三角形中的倒角模型－“8”字模型、“A”字模型与三角板模型

近年来各地中考中常出现一些几何倒角模型，该模型主要涉及高线、角平分线及角度的计算（内角和定理、外角定理等）。熟悉这些模型可以快速得到角的关系，求出所需的角。本专题“8”字模型、“A”字模型与三角板模型进行梳理及对应试题分析，方便掌握。

模型1、“8”字模型

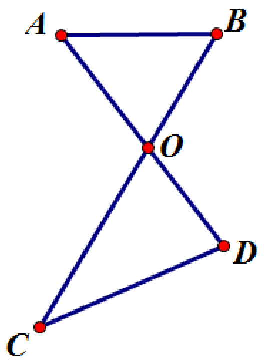


图1

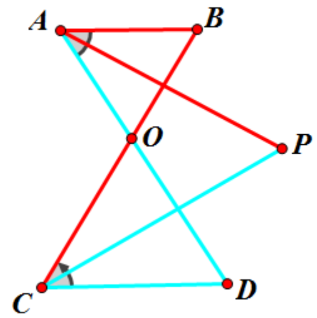


图2

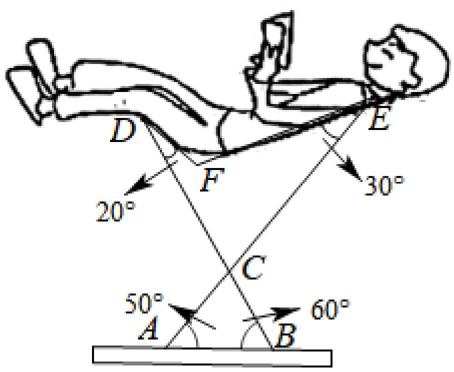
8字模型（基础型）

条件：如图1，AD、BC相交于点O，连接AB、CD；**结论**：①$\angle A+\angle B=\angle C+\angle D$；②$AB+CD<AD+BC$。

8字模型（加角平分线）

条件：如图2，线段AP平分$\angle BAD$，线段CP平分$\angle BCD$；**结论**：$2\angle P=\angle B+\angle D$

例1 (2021·河北·统考中考真题) 下图是可调躺椅示意图（数据如图），AE与BD的交点为C，且$\angle A$，$\angle B$，$\angle E$保持不变．为了舒适，需调整$\angle D$的大小，使$\angle EFD=110°$，则图中$\angle D$应______（填“增加”或“减少”）______度．



【答案】　减少　10

【分析】先通过作辅助线利用三角形外角的性质得到$\angle EDF$与$\angle D$、$\angle E$、$\angle DCE$之间的关系，进行计算即可判断．

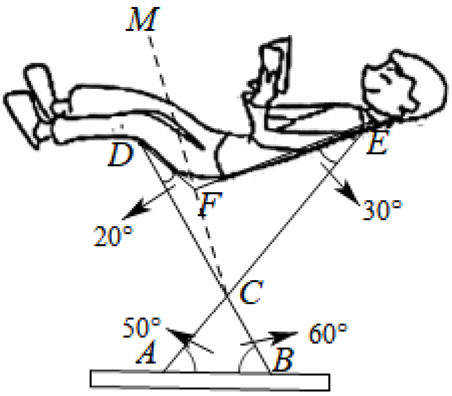
【详解】解：$\because \angle A+\angle B=50°+60°=110°$，$\therefore \angle ACB=180°-110°=70°$，$\therefore \angle DCE=70°$，

如图，连接CF并延长，$\therefore \angle DFM=\angle D+\angle DCF=20°+\angle DCF$，$\angle EFM=\angle E+\angle ECF=30°+\angle ECF$，

$\therefore \angle EFD=\angle DFM+\angle EFM=20°+\angle DCF+30°+\angle ECF=50°+\angle DCE=50°+70°=120°$，

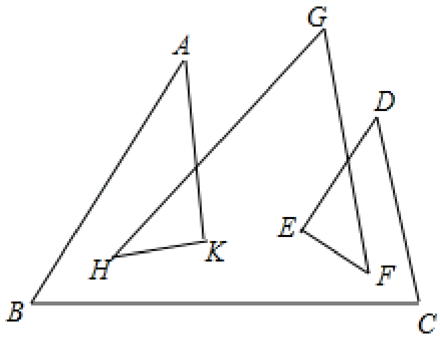
要使 $\angle EFD=110^{\circ}$，则 $\angle EFD$ 减少了 10°，若只调整 $\angle D$ 的大小，由 $\angle EFD=\angle DFM+\angle EFM=\angle D+\angle DCF+\angle E+\angle ECF=\angle D+\angle E+\angle ECD=\angle D+30^{\circ}+70^{\circ}=\angle D+100^{\circ}$，

因此应将 $\angle D$ 减少 10 度；故答案为：①减少；②10.



