

专题 13 二次函数

【专题目录】

技巧 1: 二次函数的图像与系数的六种关系

技巧 2: 二次函数图像信息题的四种常见类型

技巧 3: 求二次函数表达式的常见类型

【题型】一、二次函数的图象及性质

【题型】二、二次函数的图象与系数之间的关系

【题型】三、二次函数的对称性

【题型】四、二次函数的最值

【题型】五、用待定系数法求二次函数解析式

【题型】六、二次函数平移问题

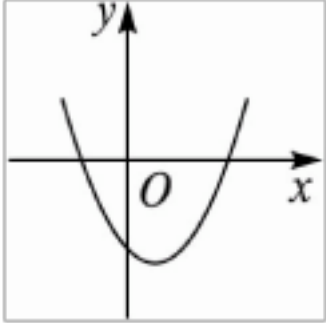
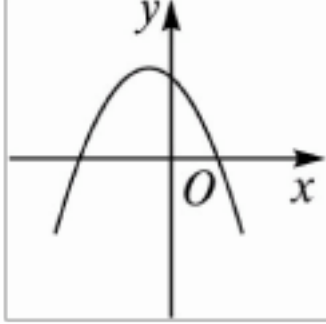
【题型】七、二次函数解决实际问题

【考纲要求】

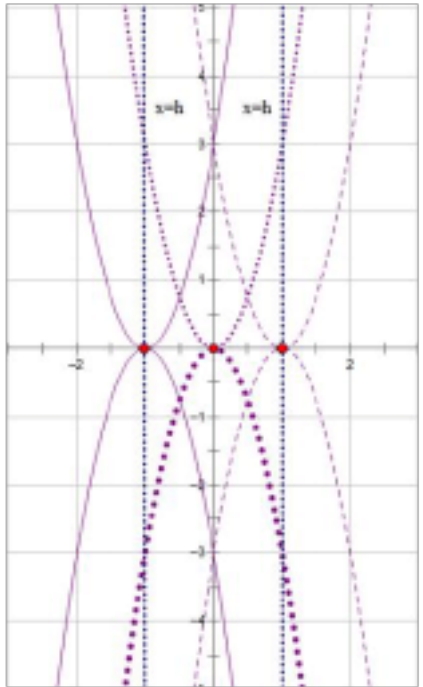
- 1、理解二次函数的有关概念，会用描点法画二次函数的图象，能从图象上认识二次函数的性质。
- 2、会根据公式确定图象的顶点、开口方向和对称轴，并能掌握二次函数图象的平移。
- 3、熟练掌握二次函数解析式的求法，并能用它解决有关的实际问题。

【考点总结】一、二次函数

二 次 函 数	二次函数的概念	一般地，如果 $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c 是常数， $a \neq 0$) 那么 y 叫做 x 的二次函数。 注意： (1)二次项系数 $a \neq 0$ (2) ax^2+bx+c 必须是整式； (3)一次项可以为零，常数项也可以为零，一次项和常数项可以同时为零； (4)自变量 x 的取值范围是全体实数。
	二次函数的图象及性质	二次函数 $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c 为常数， $a \neq 0$)

		 $(a > 0)$	 $(a < 0)$
	开口方向	开口向上	开口向下
	对称轴	直线 $x = -\frac{b}{2a}$	直线 $x = -\frac{b}{2a}$
	顶点坐标	$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$	$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$
	增减性	当 $x < -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而减小; 当 $x > -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而增大	当 $x < -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而增大; 当 $x > -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而减小
	最值	当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时, y 有最小值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$	当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时, y 有最大值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$

【考点总结】二、二次函数 $y = a(x-h)^2$ 的性质

<p>1、抛物线 $y = a(x-h)^2$ 的顶点式 $(h, 0)$, 对称轴是平行于 y 轴的直线 $x = h$。</p>	
<p>2、当 $a > 0$ 时, 抛物线 $y = a(x-h)^2$ 在 x 轴的上方 (除顶点外), 它的开口向上, 并且向上无限伸展;</p> <p>当 $a < 0$ 时, 抛物线 $y = a(x-h)^2$ 在 x 轴的下方 (除顶点外), 它的开口向下, 并且向下无限伸展。</p>	
<p>3、当 $a > 0$ 时, 在对称轴 ($x = h$) 的左侧, y 随着 x 的增大而减小; 在对称轴 ($x = h$) 的右侧, y 随着 x 的增大而增大; 当 $x = h$ 时, 函数 y 的值最小 (是 0);</p> <p>当 $a < 0$ 时, 在对称轴 ($x = h$) 的左侧, y 随着 x 的增大而增大; 在对称轴 ($x = h$) 的右侧, y 随着 x 的增大而减小; 当 $x = h$ 时, 函数 y 的值最大 (是 0)。</p>	
<p>4、二次函数 $y = a(x-h)^2$ 与 $y = ax^2$ 的图像形状相同, 可以看作是抛物线 $y = ax^2$ 整体沿 x 轴平移了 h 个单位 (当 $h > 0$ 时, 向右平移 h 个单位; 当 $h < 0$</p>	

时，向左平移 $|h|$ 个单位)得到的。

【考点总结】三、二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 与 $y = ax^2$ 的关系

二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 与 $y = ax^2$ 的关系

① 一般地，由 $y = ax^2$ 的图像便可得到二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 的图像： $y = a(x-h)^2 + k$ ($a > 0$) 的图像可以看成 $y = ax^2$ 先沿 x 轴整体左(右)平移了 $|h|$ 个单位(当 $h > 0$ 时，向右平移 $|h|$ 个单位；当 $h < 0$ 时，向左平移 $|h|$ 个单位)，再沿 y 轴整体上(下)平移了 $|k|$ 个单位(当 $k > 0$ 时，向上平移 $|k|$ 个单位；当 $k < 0$ 时，向下平移 $|k|$ 个单位)。

