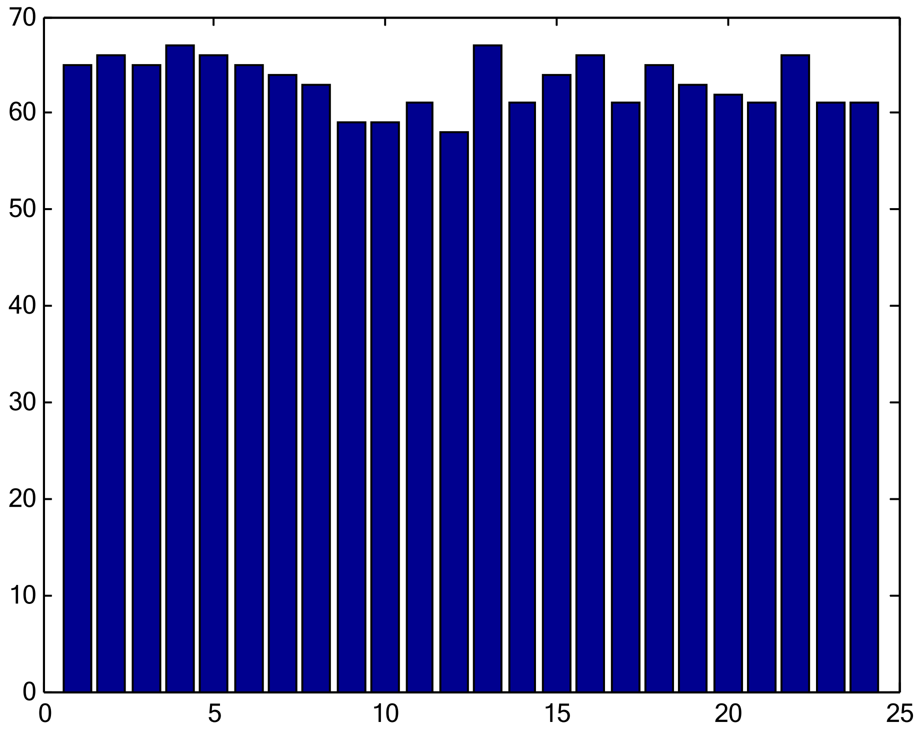


图 8 每位老师的面试学生个数条形图

任意两个老师之间相同的学生个数, 为一个 23×24 的三角矩阵 $T_{ij}(1\le j<i\le 24)$ 见附录 4。

面试分组方案如下：$S_{ij}(1\le i\le 379,1\le j\le 4)$ 为表示第 i 个学生的第 j 个面试老师。见附录 3。

4.3.4 模型的结果分析

（1）公共学生数的评估

从以上结果我们可以看出，最小公共学生数目为 4，最大数为 15，所以公共学生数是很小的，而且最大公共学生数为 15 的只有 3 组。可见公共学生数是令人满意的。

（2）公共老师数的评估

本模型最终结果中，虽然没能保证公共老师数没有

，但从见面次数结果统计表来看，各老师之间的见面次数是比较合理的，没有出现两位老师、三位老师共同面试次数过多的情况。如表 7 所示

（3）老师工作量

在对结果的分析中，我们发现，老师面试次数最大的为 67，最小的为 58，不同老师之间工作量最大之差不超过 9，所以老师工作量是比较均衡的。

4.4 问题四

4.4.1 假设与实际情况的偏差

上述的全部解题过程引用了这样两条隐含的假设：一是任何一位老师对任何一名学生都没有先入为主的较好或较差印象。二是每一位老师的打分习惯完全相同，没有特殊偏好。

但是实际上这两条假设并不成立。一是某位老师可能与某名学生有特殊关系，面试打分会受到影响。二是每一名老师在实际的打分过程中有自己的风格。对于大多数老师，面试打分一般会集中在某个不大的区间内。对于这些老师，可以称为标准型。可能有个别老师面试打分习惯性偏低或偏高，其打分值与大多数老师有显著差异。偏低的称为苛刻型老师，偏高的称为宽松型老师。苛刻型老师和宽松型老师属于个别情况，数量比较少，甚至不一定存在。

4.4.2 特殊关系对公平性的影响

当某位老师与某位学生有特殊关系的时候，面试打分可能会受到影响。为确保公平，应实行规避，不安排这位老师对这名学生进行面试。可以在已经生成的分组方案中进行一些局部的调整，把他与另外一名与他的“面试组”完全不同的学生对换即可。

4.4.3 老师打分偏好对公平性的影响

根据每一名老师以往参加面试的打分情况，设这多名老师当中第 i 名老师打分的期望值分别为 g_i。这次参加面试的某学生 A 的面试组成员为第 w,x,y,z 号老师。组织者和老师对学生 A 的情况一无所知。学生 A 的面试成绩的期望值为 $\frac{g_x+g_y+g_z+g_w}{4}$。如果这四位老师都属于标准型，则这次面试对学生 A 是公平的。如果这四位老师当中有两位是苛刻型，而没有一位是宽松型，则学生 A 在这次面试中吃亏。如果这四位老师当中有两位是宽松型，而没有一位是苛刻型，则学生 A 在这次面试中占便宜。如果不考虑老师打分的习惯，完全随机地进行分组，不可避免地会有一部分学生在面试中吃亏，同时也有一部分学生在面试中占便宜。如果能够科学合理地进行分组，把苛刻型老师和宽松型老师进行搭配分组，则会相对公平一些。如果完全随机地分布，虽然可以避免出现苛刻型老师过度聚集或宽松型老师过度聚集的情况，从而在一定程度上可以避免出现极度不公平现象，但是与此同时，完全随机分布也排除了苛刻型老师和宽松型老师搭配分组的合理方案，因此完全随机分组的公平性具有局限性。