【点睛】本题考查了三角形外角的性质，同时涉及到了三角形的内角和与对顶角相等的知识；解决本题的关键是理解题意，读懂图形，找出图形中各角之间的关系以及牢记公式建立等式求出所需的角，本题蕴含了数形结合的思想方法.

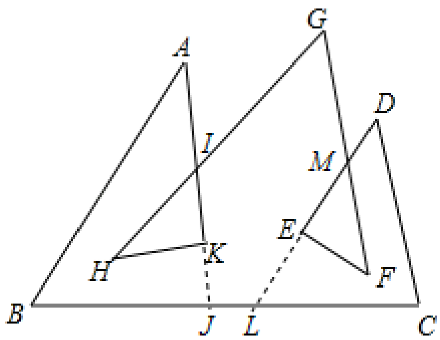
例 2 (2023·浙江·八年级假期作业) 如图，求 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G+\angle H+\angle K$ 的度数.



【答案】540°

【分析】如图所示，由三角形外角的性质可知：$\angle A+\angle B=\angle IJL$，$\angle C+\angle D=\angle MLJ$，$\angle H+\angle K=\angle GIJ$，$\angle E+\angle F=\angle GML$，然后由多边形的内角和公式可求得答案.

【详解】解：如图所示：



由三角形的外角的性质可知：$\angle A+\angle B=\angle IJL$，$\angle C+\angle D=\angle MLJ$，$\angle H+\angle K=\angle GIJ$，$\angle E+\angle F=\angle GML$，

$\therefore \angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G+\angle H+\angle K=\angle IJL+\angle MLJ+\angle GML+\angle G+\angle GIJ=(5-2)\times 180^{\circ}=3\times 180^{\circ}=540^{\circ}$.

【点睛】本题主要考查的是三角形外角的性质和多边形的内角和公式的应用，利用三角形外角和的性质将所求各角的和转化为五边形的内角和是解题的关键

例 3 (2023·山东德州·八年级校考阶段练习) 如图 1，已知线段 AB,CD 相交于点 O，连接 AC,BD，则我们把形如这样的图形称为“8 字型”.

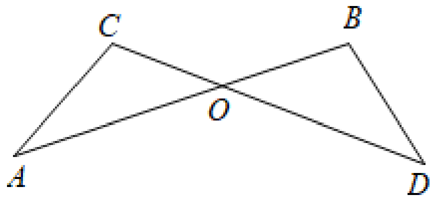


图 1

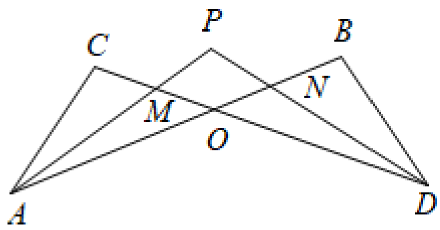


图 2

(1) 求证：$\angle A+\angle C=\angle B+\angle D$；

(2) 如图 2，若 $\angle CAB$ 和 $\angle BDC$ 的平分线 AP 和 DP 相交于点 P，且与 CD,AB 分别相交于点 M、N.

①若 $\angle B=100^\circ,\angle C=120^\circ$，求 $\angle P$ 的度数；

②若角平分线中角的关系改为“$\angle CAP=\frac{1}{3}\angle CAB,\angle CDP=\frac{1}{3}\angle CDB$”，试探究 $\angle P$ 与 $\angle B,\angle C$ 之间的数量关系.

【答案】(1) 见解析 (2) ① 110°；② $\angle P=\frac{1}{3}(\angle B+2\angle C)$

【分析】(1) 利用三角形内角和定理和对顶角相等即可证明；

(2) ①根据角平分线的定义得到 $\angle CAP=\angle BAP$，$\angle BDP=\angle CDP$，再根据“8 字形”得到 $\angle CAP+\angle C=\angle CDP+\angle P,\angle BAP+\angle P=\angle BDP+\angle B$，两等式相减得到 $\angle C-\angle P=\angle P-\angle B$，即 $\angle P=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$，即可求解. ②根据 $\angle CAP=\frac{1}{3}\angle CAB,\angle CDP=\frac{1}{3}\angle CDB$，可得 $\angle BAP=\frac{2}{3}\angle BAC$，$\angle BDP=\frac{2}{3}\angle BDC$，再由三角形内角和定理和对顶角相等，可得 $2(\angle C-\angle P)=\angle P-\angle B$，即可求解.