② 因此，二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 的图像是一条抛物线，它的开口方向、对称轴和顶点坐标与 a, h, k 的值有关

二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 的图像与性质

抛物线	$y = a(x-h)^2 + k$ ($a > 0$)	$y = a(x-h)^2 + k$ ($a < 0$)
顶点坐标	h, k	h, k
对称轴	直线 $x = h$	直线 $x = h$
位置	由 h 和 k 的符号确定	由 h 和 k 的符号确定
开口方向	向上	向下
增减性	在对称轴的左侧， y 随着 x 的增大而减小； 在对称轴的右侧， y 随着 x 的增大而增大。	在对称轴的左侧， y 随着 x 的增大而增大； 在对称轴的右侧， y 随着 x 的增大而减小。
最值	当 $x = h$ 时，最小值为 k	当 $x = h$ 时，最大值为 k
开口大小	$ a $ 越大,开口越小, $ a $ 越小,开口越大。	

【注意】

二次函数 $ax^2+bx+c=0$

① a 决定开口方向及开口大小, 这与 $y=ax^2$ 中的 a 完全一样.

$a>0$ 时, 抛物线开口向上; $a<0$ 时, 抛物线开口向下; a 的绝对值越大, 开口越小.

② b 和 a 共同决定抛物线对称轴的位置. 由于抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴是直线 $x = -\frac{b}{2a}$, 故:

A. $b=0$ 时, 对称轴为 y 轴; B. $x = -\frac{b}{2a} > 0$ (即 a, b 同号) 时, 对称轴在 y 轴左侧; C. $x = -\frac{b}{2a} < 0$ (即 a, b

异号) 时, 对称轴在 y 轴右侧. (口诀: “左同右异”)

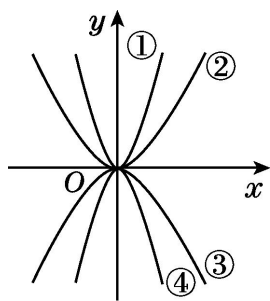
【技巧归纳】

技巧 1: 二次函数的图像与系数的六种关系

【类型】一、 a 与图像的关系

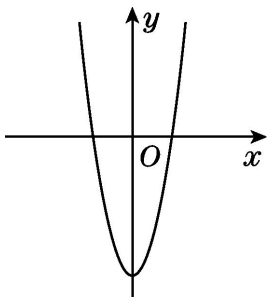
1. 如图, 四个函数的图像分别对应的是① $y=ax^2$; ② $y=bx^2$; ③ $y=cx^2$; ④ $y=dx^2$, 则 a, b, c, d 的大小关系为()

- A. $a>b>c>d$ B. $a>b>d>c$ C. $b>a>c>d$ D. $b>a>d>c$



【类型】二、 b 与图像的关系

2. 若二次函数 $y=3x^2+(b-3)x-4$ 的图像如图所示, 则 b 的值是()

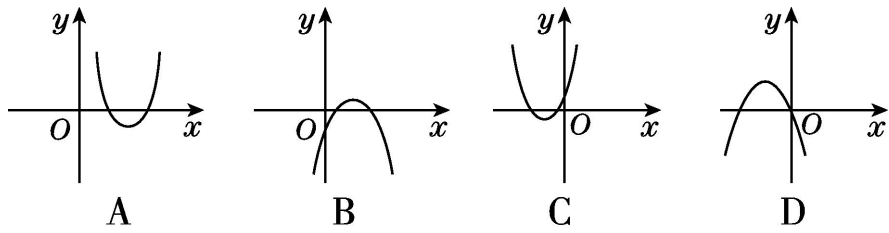


- A. -5 B. 0 C. 3 D. 4

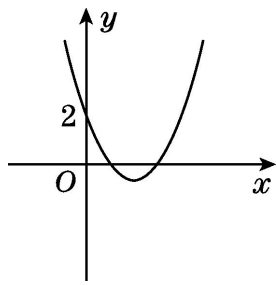
3. 当抛物线 $y=x^2-nx+2$ 的对称轴是 y 轴时, n _____ 0; 当对称轴在 y 轴左侧时, n _____ 0; 当对称轴在 y 轴右侧时, n _____ 0. 填 “ $>$ ” “ $<$ ” 或 “ $=$ ”)

【类型】三、 c 与图像的关系

4. 下列抛物线可能是 $y=ax^2+bx$ 的图像的是()

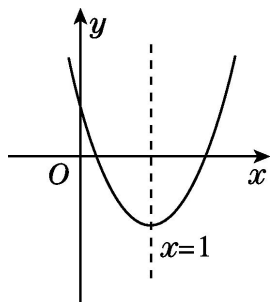


5. 若将抛物线 $y = ax^2 + bx + c - 3$ 向上平移 4 个单位长度后得到的图像如图所示, 则 $c =$ _____.



【类型】四、a, b 与图像的关系

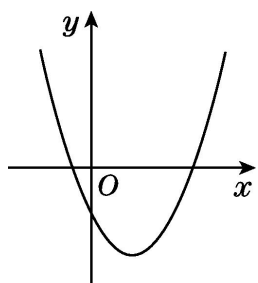
6. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像如图所示, 则下列说法中不正确的是()



- A. $a > 0$ B. $b < 0$ C. $3a + b > 0$ D. $b > -2a$

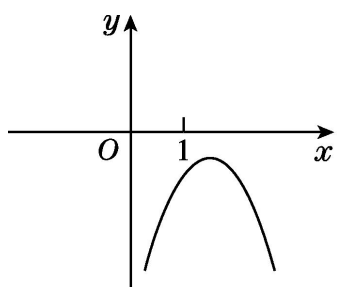
【类型】五、a, c 与图像的关系

7. 二次函数 $y = (3-m)x^2 - x + n + 5$ 的图像如图所示, 试求 $\sqrt{(m-3)^2} + \sqrt{n^2} - |m+n|$ 的值.