合理的解决方法是在分组过程中对苛刻型老师和宽松型老师搭配分组。只有少数学生会遇到“面试组”内同时有两位苛刻型老师，或同时有两位宽松型老师的情况。对于这种比例较小的例外情况，可以使用规避的方法解决。即在计算过程中，分组的时候判断是否出现了上述情况。遇到苛刻型老师的时候，优先把他与宽松型老师安排在一起。遇到宽松型老师的时候，优先把他与苛刻型老师安排在一起。应尽量避免把两个苛刻型老师分配到同一个没有宽松型老师的小组内。对于已经生成的面试分组方案，要检测其公平性。对公平性不符合要求的，把吃亏或占便宜的学生的“面试组”进行一下局部的调整，将多余的苛刻型或宽松型老师置换出去，换回同样数量的标准型老师。这样，就可以大大减少面试过程中出现的不公平现象。

4.4.4 公平性的评价指标

如果参加面试的某位学生与参加面试的某位老师有特殊关系，则称之为敏感学生。敏感学生的总人数称为敏感人数，记为 $N_{敏}$。

参加面试的某位学生的“面试组”只要具有此特征：苛刻型老师人数-宽松型老师人数≥2，则称此学生为“吃亏学生”，“吃亏学生”的总人数记为 $N_{亏}$。

参加面试的某位学生的“面试组”只要具有此特征：宽松型

老师人数-苛刻型老师人数≥2，则称此学生为“幸运学生”，“幸运学生”的总人数记为 N 幸。

定义公平率$\eta = 1 - \frac{N_{敏} + N_{亏} + N_{幸}}{N}$

公平率η可以作为评价面试是否公平的指标

4.4.5 修正后的面试分组方案

在第二问的基础上，假设 1 号学生与 19 号老师有特殊关系，应实行规避。求新的面试分组方案。

由于附件 1 可以得知 1 号学生的面试组成员为第 2、6、19、23 号老师，13 号学生的面试组成员为第 3、7、20、24 号老师。两组完全不同，可以交换。交换之后，1 号学生的面试组成员为第 3、7、20、24 号老师，13 号学生的面试组成员为第 2、6、19、23 号老师。分组方案的其余部分保持不变。这样就避免了 1 号学生的面试组中有第 19 号老师的敏感情况。

5 模型的评价

由于本文建立的规划模型很难用解析方法求解，所以本文使用数值方法解题。该方法具有可操作性强的优点。

但是与此同时，数值方法应用于此题，也有不完美之处。例如：本文第一问建立的规划模型，试图用 Lingo 求解，但因运算量太大而没有实现，所以改用 Matlab 编程序求解。第一问的搜索算法，如果不经过优化，要进行$C_M^4!$次搜索。可见结构简单的数值算法有的时候会有运算量过大的问题。通过优化，减少运算量，是今后需要关注的一个问题。

参考文献

[1]卢开澄，组合数学[M].北京：清华大学出版社，1991，135~186。

[2]李南南等，MATLAB7 简明教程[M].北京：清华大学出版社，2006，85~170。

[3]编写组，数学手册[M].北京：高等教育出版社，1979，23~27。

[4]汪荣鑫，随机过程[M].西安：西安交通大学出版社，1987，235~257。

[5]周义仓，数学建模实验[M].西安：西安交通大学出版社，1999，126~142。

[6]姜启源，数学模型[M].北京：高等教育出版社，1987，82~129。

[7]金菊良等，基于组合权重的系统评价模型[J]，数学的实践与认识，2003，33（11），51~59。

[8]贾礼平等，人员公平分配的一个数学模型[J]，湖州师范学院学报，2005，27（4），6~8。

附录 1：第 2 问面试组分配方案

2	6	19	23
17	18	23	24
6	7	18	19
3	4	23	24
10	13	19	24
3	4	19	20
13	14	19	20
1	8	20	21
9	16	19	22
3	7	12	16
1	6	12	15
2	8	18	24
3	7	20	24
1	6	9	14
1	7	9	15
4	6	19	21
15	16	17	18
10	12	18	20
9	14	18	21
21	22	23	24
2	4	5	7
1	2	9	10
4	7	20	23
2	3	17	20
5	7	10	12
6	8	18	20
1	8	11	14
6	7	9	12
7	8	13	14
4	5	11	14
7	8	19	20
14	15	22	23
10	15	18	23
12	16	19	23
4	6	11	13
12	15	19	24

4	8	9	13
3	7	10	14
1	2	19	20
11	12	19	20
14	15	17	20
13	16	22	23
10	12	21	23
5	8	18	19
3	6	17	24
4	7	9	14
7	8	17	18
4	7	12	15
2	6	18	22
9	11	22	24
2	7	17	24
14	16	22	24
6	8	21	23
6	7	17	20
1	2	3	4
10	14	18	22
1	8	9	16
10	11	17	20
2	7	12	13
9	11	14	16
13	16	17	20
10	15	20	21
5	6	17	18
4	6	17	23
13	14	21	22
1	4	13	16
11	13	20	22
5	7	14	16
4	5	12	13
3	4	15	16
9	14	19	24
4	6	20	22
11	14	18	23
2	3	21	24