【详解】(1) 证明：在 $\triangle AOC$ 中，$\angle A+\angle C=180^\circ-\angle AOC$，

在 $\triangle BOD$ 中，$\angle B+\angle D=180^\circ-\angle BOD$，

$\because \angle AOC=\angle BOD$，$\therefore \angle A+\angle C=\angle B+\angle D$；

(2) 解：① $\because \angle CAB$ 和 $\angle BDC$ 的平分线 AP 和 DP 相交于点 P，$\therefore \angle CAP=\angle BAP,\angle BDP=\angle CDP$，

$\because \angle CAP+\angle C=\angle CDP+\angle P$①，$\angle BAP+\angle P=\angle BDP+\angle B$②，

由①－②，得：$\angle C-\angle P=\angle P-\angle B$，即 $\angle P=\frac{1}{2}(\angle C+\angle B)$，

$\because \angle B=100^\circ,\angle C=120^\circ$，$\therefore \angle P=\frac{1}{2}(100^\circ+120^\circ)=110^\circ$；

② $\because \angle CAP=\frac{1}{3}\angle CAB,\angle CDP=\frac{1}{3}\angle CDB$，$\therefore \angle BAP=\frac{2}{3}\angle BAC$，$\angle BDP=\frac{2}{3}\angle BDC$，

$\because \angle CAP+\angle C=\angle CDP+\angle P$，$\angle BAP+\angle P=\angle BDP+\angle B$，

$\therefore \angle C-\angle P=\frac{1}{3}\angle BDC-\frac{1}{3}\angle BAC=\frac{1}{3}(\angle BDC-\angle BAC)$，$\angle P-\angle B=\frac{2}{3}\angle BDC-\frac{2}{3}\angle BAC=\frac{2}{3}(\angle BDC-\angle BAC)$，

$\therefore 2(\angle C-\angle P)=\angle P-\angle B$，$\therefore \angle P=\frac{1}{3}(\angle B+2\angle C))$，故答案为：$\angle P=\frac{1}{3}(\angle B+2\angle C)$.

【点睛】本题考查了三角形内角和、有关角平分线的计算，解题的关键是灵活运用“8 字形”求解.

例 4 (2023春·广东深圳·七年级统考期末)定理:三角形任意两边之和大于第三边.

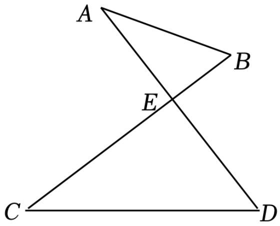


图1

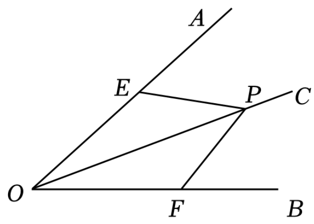


图2

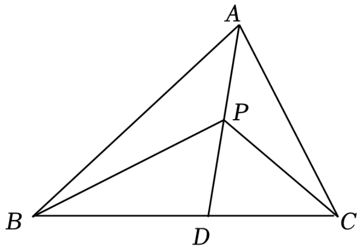


图3

(1) 如图1,线段 AD,BC 交于点 E,连接 AB,CD,判断 $AD+BC$ 与 $AB+CD$ 的大小关系,并说明理由;

(2) 如图2,OC 平分 $\angle AOB$,P 为 OC 上任意一点,在 OA,OB 上截取 $OE=OF$,连接 PE,PF. 求证:$PE=PF$;

(3) 如图3,在 $\triangle ABC$ 中,$AB>AC$,P 为角平分线 AD 上异于端点的一动点,求证:$PB-PC>BD-CD$.

【答案】(1)$AD+BC>AB+CD$;理由见详解 (2) 证明见详解 (3) 证明见详解

【分析】(1) 根据三角形任意两边之和大于第三边知,$AE+BE>AB$,$CE+ED>CD$,两式相加即可得出结论;(2) 根据 SAS 证 $\triangle OEP\cong\triangle OFP$ 即可得出结论;

(3) 在 AB 上取一点 E,使 $AE=AC$,连接 DE 交 BP 于点 F,证 $\triangle APE\cong\triangle APC$,即 $PC=PE$,同理证 $CD=DE$,然后同理(1)得 $PB+CD>PC+BD$,变形不等式即可得出结论.

【详解】(1) 解:$AD+BC>AB+CD$,理由如下:

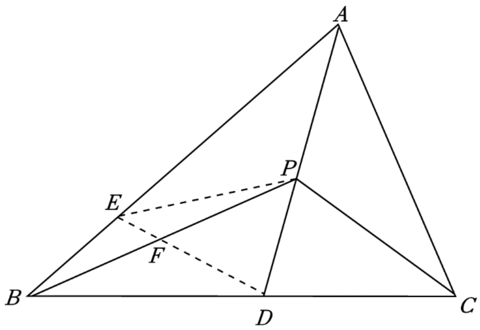
$\because AE+BE>AB$,$CE+ED>CD$,

$\therefore AE+BE+CE+ED>AB+CD$,即 $AD+BC>AB+CD$;