【类型】六、b, c 与图像的关系

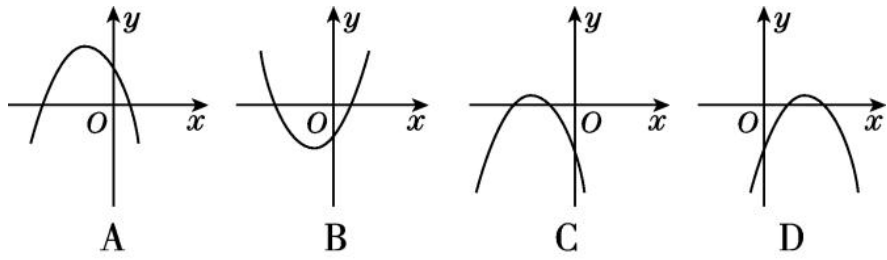
8. 【中考·六盘水】已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像如图所示, 则()



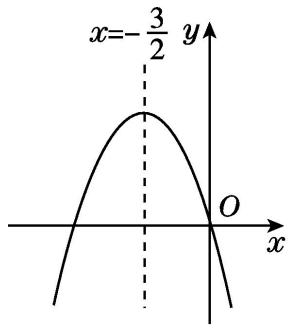
- A. $b > 0, c > 0$ B. $b > 0, c < 0$ C. $b < 0, c < 0$ D. $b < 0, c > 0$

【类型】七、a, b, c 与图像的关系

9. 在二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 中, $a < 0, b > 0, c < 0$, 则符合条件的图像是()



10. 如图，已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的图象如图所示，给出以下四个结论：



① $abc=0$ ，② $a+b+c>0$ ，③ $a>b$ ，④ $4ac-b^2<0$. 其中正确的结论有 ()

A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

参考答案

1. A 点拨：本题运用数形结合思想，在二次函数 $y=ax^2$ 中， $|a|$ 越大，其图像的开口越小，所以①，②中， $a>b>0$ ，③，④中， $d<c<0$ ，所以 $a>b>c>d$ ，故选 A.

2. C 点拨： \because 二次函数 $y=3x^2+(b-3)x-4$ 的图像关于 y 轴对称， $\therefore b-3=0$ ， $b=3$.

3. =; <; >

4. D 5.1 6.D

7. 解：由图像知 $\begin{cases} 3-m > 0, \\ n+5 < 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m < 3, \\ n < -5. \end{cases}$

$$\therefore m-3 < 0, m+n < -2.$$

$$\therefore \sqrt{(m-3)^2} + \sqrt{n^2} - |m+n| = 3-m-n+m+n=3.$$

8. B 点拨： \because 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像的开口向下， $\therefore a<0$. \because 二次函数的图像与 y 轴交于负半轴， $\therefore c<0$.

$$\because \text{对称轴 } x = -\frac{b}{2a} > 0, \therefore b > 0.$$

故选 B.

9. D

10. C 点拨：首先根据二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过原点，可得 $c=0$ ，所以 $abc=0$ ；然后根据 $x=1$ 时， $y<0$ ，可得 $a+b+c<0$ ；再根据图象开口向下，可得 $a<0$ ，图象的对称轴为直线 $x=-\frac{3}{2}$ ，可得 $-\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2}$ ， $b<0$ ，所以 $b=3a$ ， $a>b$ ；最后根据二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴有两个交点，可得 $b^2-4ac > 0$ ，所以 $4ac-b^2 < 0$ ，据此解答即可.

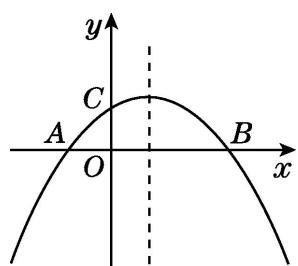
技巧 2: 二次函数图像信息题的四种常见类型

【类型】一、根据抛物线的特征确定 a, b, c 及与其有关的代数式的符号

1. 如图, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 图像与 x 轴交于 A, B 两点, 与 y 轴交于点 C , 且 $OA = OC$. 则下列结论:

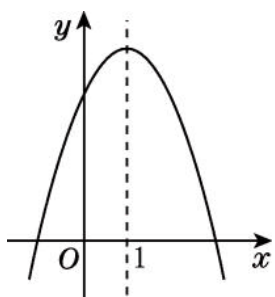
① $abc < 0$; ② $\frac{b^2 - 4ac}{4a} > 0$; ③ $ac - b + 1 = 0$; ④ $OA \cdot OB = -\frac{c}{a}$. 其中正确结论的个数是 ()

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1



【类型】二、利用二次函数的图像比较大小

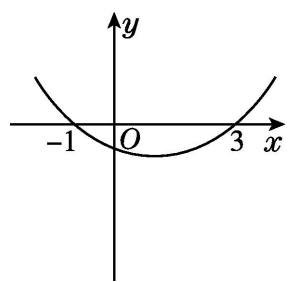
2. 二次函数 $y = -x^2 + bx + c$ 的图像如图, 若点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 在此函数图像上, 且 $x_1 < x_2 < 1$, 则 y_1 与 y_2 的大小关系是 ()



A. $y_1 \leq y_2$ B. $y_1 < y_2$ C. $y_1 \geq y_2$ D. $y_1 > y_2$

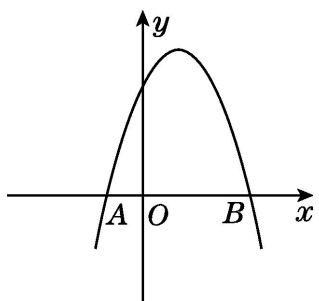
【类型】三、利用二次函数的图像求方程的解或不等式的解集

3. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 图像如图所示, 则当函数值 $y > 0$ 时, x 的取值范围是 ()



