第五章：旋涡理论(vortex theory)

课堂提问：为什么处于龙卷风中心会是风平浪静？

为什么游泳时应避开旋涡区？

旋涡场: 存在旋涡运动的流场

即流场中 $\vec{\omega} \neq 0$

本章仅讨论旋涡运动，不涉及力，属于运动学容。

旋涡场的特性不同于一般流场，需要专门进行研究

本章讨论内容：

1. 漩涡场的基本概念（涡线，涡管，漩涡强度速度环量）

2. 斯托克斯定理

3. 汤姆逊定理

4. 海姆霍兹定理

5. 毕奥—沙伐尔定理

6. 兰金组合涡

§5-1旋涡运动的基本概念

有旋运动： ω_x, ω_y, ω_z在流场中不全为零的流动

一般，整个流场中某些区域为旋涡区，其余的地方则为无旋区域。

自然界中如龙卷风, 桥墩后面规则的双排涡列等等是经常能观察到的旋涡运动的例子。但在大多数情况下流动中的旋涡肉眼难于察觉。

龙卷风1

龙卷风2

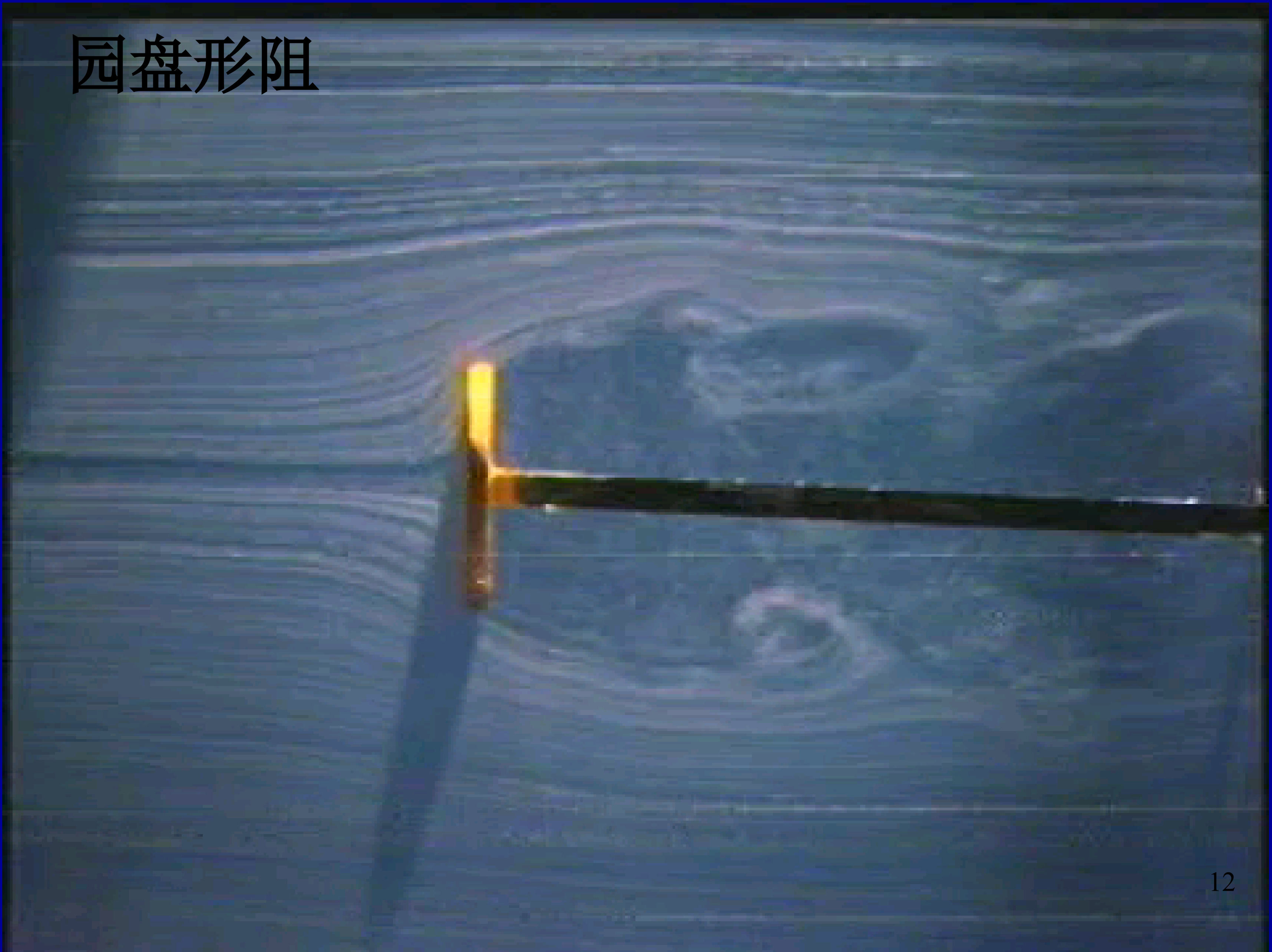
海上漩涡

ISS013E62787

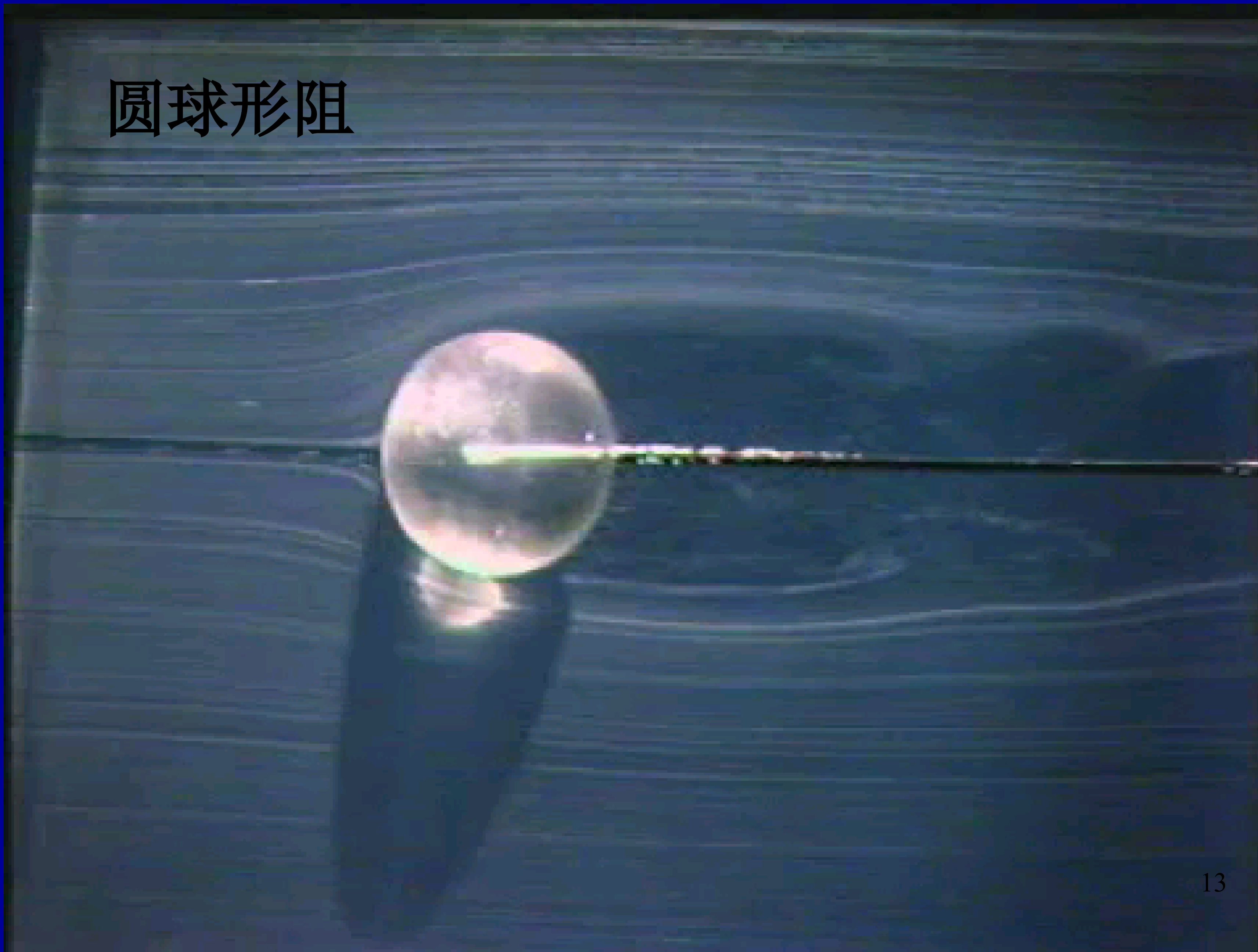
气旋

气旋

园盘绕流尾流场中的旋涡

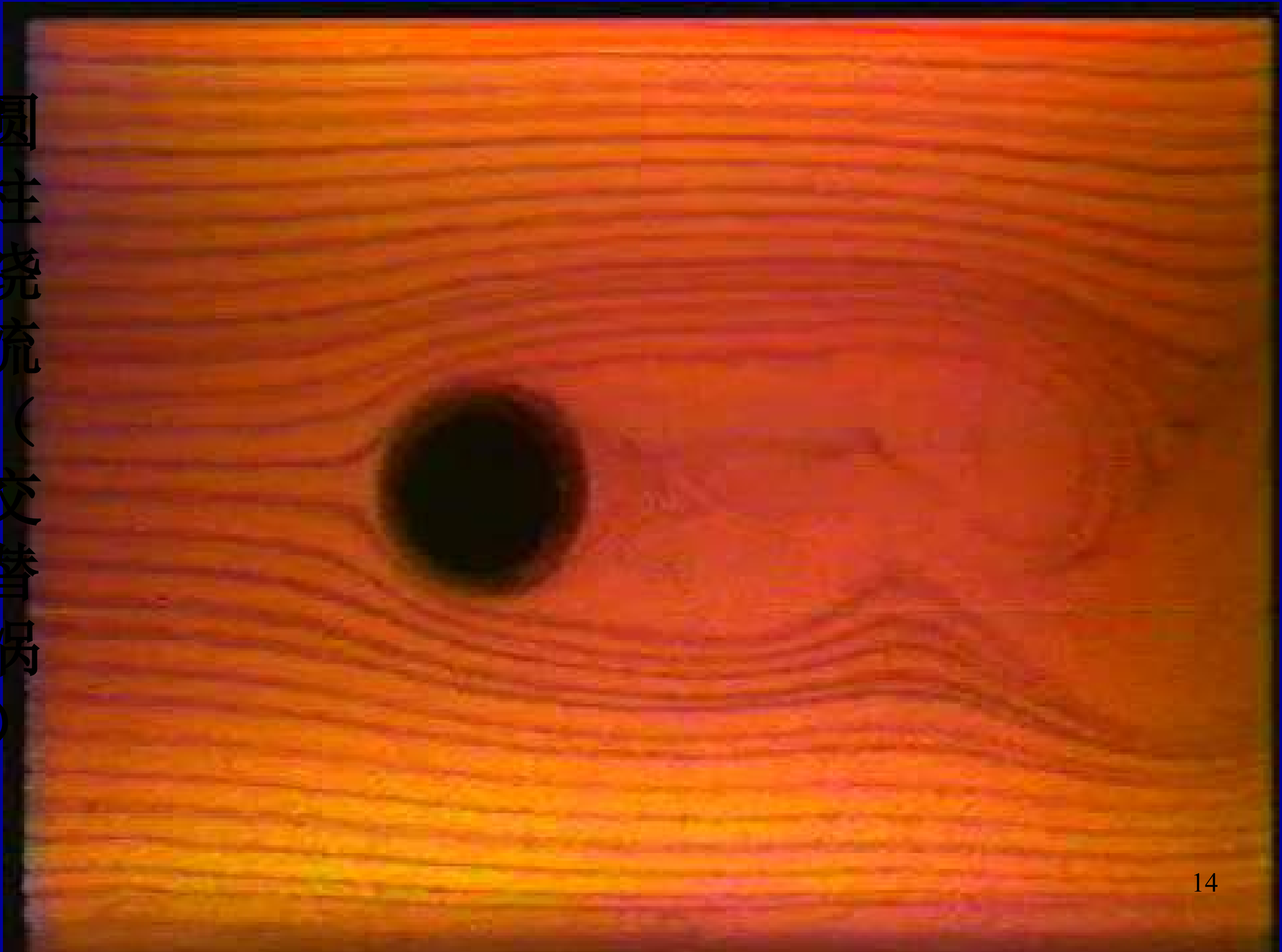


园球绕流尾流场中的旋涡



园柱绕流尾流场中的旋涡

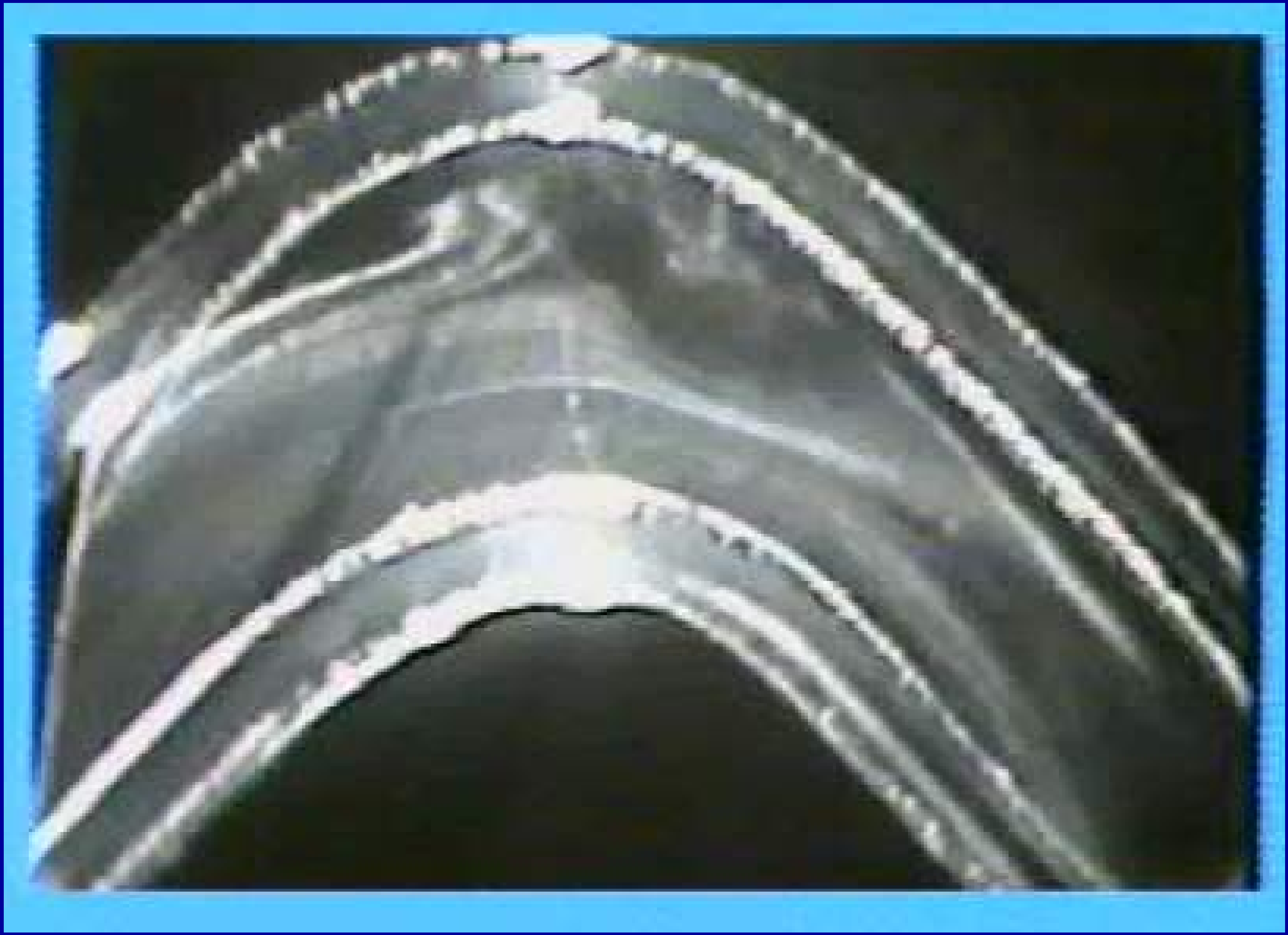
圆柱绕流（交替涡）



有攻角机翼绕流尾流场中的旋涡

弯曲槽道内的二次流

弯管二次流