(2) 证明:$\because OC$ 平分 $\angle AOB$,$\therefore \angle EOP=\angle FOP$,

在 $\triangle OEP$ 和 $\triangle OFP$ 中,$\begin{cases}OE=OF\\ \angle EOP=\angle FOP\\ OP=OP\end{cases}$,$\therefore \triangle OEP\cong\triangle OFP(SAS)$,$\therefore PE=PF$;

(3) 证明:在 AB 上取一点 E,使 $AE=AC$,连接 DE 交 BP 于点 F,



$\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的角平分线,$\therefore \angle EAP=\angle CAP$,

在 $\triangle APE$ 和 $\triangle APC$ 中,$\begin{cases}AE=AC\\ \angle EAP=\angle CAP\\ AP=AP\end{cases}$,$\therefore \triangle APE\cong\triangle APC(SAS)$,$\therefore PE=PC$,同理可证 $DE=DC$,

$\because EF+PF>EP$,$BF+FD>BD$,$\therefore EF+PF+BF+FD>EP+BD$,即 $PB+DE>EP+BD$,

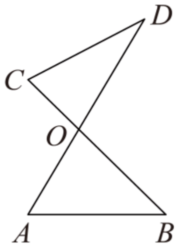
$\therefore PB+CD>PC+BD$,$\therefore PB-PC>BD-CD$.

【点睛】本题主要考查三角形的综合题,熟练掌握三角形的三边关系和全等三角形的判定和性质等知识是解题的关键.

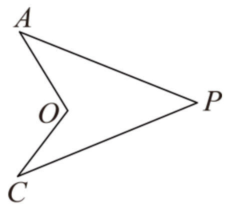
例 5 (2023春·江苏苏州·七年级校联考期中)阅读:基本图形通常是指能够反映一个或几个定理,或者能够反映图形基本规律的几何图形．这些图形以基本概念、基本事实、定理、常用的数学结论和基本规律为基础,图形简单又具有代表性．在几何问题中,熟练把握和灵活构造基本图形,能更好地帮助我们解决问题．

我们将图1①所示的图形称为“8字形”．在这个“8字形”中,存在结论 $\angle A+\angle B=\angle C+\angle D$.

我们将图1②所示的凹四边形称为“飞镖形”．在这个“飞镖形”中,存在结论 $\angle AOC=\angle A+\angle C+\angle P$.



①



②

图1

(1)直接利用上述基本图形中的任意一种,解决问题:

如图2,AP、CP分别平分$\angle BAD$、$\angle BCD$,说明:$\angle P=\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)$.

(2)将图2看作基本图形,直接利用(1)中的结论解决下列问题:

①如图3,直线AP平分$\angle BAD$的外角$\angle FAD$,CP平分$\angle BCD$的外角$\angle BCE$,若$\angle B=30^\circ$,$\angle D=20^\circ$,求$\angle P$的度数．②在图4中,AP平分$\angle BAD$的外角$\angle FAD$,CP平分$\angle BCD$的外角$\angle BCE$,猜想$\angle P$与$\angle B$、$\angle D$的关系(直接写出结果,无需说明理由)．③在图5中,AP平分$\angle BAD$,CP平分$\angle BCD$的外角$\angle BCE$,猜想$\angle P$与$\angle B$、$\angle D$的关系(直接写出结果,无需说明理由).

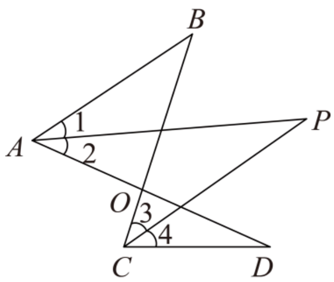


图2

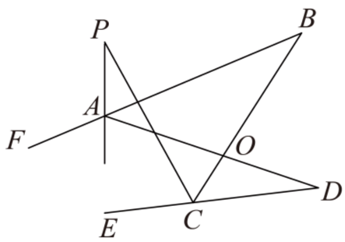


图3

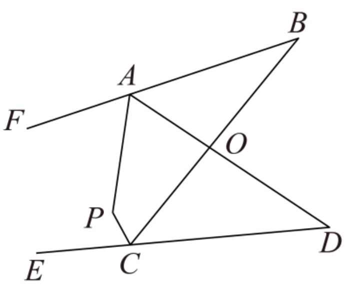


图4

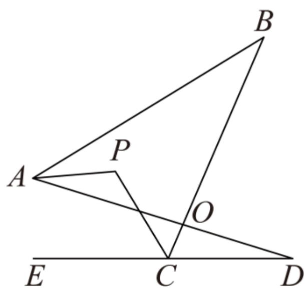


图5

【答案】(1)见解析 (2)①$25^\circ$;②$\angle P=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)$;③$\angle P=90^\circ+\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)$