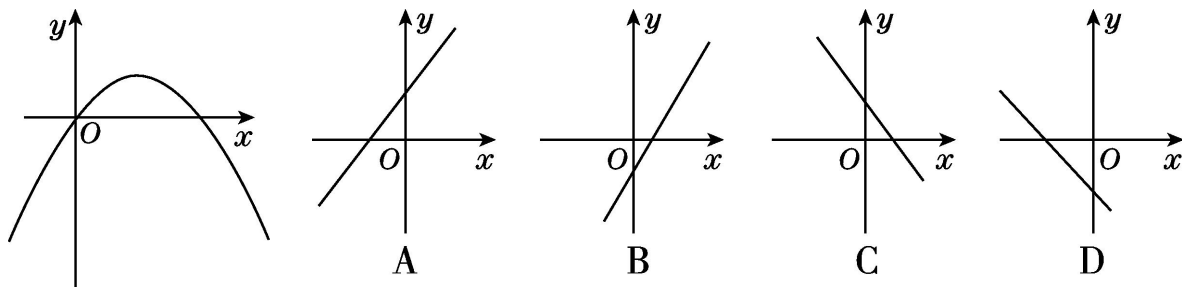
A. $x < -1$ B. $x > 3$ C. $-1 < x < 3$ D. $x < -1$ 或 $x > 3$

4. 如图, 二次函数 $y = ax^2 + bx + 3$ 的图像经过点 $A(-1, 0), B(3, 0)$, 那么一元二次方程 $ax^2 + bx = 0$ 的根是_____.



【类型】四、根据抛物线的特征确定其他函数的图像

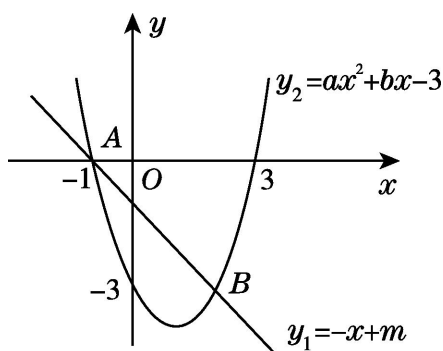
5. 二次函数 $y=ax^2+bx$ 的图像如图所示，那么一次函数 $y=ax+b$ 的图像大致是()



6. 如图， $A(-1, 0)$ ， $B(2, -3)$ 两点在一次函数 $y_1=-x+m$ 与二次函数 $y_2=ax^2+bx-3$ 的图像上.

(1)求 m 的值和二次函数的表达式;

(2)设二次函数的图像交 y 轴于点 C ，求 $\triangle ABC$ 的面积.



参考答案

1. B 2.B 3.D 4. $x_1=0, x_2=2$ 5.C

6. 解：(1)将点 $A(-1, 0)$ 的坐标代入 $y_1=-x+m$ ，得 $m=-1$;

将点 $A(-1, 0)$ ， $B(2, -3)$ 的坐标分别代入 $y_2=ax^2+bx-3$ ，得 $\begin{cases} a-b-3=0, \\ 4a+2b-3=-3. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=1, \\ b=-2. \end{cases}$

$$\therefore y_2=x^2-2x-3.$$

(2)易知 C 点的坐标为 $(0, -3)$ ，一次函数的图像与 y 轴的交点坐标为 $(0, -1)$.

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times [1 - (-3)] \times 1 + \frac{1}{2} \times [1 - (-3)] \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 1 - \frac{1}{2} \times 2 \times 3.$$

技巧 3：求二次函数表达式的常见类型

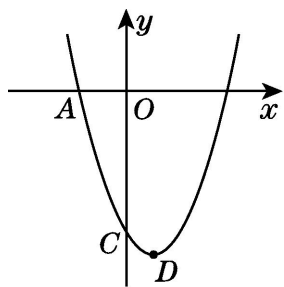
【类型】一、由函数的基本形式求表达式

题型 1：利用一般式求二次函数表达式

1. 已知二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图像与 y 轴交于点 $C(0, -6)$ ，与 x 轴的一个交点坐标是 $A(-2, 0)$.

(1)求二次函数的表达式，并写出顶点 D 的坐标;

(2)将二次函数的图像沿 x 轴向左平移 $\frac{5}{2}$ 个单位长度，当 $y<0$ 时，求 x 的取值范围.



题型 2: 利用顶点式求二次函数表达式

2. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$, 当 $x = 1$ 时, 有最大值 8, 其图像的形状、开口方向与抛物线 $y = -2x^2$ 相同, 则这个二次函数的表达式是 ()

- A. $y = -2x^2 - x + 3$ B. $y = -2x^2 + 4$
 C. $y = -2x^2 + 4x + 8$ D. $y = -2x^2 + 4x + 6$

3. 已知某个二次函数的最大值是 2, 图像顶点在直线 $y = x + 1$ 上, 并且图像经过点 $(3, -6)$. 求这个二次函数的表达式.

题型 3: 利用交点式求二次函数表达式

4. 已知抛物线与 x 轴交于 $A(1, 0)$, $B(-4, 0)$ 两点, 与 y 轴交于点 C , 且 $AB = BC$, 求此抛物线对应的函数表达式.

题型 4: 利用平移法求二次函数表达式

5. 把二次函数 $y = 2x^2$ 的图像向左平移 1 个单位长度, 再向下平移 2 个单位长度, 平移后抛物线的表达式是 _____.