旋涡运动理论广泛地应用于工程实际: 机翼、螺旋桨理论等。旋涡与船体的阻力、振动、噪声等问题密切相关。

旋涡的产生： 与压力差、质量力和粘性力等因素有关。

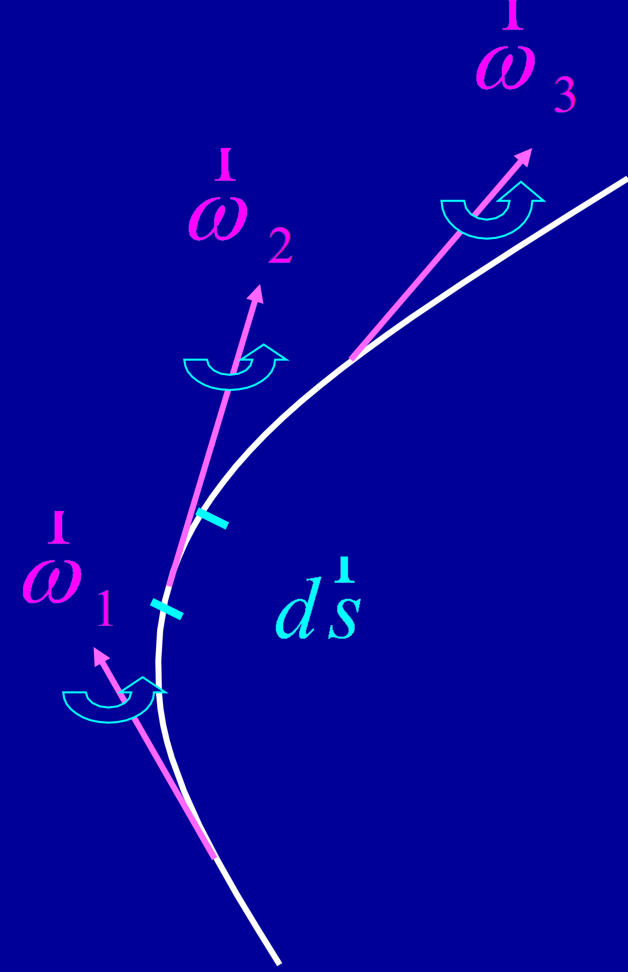
流体流过固体壁面时，除壁面附近粘性影响严重的一薄层外，其余区域的流动可视为理想流体的无旋运动。

旋涡场的几个基本概念：

一、涡线，涡管，旋涡强度

涡线(vortex line)：

涡线上所有流体质点在同瞬时的旋转角速度矢量 $\vec{\omega}$ 与此线相切。



涡线微分方程：

取涡线上一段微弧长 $d\vec{s} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