【分析】(1)根据角平分线的定义可得$\angle 1=\angle 2$,$\angle 3=\angle 4$,再根据题干的结论列出$\angle P+\angle 3=\angle 2+\angle ABC$,$\angle P+\angle 1=\angle 4+\angle ADC$,相加得到$2\angle P+\angle 2+\angle 3=\angle 1+\angle 4+\angle ABC+\angle ADC$,继而得到$2\angle P=\angle ABC+\angle ADC$,即可证明结论;

(2) ①如图所示，分作 $\angle BAD$，$\angle BCD$ 的角平分线交于 H，根据 (1) 的结论得到 $\angle H=\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)=25^{\circ}$，再由角平分线的定义和平角的定义证明 $\angle PCH=90^{\circ}$，$\angle PAH=90^{\circ}$，再根据题干的结论可推出 $\angle P=\angle H=25^{\circ}$；②如图所示，分作 $\angle BAD$，$\angle BCD$ 的角平分线交于 H，由 (1) 的结论可知 $\angle H=\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)$，，同理可得 $\angle PCH=90^{\circ}$，$\angle PAH=90^{\circ}$，则由四边形内角和定理可得 $\angle P=180^{\circ}-\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)$；③由题干的结论可得 $\angle P=\angle B+\angle BAP+\angle BCP$，由角平分线的定义得到 $\angle BAP=\frac{1}{2}\angle BAO$，$\angle BCP=\frac{1}{2}\angle BCE$，再求出 $\angle BCP=90^{\circ}-\frac{1}{2}\angle BCD$，由题干的结论可知 $\angle B+\angle BAO=\angle D+\angle BCD$，由此可得 $\angle P=\angle B+\angle BAP+\angle BCP=90^{\circ}+\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)$.

【详解】(1) 解：∵ AP、CP 分别平分 $\angle BAD$、$\angle BCD$，

∴ $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，∴ $\angle 2+\angle 3=\angle 1+\angle 4$，

由题干的结论得：$\angle P+\angle 3=\angle 2+\angle ABC$，$\angle P+\angle 1=\angle 4+\angle ADC$，

∴ $2\angle P+\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4+\angle ABC+\angle ADC$，∴ $2\angle P=\angle ABC+\angle ADC$，

∴ $\angle P=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ADC)$，即 $\angle P=\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)$；

(2) 解：①如图所示，分作 $\angle BAD$，$\angle BCD$ 的角平分线交于 H，

由 (1) 的结论可知 $\angle H=\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)=25^{\circ}$，

∵ PC，HC 分别平分 $\angle BCE$，$\angle BCD$，∴ $\angle BCP=\frac{1}{2}\angle BCE$，$\angle BCH=\frac{1}{2}\angle BCD$，

∵ $\angle BCD+\angle BCE=180^{\circ}$ ∴ $\angle BCP+\angle BCH=\frac{1}{2}\angle BCD+\frac{1}{2}\angle BCE=90^{\circ}$，

∴ $\angle PCH=90^{\circ}$，同理可得 $\angle PAH=90^{\circ}$，由题干的结论可得 $\angle P+\angle PAH=\angle H+\angle PCH$，

∴ $\angle P=\angle H=25^{\circ}$；

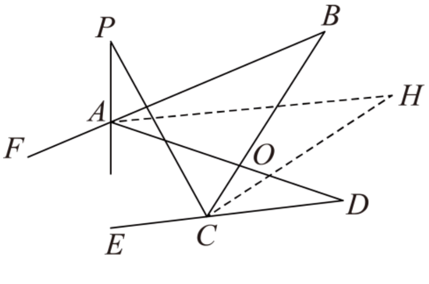


图3

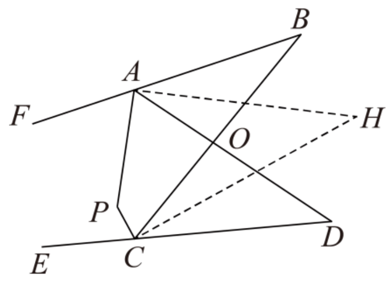


图4

②如图所示，分作 $\angle BAD$，$\angle BCD$ 的角平分线交于 H，

由 (1) 的结论可知 $\angle H=\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)$，，同理可得 $\angle PCH=90^{\circ}$，$\angle PAH=90^{\circ}$，

∴ $\angle P=360^{\circ}-\angle PAH-\angle PCH-\angle H=180^{\circ}-\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)$；

③由题干的结论可得 $\angle P=\angle B+\angle BAP+\angle BCP$，

∵ AP 平分 $\angle BAD$，CP 平分 $\angle BCD$ 的外角 $\angle BCE$，

∴ $\angle BAP=\frac{1}{2}\angle BAO$，$\angle BCP=\frac{1}{2}\angle BCE$，

∵ $\angle BCE=180^{\circ}-\angle BCD$，∴ $\angle BCP=90^{\circ}-\frac{1}{2}\angle BCD$，