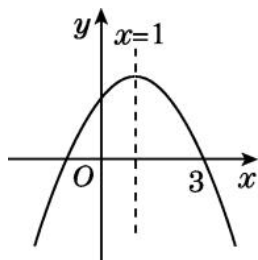
6. 已知 $y = x^2 + bx + c$ 的图像向右平移 2 个单位长度, 再向下平移 3 个单位长度, 得到的图像的表达式为 $y = x^2 - 2x - 3$.

(1) $b =$ _____, $c =$ _____;

(2) 求原函数图像的顶点坐标;

(3) 求两个图像顶点之间的距离.

题型 5: 利用对称轴法求二次函数表达式



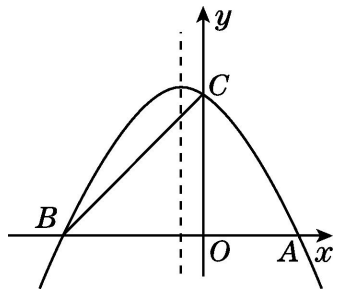
7. 如图, 已知抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 的对称轴为直线 $x = 1$, 且与 x 轴的一个交点为 $(3, 0)$, 那么它对应的函数表达式是 _____.

8. 如图, 抛物线与 x 轴交于 A, B 两点, 与 y 轴交于 C 点, 点 A 的坐标为 $(2, 0)$, 点 C 的坐标为 $(0, 3)$,

抛物线的对称轴是直线 $x = -\frac{1}{2}$.

(1)求抛物线的表达式;

(2)M 是线段 AB 上的任意一点, 当 $\triangle MBC$ 为等腰三角形时, 求点 M 的坐标.

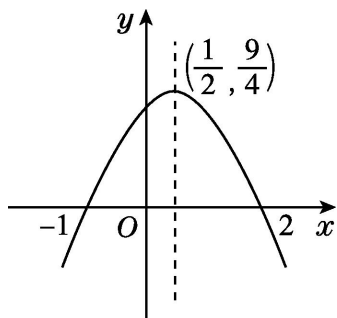


题型 6: 灵活运用方法求二次函数的表达式

9. 已知抛物线的顶点坐标为 $(-2, 4)$, 且与 x 轴的一个交点坐标为 $(1, 0)$, 求抛物线对应的函数表达式.

【类型】二、由函数图像中的信息求表达式

10. 如图, 是某个二次函数的图像, 根据图像可知, 该二次函数的表达式是()



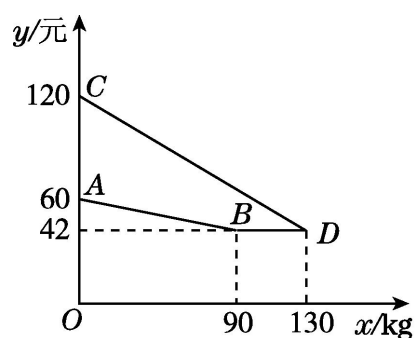
- A. $y = x^2 - x - 2$ B. $y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 2$ C. $y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$ D. $y = -x^2 + x + 2$

11. 某企业生产并销售某种产品, 假设销售量与产量相等. 如图中的折线 ABD, 线段 CD 分别表示该产品每千克生产成本 y_1 (单位: 元), 销售价 y_2 (单位: 元) 与产量 x (单位: kg) 之间的函数关系.

(1)请解释图中点 D 的横坐标、纵坐标的实际意义;

(2)求线段 AB 所表示的 y_1 与 x 之间的函数表达式;

(3)当该产品产量为多少时, 获得的利润最大? 最大利润是多少?



【类型】三、由表格信息求表达式

12. 若 $y = ax^2 + bx + c$, 则由表格中信息可知 y 与 x 之间的函数关系式是()

x	-1	0	1
---	----	---	---

ax^2			1
ax^2+bx+c	8	3	

- A. $y=x^2-4x+3$ B. $y=x^2-3x+4$ C. $y=x^2-3x+3$ D. $y=x^2-4x+8$

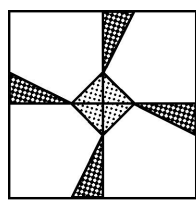
13. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的变量 x 和函数值 y 的部分对应值如下表:

x	...	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$...
y	...	$-\frac{5}{4}$	-2	$-\frac{9}{4}$	-2	$-\frac{5}{4}$	0	$\frac{7}{4}$...

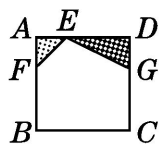
则该二次函数的表达式为_____.

【类型】四、几何应用中求二次函数的表达式

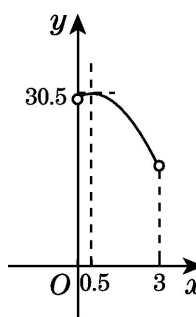
14. 某校校园内有一个大正方形花坛, 如图甲所示, 它由四个边长为 3 米的小正方形组成, 且每个小正方形的种植方案相同. 其中的一个小正方形 ABCD 如图乙所示, $DG=1$ 米, $AE=AF=x$ 米, 在五边形 EFBCG 区域上种植花卉, 则大正方形花坛种植花卉的面积 y 与 x 的函数图像大致是()



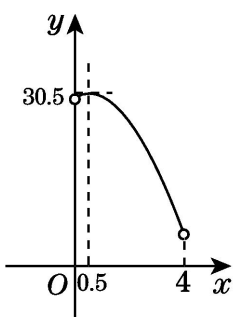
甲



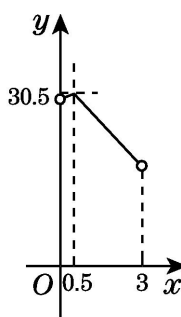
乙



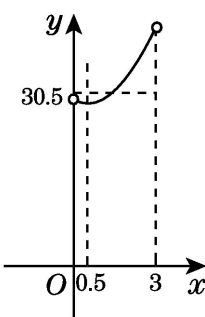
A



B



C



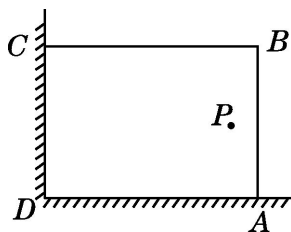
D

【类型】五、实际问题中求二次函数表达式

15. 在美化校园的活动中, 某兴趣小组想借助如图所示的直角墙角(两墙足够长), 用 28 m 长的篱笆围成一个矩形花园 ABCD (篱笆只围 AB, BC 两边), 设 $AB=x$ m, 花园的面积为 S m².