该处的旋转角速度 $\vec{\omega} = \omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k}$

由涡线的定义（涡矢量与涡线相切：叉积为零），得涡线微分方程式：

$$\frac{dx}{\omega_x(x,y,z,t)}=\frac{dy}{\omega_y(x,y,z,t)}=\frac{dz}{\omega_z(x,y,z,t)} \qquad (5\text{-}1)$$

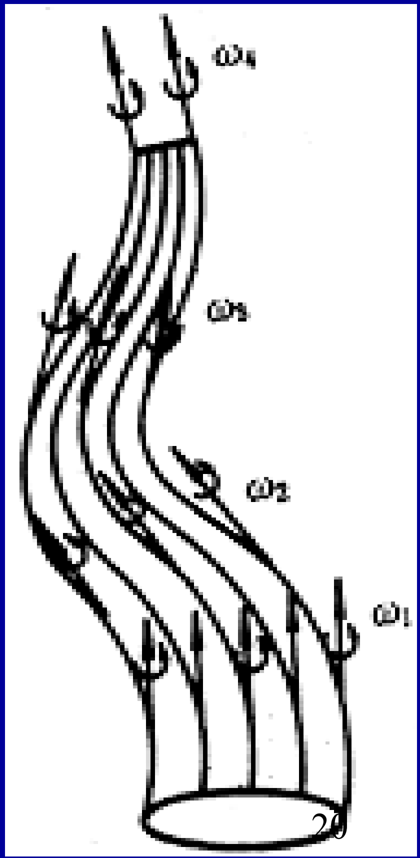
若已知 $\omega_x,\omega_y,\omega_z$，积分上式可得涡线。与流线的积分一样，将 t 看成参数。t 取定值就得到该瞬时的涡线。