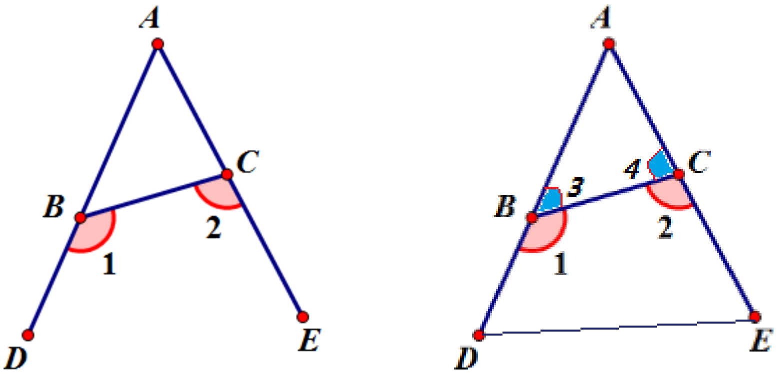
由题干的结论可知 $\angle B+\angle BAO=\angle D+\angle BCD$，∴ $\angle BAO=\angle D+\angle BCD-\angle B$，

$\therefore \angle P=\angle B+\angle BAP+\angle BCP=\angle B+\frac{1}{2}\angle BAO+90^{\circ}-\frac{1}{2}\angle BCD$

$=\angle B+\frac{1}{2}\angle D+\frac{1}{2}\angle BCD-\frac{1}{2}\angle B+90^{\circ}-\frac{1}{2}\angle BCD=90^{\circ}+\frac{1}{2}(\angle B+\angle D)$.

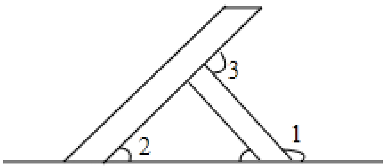
【点睛】本题考查了三角形的内角和定理,角平分线的定义,多边形内角和定理,准确识图并运用好“8”字形的结论,然后列出两个等式是解题的关键,用阿拉伯数字加弧线表示角更形象直观.

模型2、“A”字模型



结论:① $\angle 3+\angle 4=\angle D+\angle E$;② $\angle 1+\angle 2=\angle A+180^{\circ}$ 。

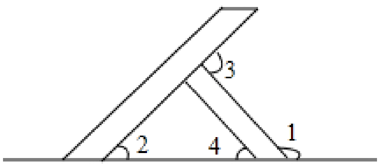
例 6 (2023·浙江·八年级假期作业)如图是某建筑工地上的人字架,若 $\angle 1=120^{\circ}$,那么 $\angle 3-\angle 2$ 的度数为______.



【答案】60°

【分析】根据平角的定义求出 $\angle 4$,再利用三角形的外角的性质即可解决问题.

【详解】解:如图

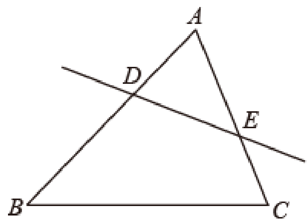


$\because \angle 1+\angle 4=180^{\circ}$, $\angle 1=120^{\circ}$, $\therefore \angle 4=60^{\circ}$,

$\because \angle 3=\angle 2+\angle 4$, $\therefore \angle 3-\angle 2=\angle 4=60^{\circ}$,故答案为:$60^{\circ}$.

【点睛】本题考查三角形外角的性质、平角的性质等知识,解题的关键是熟练掌握基本知识,属于中考基

例 7 (2023·绵阳市·八年级假期作业)如图,$\triangle ABC$ 中,$\angle A=65^{\circ}$,直线 DE 交 AB 于点 D,交 AC 于点 E,则 $\angle BDE+\angle CED=$(　).



A. 180°　　B. 215°　　C. 235°　　D. 245°

【答案】D

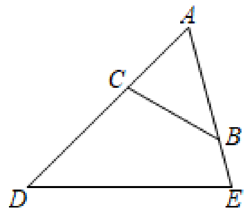
【分析】根据三角形内角和定理求出 $\angle ADE+\angle AED$,根据平角的概念计算即可.

【详解】解:$\because \angle A=65^{\circ}$, $\therefore \angle ADE+\angle AED=180^{\circ}-65^{\circ}=115^{\circ}$,

$\therefore \angle BDE+\angle CED=360^{\circ}-115^{\circ}=245^{\circ}$,故选:$D$.

【点睛】本题考查的是三角形内角和定理的应用,掌握三角形内角和等于180°是解题的关键.