(1) 求 S 与 x 之间的函数表达式;

(2) 若在 P 处有一棵树与墙 CD, AD 的距离分别是 15 m 和 6 m, 要将这棵树围在花园内(含边界, 不考虑树的粗细), 求花园面积的最大值.



参考答案

1. 解: (1) ∵ 把 C 点坐标 $(0, -6)$ 代入二次函数的表达式得 $c = -6$, 把 A 点坐标 $(-2, 0)$ 代入 $y = x^2 + bx - 6$

得 $b = -1$,

∴二次函数的表达式为 $y = x^2 - x - 6$.

$$\text{即 } y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}.$$

∴顶点 D 的坐标为 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$.

(2)将二次函数的图像沿 x 轴向左平移 $\frac{5}{2}$ 个单位长度所得图像对应的函数表达式为 $y = (x+2)^2 - \frac{25}{4}$.

$$\text{令 } y = 0, \text{ 得 } (x+2)^2 - \frac{25}{4} = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{9}{2}.$$

∵ $a > 0$,

∴当 $y < 0$ 时, x 的取值范围是 $-\frac{9}{2} < x < \frac{1}{2}$.

2. D

3. 解: 设二次函数图像的顶点坐标为 $(x, 2)$, 则 $2 = x + 1$, 所以 $x = 1$, 所以图像的顶点坐标为 $(1, 2)$. 设二次函数的表达式为 $y = a(x-1)^2 + 2$, 将点 $(3, -6)$ 的坐标代入上式, 可得 $a = -2$. 所以该函数的表达式为 $y = -2(x-1)^2 + 2$, 即 $y = -2x^2 + 4x$.

4. 解: 由 $A(1, 0)$, $B(-4, 0)$ 可知 $AB = 5$, $OB = 4$.

又 ∵ $BC = AB$, ∴ $BC = 5$.

在 $Rt\triangle BCO$ 中, $OC = \sqrt{BC^2 - OB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$,

∴C 点的坐标为 $(0, 3)$ 或 $(0, -3)$.

设抛物线对应的函数表达式为 $y = a(x-1)(x+4)$, 将点 $(0, 3)$ 的坐标代入得 $3 = a(0-1) \times (0+4)$, 解得 $a = -\frac{3}{4}$.

将点 $(0, -3)$ 的坐标代入得 $-3 = a(0-1) \times (0+4)$, 解得 $a = \frac{3}{4}$.

∴该抛物线对应的函数表达式为 $y = -\frac{3}{4}(x-1)(x+4)$ 或 $y = \frac{3}{4}(x-1)(x+4)$, 即 $y = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{4}x + 3$ 或 $y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - 3$.

点拨: 若给出抛物线与 x 轴的交点坐标或对称轴及抛物线与 x 轴的两交点间的距离, 通常可设交点式求解.

5. $y = 2x^2 + 4x$

6. 解: (1) $2 > 0$

(2)原函数的表达式为 $y = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$.

\therefore 其图像的顶点坐标为 $(-1, -1)$.

(3)原函数图像的顶点为 $(-1, -1)$, 新函数图像的顶点为 $(1, -4)$. 由勾股定理易得两个顶点之间的距离为 $\sqrt{13}$.

7. $y = -x^2 + 2x + 3$

8. 解: (1)设抛物线的表达式为 $y = a\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + k$.

把点 $(2, 0)$, $(0, 3)$ 的坐标代入, 得
$$\begin{cases} \frac{25}{4}a + k = 0, \\ \frac{1}{4}a + k = 3. \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{2}, \\ k = \frac{25}{8}. \end{cases}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{8},$$

$$\text{即 } y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3.$$

$$(2) \text{由 } y = 0, \text{ 得 } -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{8} = 0,$$

解得 $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $\therefore B(-3, 0)$. [来源:学科网 Z. X. X. K]

①当 $CM = BM$ 时, $\because BO = CO = 3$, 即 $\triangle BOC$ 是等腰三角形, \therefore 当 M 点在原点 O 处时, $\triangle MBC$ 是等腰三角形.

$\therefore M$ 点坐标为 $(0, 0)$.

②当 $BC = BM$ 时, 在 $Rt\triangle BOC$ 中, $BO = CO = 3$, 由勾股定理得 $BC = \sqrt{OC^2 + OB^2} = 3\sqrt{2}$, $\therefore BM = 3\sqrt{2}$.

$\therefore M$ 点坐标为 $(3\sqrt{2} - 3, 0)$.

综上所述, 点 M 坐标为 $(0, 0)$ 或 $(3\sqrt{2} - 3, 0)$.

9. 解: 方法一: 设抛物线对应的函数表达式为 $y = ax^2 + bx + c$, 由题意得
$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -2, \\ \frac{4ac - b^2}{4a} = 4, \\ a + b + c = 0. \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} a = -\frac{4}{9}, \\ b = -\frac{16}{9}, \\ c = \frac{20}{9}. \end{cases}$$

$$\therefore \text{抛物线对应的函数表达式为 } y = -\frac{4}{9}x^2 - \frac{16}{9}x + \frac{20}{9}.$$

方法二: 设抛物线对应的函数表达式为 $y = a(x+2)^2 + 4$, 将点 $(1, 0)$ 的坐标代入得 $0 = a(1+2)^2 + 4$, 解

得 $a = -\frac{4}{9}$.