涡管（ vortex tube ）：

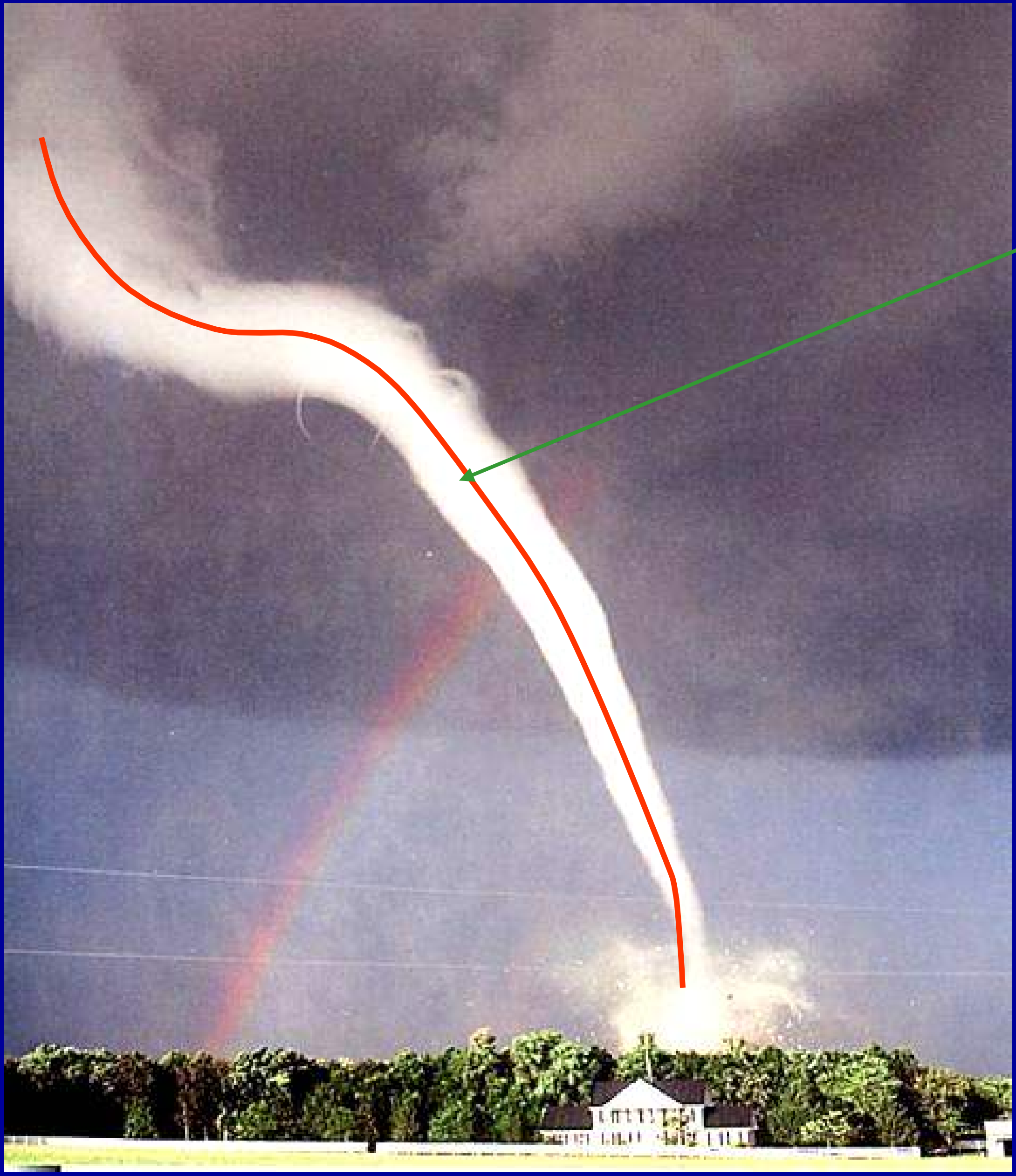
在旋涡场中任取一微小封闭曲线C（不是涡线），过C上每一点作涡线，这些涡线形成的管状曲面称涡管。

涡丝（vortex filament）：

涡管中充满着作旋转运动的流体，称为**涡束**。截面积为无限小的涡束称为**涡索（涡丝）**。

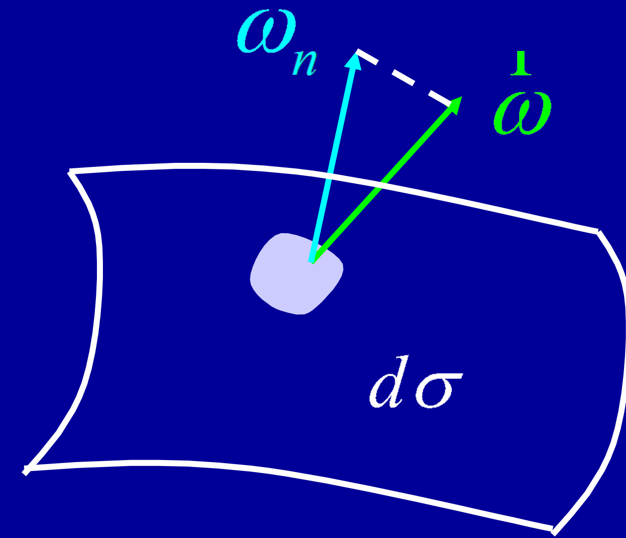


龙卷风–涡线



任取微分面积dσ， $\vec{\omega}$ 法线分量为 ω_n

则 $dJ = \Omega_n d\sigma = 2\omega_n d\sigma$ (5-2)