例 8 (2022·福建泉州·九年级校考期中) 如图,$\triangle ABC\backsim\triangle ADE$,若 $\angle A=60^{\circ}$,$\angle ABC=45^{\circ}$,那么 $\angle E=$ (　　)



A. 75°　　B. 105°　　C. 60°　　D. 45°

【答案】A

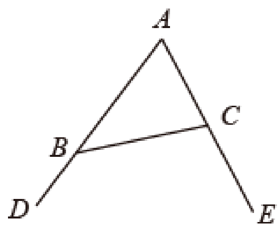
【分析】根据相似三角形的性质求出 $\angle D$,再根据三角形内角和定理计算即可.

【详解】解:$\because \triangle ABC\backsim\triangle ADE$, $\therefore \angle ABC=\angle D=45^{\circ}$,

$\because \angle A=60^{\circ}$, $\therefore \angle E=180^{\circ}-\angle A-\angle D=180^{\circ}-60^{\circ}-45^{\circ}=75^{\circ}$. 故选:$A$.

【点睛】本题主要考查了相似三角形的性质,熟知相似三角形的对应角相等是解题的关键.

例 9 (2023秋·广西·八年级专题练习) 如图所示,$\angle DAE$ 的两边上各有一点 B,C,连接 BC,求证 $\angle DBC+\angle ECB=180^{\circ}+\angle A$.



【答案】见解析

【分析】根据三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和证明即可.

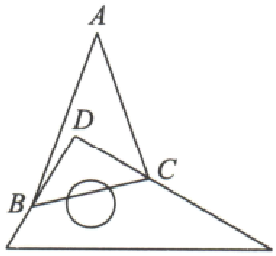
【详解】解:$\because \angle DBC$ 和 $\angle ECB$ 是 $\triangle ABC$ 的外角, $\therefore \angle DBC=\angle A+\angle ACB$, $\angle ECB=\angle A+\angle ABC$.

又 $\because \angle A+\angle ABC+\angle ACB=180^{\circ}$, $\therefore \angle DBC+\angle ECB=\angle A+\angle ACB+\angle ABC+\angle A=180^{\circ}+\angle A$.

【点睛】本题考查三角形外角的性质,熟知三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和是解题的关键.

例 10 (2023·广东八年级课时练习) 如图,已知在 $\triangle ABC$ 中,$\angle A=40^{\circ}$,现将一块直角三角板放在 $\triangle ABC$ 上,

使三角板的两条直角边分别经过点 B,C，直角顶点 D 落在 $\triangle ABC$ 的内部，则 $\angle ABD+\angle ACD=(\quad)$.



A. 90°　　B. 60°　　C. 50°　　D. 40°

【答案】C

【分析】由三角形内角和定理可得 $\angle ABC+\angle ACB+\angle A=180^{\circ}$，即 $\angle ABC+\angle ACB=180-\angle A=140^{\circ}$，再说明 $\angle DBC+\angle DCB=90^{\circ}$，进而完成解答.

【详解】解：$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=40^{\circ}$ $\therefore \angle ABC+\angle ACB=180-\angle A=140^{\circ}$

$\because$ 在 $\triangle DBC$ 中，$\angle BDC=90^{\circ}$ $\therefore \angle DBC+\angle DCB=180^{\circ}-90^{\circ}=90^{\circ}$ $\therefore \angle ABD+\angle ACD=40^{\circ}-90^{\circ}=50^{\circ}$

故选 C.

【点睛】本题主要考查三角形内角和定理，灵活运用三角形内角和定理成为解答本题的关键.

例 11 (2023 秋·河南信阳·八年级校联考期末) (1) 如图 1，$\triangle ABC$ 为直角三角形，$\angle A=90^{\circ}$，若沿图中虚线剪去 $\angle A$，则 $\angle 1+\angle 2=$ ______；

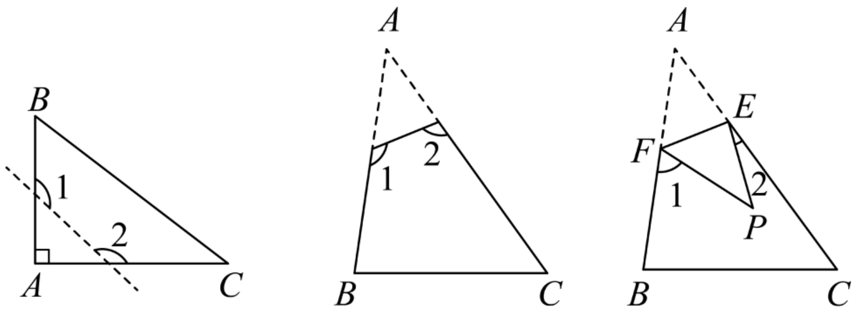


图1　　图2　　图3

(2) 如图 2，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=40^{\circ}$，剪去 $\angle A$ 后成为四边形，则 $\angle 1+\angle 2=$ ______；

(3) 如图 2，根据 (1) 和 (2) 的求解过程，请归纳 $\angle 1+\angle 2$ 与 $\angle A$ 的关系是 ______；

(4) 若没有剪去 $\angle A$，而是将 $\angle A$ 折成如图 3 的形状，试探究 $\angle 1+\angle 2$ 与 $\angle A$ 的关系，并说明理由.