∴ 抛物线对应的函数表达式为 $y = -\frac{4}{9}(x+2)^2 + 4$.

即 $y = -\frac{4}{9}x^2 - \frac{16}{9}x + \frac{20}{9}$.

方法三: ∵ 抛物线的顶点坐标为 $(-2, 4)$, 与 x 轴的一个交点坐标为 $(1, 0)$,

∴ 抛物线的对称轴为直线 $x = -2$, 与 x 轴的另一个交点坐标为 $(-5, 0)$.

设抛物线对应的函数表达式为 $y = a(x-1)(x+5)$, 将点 $(-2, 4)$ 的坐标代入得 $4 = a(-2-1)(-2+5)$,

解得 $a = -\frac{4}{9}$.

∴ 抛物线对应的函数表达式为 $y = -\frac{4}{9}(x-1)(x+5)$,

即 $y = -\frac{4}{9}x^2 - \frac{16}{9}x + \frac{20}{9}$.

点拨: 本题分别运用了一般式、顶点式、交点式求二次函数表达式, 求二次函数的表达式时要根据题目条件灵活选择方法, 如本题中, 第一种方法列式较复杂, 且计算量大, 第二、三种方法较简便, 计算量小.

10. D

11. 解: (1) 点 D 的横坐标、纵坐标的实际意义: 当产量为 130 kg 时, 该产品每千克生产成本与销售价相等, 都为 42 元.

(2) 设线段 AB 所表示的 y_1 与 x 之间的函数表达式为 $y_1 = k_1x + b_1$.

因为 $y_1 = k_1x + b_1$ 的图像过点 $(0, 60)$ 与 $(90, 42)$,

所以 $\begin{cases} b_1 = 60, \\ 90k_1 + b_1 = 42. \end{cases}$

解方程组得 $\begin{cases} k_1 = -0.2 \\ b_1 = 60. \end{cases}$

这个一次函数的表达式为 $y_1 = -0.2x + 60 (0 \leq x \leq 90)$

(3) 设 y_2 与 x 之间的函数表达式为 $y_2 = k_2x + b_2$.

因为 $y_2 = k_2x + b_2$ 的图像过点 $(0, 120)$ 与 $(130, 42)$,

所以 $\begin{cases} b_2 = 120, \\ 130k_2 + b_2 = 42. \end{cases}$

解方程得 $\begin{cases} k_2 = -0.6 \\ b_2 = 120. \end{cases}$

这个一次函数的表达式为 $y_2 = -0.6x + 120 (0 \leq x \leq 130)$

设产量为 x kg 时, 获得的利润为 W 元.

当 $0 \leq x \leq 90$ 时, $W = x[(-0.6x+120) - (-0.2x+60)] = -0.4(x-75)^2 + 2250$.

所以, 当 $x=75$ 时, W 的值最大, 最大值为 2250.

当 $90 < x \leq 130$ 时, $W = x[(-0.6x+120) - 42] = -0.6(x-65)^2 + 2535$.

当 $x=90$ 时, $W = -0.6 \times (90-65)^2 + 2535 = 2160$.

由 $-0.6 < 0$ 知, 当 $x > 65$ 时, W 随 x 的增大而减小, 所以 $90 < x \leq 130$ 时, $W < 2160$.

因此, 当该产品产量为 75 kg 时, 获得的利润最大, 最大利润是 2250 元.

12. A 13. $y = x^2 + x - 2$

14. A 点拨: 先求出 $\triangle AEF$ 和 $\triangle DEG$ 的面积, 然后可得到五边形 EFBCG 的面积, 继而可得 y 与 x 的函数表达式.

$$S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2}AE \times AF = \frac{1}{2}x^2, \quad S_{\triangle DEG} = \frac{1}{2}DG \times DE = \frac{1}{2} \times 1 \times (3-x) = \frac{3-x}{2},$$

$$S_{\text{五边形 EFBCG}} = S_{\text{正方形 ABCD}} - S_{\triangle AEF} - S_{\triangle DEG} = 9 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3-x}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{15}{2},$$

$$\text{则 } y = 4 \times \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{15}{2} \right) = -2x^2 + 2x + 30.$$

$$\because 0 < AE < AD, \quad \therefore 0 < x < 3,$$

$$\therefore y = -2x^2 + 2x + 30 \quad (0 < x < 3).$$

故选 A.

15. 解: (1) $\because AB = x \text{ m}, \therefore BC = (28-x) \text{ m}.$

于是易得 $S = AB \cdot BC = x(28-x) = -x^2 + 28x$.

即 $S = -x^2 + 28x \quad (0 < x < 28)$.

(2) 由题意可知, $\begin{cases} x \geq 6 \\ 28-x \geq 15 \end{cases}$

解得 $6 \leq x \leq 13$.

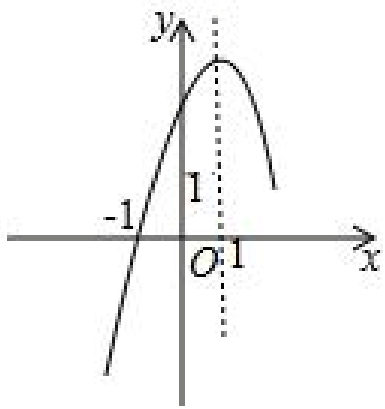
由(1)知, $S = -x^2 + 28x = -(x-14)^2 + 196$.

易知当 $6 \leq x \leq 13$ 时, S 随 x 的增大而增大, \therefore 当 $x=13$ 时, $S_{\text{最大值}} = 195$, 即花园面积的最大值为 195 m^2 .