为dσ 上的*旋涡强度−涡通量*

沿σ 面积分得旋涡强度：

$$J = \iint_{\sigma} \Omega_n \mathrm{d}\sigma \qquad (5\text{-}3)$$

若σ 是涡管的截面，则J 称为*涡管强度，或涡通量。*

J 表征流场中旋涡强弱和分布面积大小的物理量

问题：式（5−3）与前面学过的什么公式类似？

二、速度环量（velocity circulation）

速度环量：速度矢在积分路径方向的分量沿该路径的线积分。

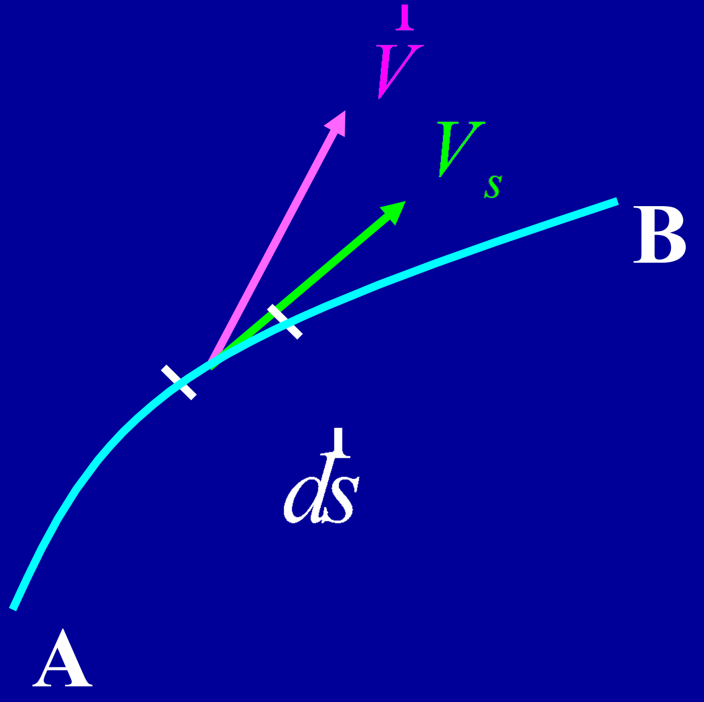
定义 $\Gamma_{AB}=\int_{AB}V_s ds$ （5—4）

某瞬时在流场中任取曲线AB

微元弧 $d\vec{s}$

V_s ：$\vec{v}$ 在 $d\vec{s}$ 向的投影

$$\Gamma_{AB}=\int_A^B \vec{V}\cdot d\vec{s}$$



速度环量是***标量***，速度方向与积分AB曲线方向相同时（成锐角）为正，反之为负。

线积分方向相反的速度环量相差一负号，即

$$\Gamma_{AB} = -\Gamma_{BA} \qquad (5-5)$$

速度环量的其他表示形式：

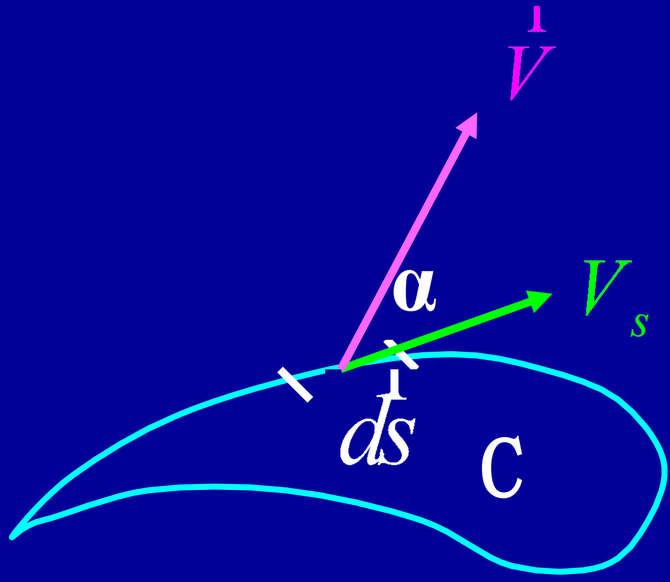
$$\Gamma_{AB} = \int_{AB} \vec{V} \cdot d\vec{s} = \int_{AB} V \cos(\vec{V}, d\vec{s}) ds = \int_{AB} V_x dx + V_y dy + V_z dz$$

沿封闭周线C的速度环量

$$\Gamma_c = \oint_c V_s \, ds$$

$$= \oint_c \vec{V} \cdot d\vec{s}$$

$$= \oint_c V_x dx + V_y dy + V_z dz$$



速度环量的计算

1） 已知速度场，求沿一条开曲线的速度环量

对于无旋流场:

$$\Gamma_{AB} = \int_{AB} V_x dx + V_y dy + V_z dz = \int_{AB} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$

$$= \int_A^B d\varphi = \varphi_B - \varphi_A$$

对于有旋场:

由公式 $\Gamma_{AB} = \int_{AB} \vec{V} \cdot d\vec{s} = \int_{AB} V_x dx + V_y dy + V_z dz$ 计算

2. 若已知速度场，求沿一条闭曲线的速度环量

对于无旋场：

$$\Gamma_c = \oint_c V_x dx + V_y dy + V_z dz = \oint_c \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$

$$= \oint_c d\varphi = 0$$

对于有旋场：

$$\Gamma_c = \oint_c V_s ds = 2\iint_\sigma \omega_n d\sigma \qquad （5—11）$$

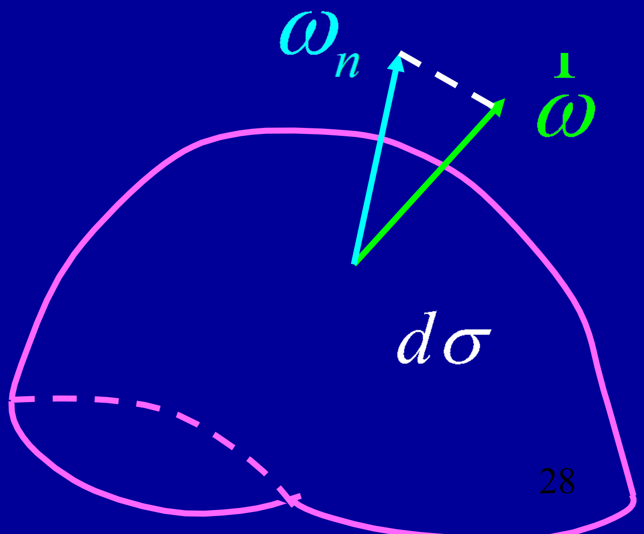
此式称为斯托克斯定理

三、斯托克斯定理

斯托克斯定理：沿任意闭曲线的速度环量等于该曲线为边界的曲面内的旋涡强度，即 $\Gamma_c = J$

或 $$\Gamma_c = \oint_c V_s \, ds = \iint_\sigma \Omega_n \mathrm{d}\sigma = J \qquad (5-11)$$

环量与旋涡强度通过线积分与面积分联系起来了。



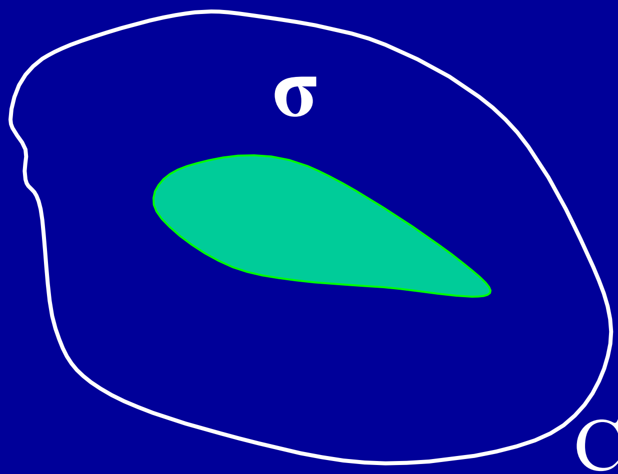
证 明:略

上述斯托克斯定理只适用于“单连通区域”

$$\Gamma_c = \oint_c V_s ds = \iint_\sigma \Omega_n \mathrm{d}\sigma = J \qquad （5—11）$$

单连通区域: C 所包围的区域σ内全部是流体，没有固体或空洞。

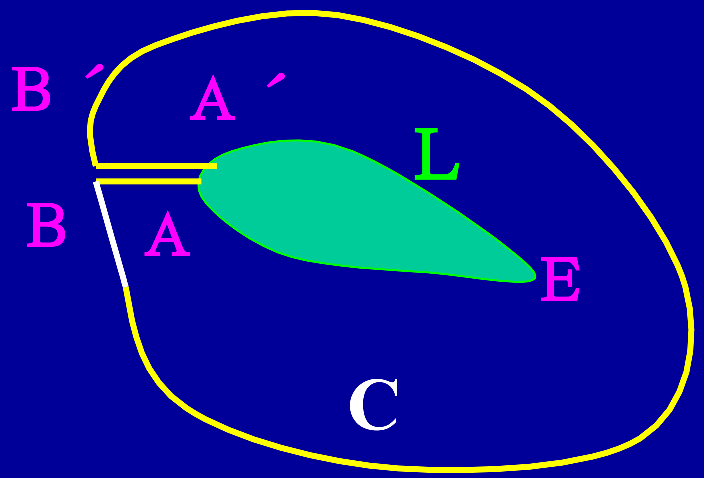
复连通域(多连通域)： C的内部有空洞或者包含其他的物体。



AB线将σ切开，则沿周线ABB'A'EA前进所围的区域为单连通域。

用斯托克斯定理有：

$$\Gamma_{ABB'A'EA} = 2\iint_{\sigma} \omega_n d\sigma$$

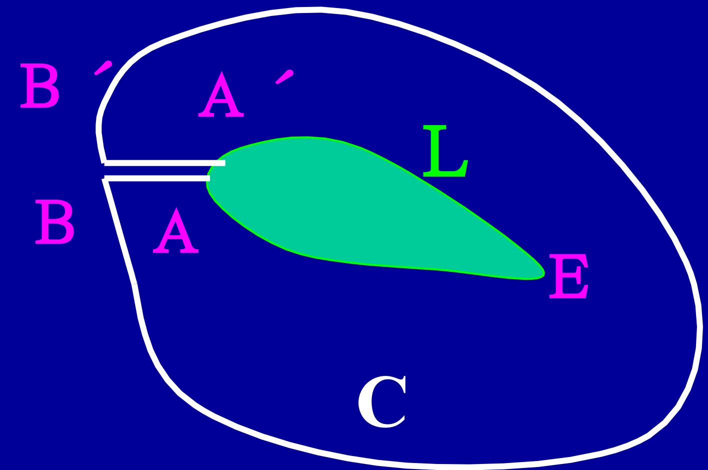


$$\Gamma_{ABDB'A'EA} = \Gamma_{AB} + \Gamma_{C} + \Gamma_{B'A'} + \Gamma_{L}$$

区域在走向的左侧

Γ C：沿外边界逆时针的环量

Γ L ：沿内边界顺时针的环量



$$\Gamma_{AB} = \Gamma_{B'A'}$$

积分路线相反，抵消掉了。

最后有 $$\Gamma_C + \Gamma_L = 2\iint_{\sigma} \omega_n d\sigma \qquad (5\text{-}13)$$