【题型讲解】

【题型】一、二次函数的图象及性质

例 1、二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的部分图象如图所示，则下列选项错误的是（ ）



- A. 若 $(2, y_1)$, $(5, y_2)$ 是图象上的两点，则 $y_1 = y_2$
- B. $3a + c = 0$
- C. 方程 $ax^2 + bx + c = 2$ 有两个不相等的实数根
- D. 当 $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而减小

【答案】D

【提示】根据二次函数的图象与性质（对称性、增减性）、二次函数与一元二次方程的联系逐项判断即可得。

【详解】由函数的图象可知，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的对称轴为 $x = \frac{b}{2a} = 1$

则当 $x < 1$ 时， y 随 x 的增大而增大；当 $x > 1$ 时， y 随 x 的增大而减小，选项 D 错误

由对称性可知， $x = 4$ 时的函数值与 $x = 2$ 时的函数值相等

则当 $x = 4$ 时，函数值为 y_1

$x = 2$

$y_1 = y_2$ ，则选项 A 正确

$$\frac{b}{2a} = 1$$

$$b = 2a$$

又当 $x = 1$ 时， $a + b + c = 0$

$$a + (2a) + c = 0, \text{ 即 } 3a + c = 0, \text{ 选项 B 正确}$$

由函数的图象可知，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴有两个交点

则将二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象向上平移 2 个单位长度得到的二次函数 $y = ax^2 + bx + c + 2$ 与 x 轴也有两个交点

因此，关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c + 2 = 0$ 有两个不相等的实数根

即方程 $ax^2 + bx + c = 2$ 有两个不相等的实数根，选项 C 正确

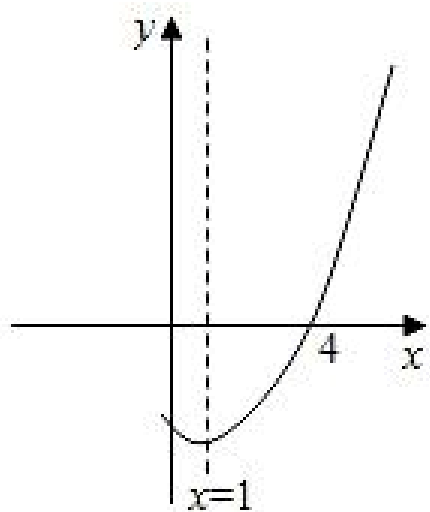
故选：D.

【题型】二、二次函数的图象与系数之间的关系

例 2、如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于点 $(4, 0)$ ，其对称轴为直线 $x = 1$ ，结合图象给出下列结论：

- ① $ac < 0$;
- ② $4a - 2b + c > 0$;
- ③ 当 $x > 2$ 时， y 随 x 的增大而增大；
- ④ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个不相等的实数根.

其中正确的结论有 ()



- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】C

【提示】根据抛物线的开口方向、对称轴、顶点坐标、增减性以及与 x 轴 y 轴的交点，综合判断即可.

【详解】解：抛物线开口向上，因此 $a > 0$ ，与 y 轴交于负半轴，因此 $c < 0$ ，故 $ac < 0$ ，所以①正确；

抛物线对称轴为 $x = 1$ ，与 x 轴的一个交点为 $(4, 0)$ ，则另一个交点为 $(-2, 0)$ ，于是有 $4a - 2b + c = 0$ ，所以②不正确；

$x > 1$ 时， y 随 x 的增大而增大，所以③正确；

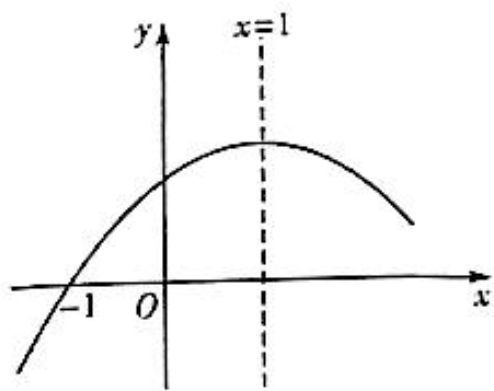
抛物线与 x 轴有两个不同交点，因此关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个不相等的实数根，所以④正确；

综上所述，正确的结论有：①③④，

故选：C.

【题型】三、二次函数的对称性

例 3、抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$) 与 x 轴的一个交点坐标为 $(-1, 0)$ ，对称轴是直线 $x = 1$ ，其部分图象如图所示，则此抛物线与 x 轴的另一个交点坐标是 ()



- A. $(\frac{7}{2}, 0)$ B. $(3, 0)$ C. $(\frac{5}{2}, 0)$ D. $(2, 0)$

【答案】B

【提示】由函数的对称性可得结论.

【详解】

解：设此抛物线与 x 轴的另一个交点坐标为 $(x, 0)$ ，

\because 抛物线与 x 轴的一个交点坐标为 $(-1, 0)$ ，对称轴是直线 $x = 1$ ，

$$\therefore \frac{x + (-1)}{2} = 1, \text{ 解得 } x=3,$$

此抛物线与 x 轴的另一个交点坐标为 $(3, 0)$ ，

故选：B.

【题型】四、二次函数的最值

例 4、点 $P(m, n)$ 在以 y 轴为对称轴的二次函数 $y = x^2 + ax + 4$ 的图象上，则 $m - n$ 的最大值等于 ()

- A. $\frac{15}{4}$ B. 4 C. $-\frac{15}{4}$ D. $-\frac{17}{4}$

【答案】C

【提示】根据题意，可以得到 a 的值以及 m 和 n 的关系，然后将 m 、 n 作差，利用二次函数的性质，即可求出 $m - n$ 的最大值.

【详解】解： \because 点 $P(m, n)$ 在以 y 轴为对称轴的二次函数 $y = x^2 + ax + 4$ 的图象上，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/017006103014010011>