这就是双连通域的斯托克斯定理。

推论一 单连域内的无旋运动，流场中*处处* $\vec{\omega}$ *为零*，则沿任意封闭周线的速度环量为零

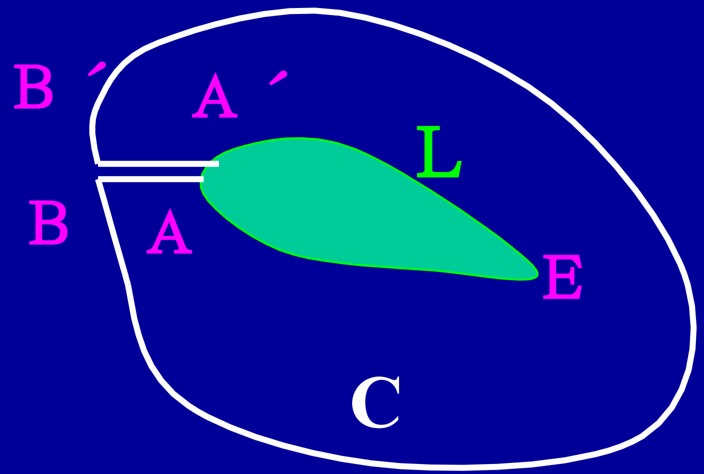
$$\Gamma_c = 2\iint_{\sigma} \omega_n d\sigma = 2\iint_{\sigma} 0 d\sigma = 0$$

反之，若沿任意封闭周线的速度环量等于零，可得处处ω为零的结论。

但沿某闭周线的速度环量为零，并不一定无旋（可能包围强度相同转向相反的旋涡）。

推论二 对于包含一固体在内的双连通域，若流动无旋，则沿包含固体在内的任意两个封闭周线的环量彼此相等。

即 $\Gamma_C + \Gamma_L = 2\iint\limits_{\sigma} \omega_n d\sigma$



则 有：$\Gamma_c + \Gamma_L = 0$

即 $\Gamma_c = \Gamma_L$ (与积分路径方向一致时)

§5-2 汤姆逊定理

假设：

（1）理想流体；

（2）质量力有势；

（3）正压流体（流体密度仅为压力的函数）

汤姆逊定理： 沿流体质点组成的任一封闭流体周线的速度环量*不随时间*而变.

即 $$\frac{d\Gamma}{dt}=0 \qquad (5-14)$$

汤姆逊定理和斯托克斯定理说明：

1）在理想正压流体中，速度环量和旋涡不生不灭。因为不存在切向应力，不能传递旋转运动。

2) 推论: 流场中原来有旋涡和速度环量的，永远有旋涡并保持环量不变，原来没有旋涡和速度环量的，就永远无旋涡和速度环量。

例如，从静止开始的波浪运动，由于流体静止时是无旋的，因此产生波浪以后，波浪运动是无旋运动。

又如绕流物体的流动，远前方流动对物体无扰动，该处流动无旋，接近物体时流动不再是均匀流，根据汤姆逊定理和斯托克斯定理，流动仍保持为无旋运动。

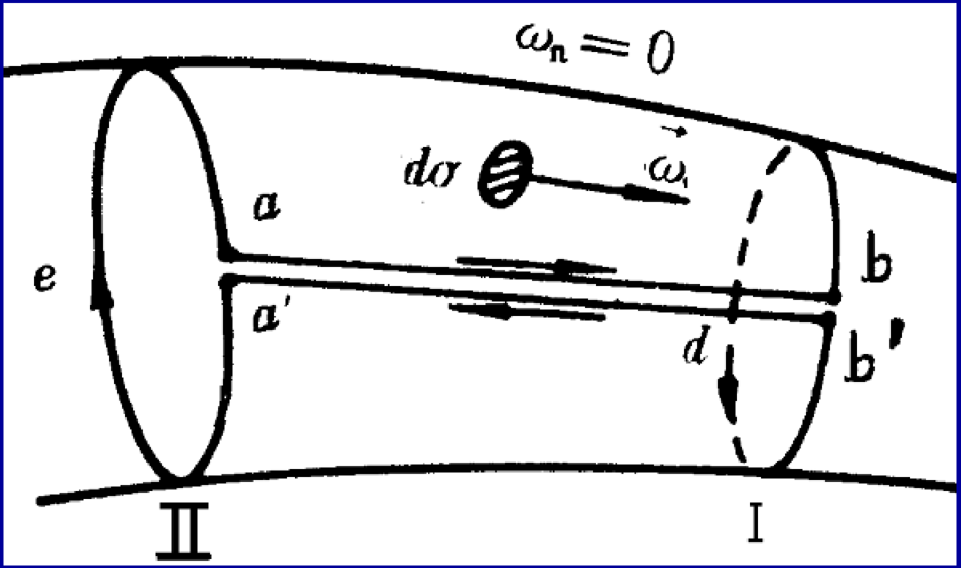
注意：贴近物体表面极薄一层要除外，由于粘性的存在，这极薄一层为有旋运动。

§5-3 海姆霍兹定理

海姆霍兹第一定理 ——涡管强度守恒定理

（同一涡管各截面上的旋涡强度都相同）

海姆霍兹第一定理说明涡管各截面上的旋涡强度都相同。



若涡管很小，$\vec{\omega}$ 垂直于 $d\sigma$，则上式可写成

$\omega d\sigma =$ const.

结论：涡管不能在流体中以尖端形式终止或开始，否则 d $\sigma\to 0$ 时有 $\omega\to\infty$。

因为 $\iint_{\sigma}\omega_n d\sigma=const$

涡管存在的形式：要么终止于流体边界或固体边界，要么自行封闭形成涡环。