【答案】(1)270°; (2)220°; (3)$\angle 1+\angle 2=180^{\circ}+\angle A$; (4)$\angle 1+\angle 2=2\angle A$，理由见解析

【分析】(1) 根据三角形的内角和为 180°，三角形的外角和定理，则 $\angle 1=\angle A+\angle AFE$，$\angle 2=\angle A+\angle AEF$，$\angle AFE+\angle AEF=90^{\circ}$，即可；

(2) 根据三角形的内角和为 180°，三角形的外角和定理，则 $\angle 1=\angle AEF+\angle A$，$\angle 2=\angle AFE+\angle A$，$\angle AFE+\angle AEF=140^{\circ}$，即可；

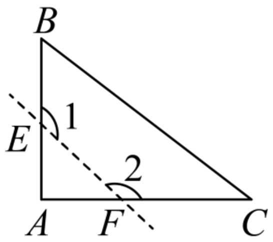
(3) 根据 (1) 和 (2) 可知，$\angle 1+\angle 2=2\angle A+\angle AFE+\angle AEF$，根据 $\angle A+\angle AFE+\angle AEF=180^{\circ}$，即可；

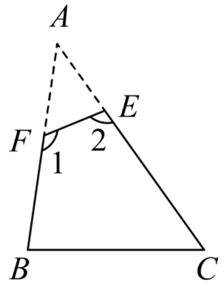
(4) 根据折叠的性质，则 $\triangle AFE\cong\triangle PFE$，根据全等三角形的性质，三角形内角和，平角的性质，则 $\angle 1+2\angle AFE=180^{\circ}$，$\angle 2+2\angle AEF=180^{\circ}$，$\angle A+\angle AFE+\angle AEF=180^{\circ}$，再根据等量代换，即可.

【详解】(1)$\triangle ABC$ 为直角三角形，$\angle A=90^{\circ}$，$\therefore \angle AFE+\angle AEF=90^{\circ}$，

$\because \angle 1=\angle A+\angle AFE$，$\angle 2=\angle A+\angle AEF$，$\therefore \angle 1+\angle 2=2\angle A+\angle AFE+\angle AEF$，

$\therefore \angle 1+\angle 2=2\times 90^{\circ}+90^{\circ}=270^{\circ}$，故答案为：$270^{\circ}$.





(2) $\because \angle A=40^\circ$, $\therefore \angle AFE+\angle AEF=140^\circ$,

$\because \angle 1=\angle AEF+\angle A$, $\angle 2=\angle AFE+\angle A$, $\therefore \angle 1+\angle 2=2\angle A+\angle AFE+\angle AEF$,

$\therefore \angle 1+\angle 2=2\times 40^\circ+140^\circ=220^\circ$,故答案为:$220^\circ$.

(3) 由 (1) 和 (2) 得, $\angle 1+\angle 2=2\angle A+\angle AFE+\angle AEF$,

$\because \angle A+\angle AFE+\angle AEF=180^\circ$, $\therefore \angle 1+\angle 2=\angle A+\angle A+\angle AFE+\angle AEF$, $\therefore \angle 1+\angle 2=\angle A+180^\circ$.

(4)$\angle 1+\angle 2=2\angle A$,理由见下:由题意得, $\triangle AFE\cong\triangle PFE$, $\therefore \angle AFE=\angle PFE$, $\angle AEF=\angle PEF$,

$\therefore \angle 1+2\angle AFE=180^\circ$, $\angle 2+2\angle AEF=180^\circ$, $\therefore \angle 1+\angle 2+2(\angle AFE+\angle AEF)=360^\circ$,

$\because \angle A+\angle AFE+\angle AEF=180^\circ$, $\therefore \angle AFE+\angle AEF=180^\circ-\angle A$,

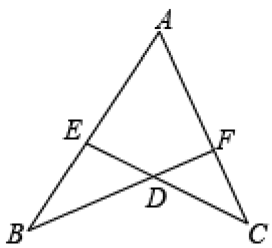
$\therefore \angle 1+\angle 2+2(180^\circ-\angle A)=360^\circ$, $\therefore \angle 1+\angle 2-2\angle A=0$, $\therefore \angle 1+\angle 2=2\angle A$.

【点睛】本题考查三角形的知识,解题的关键是掌握全等三角形的性质,三角形的内角和和三角形的外角和定理.

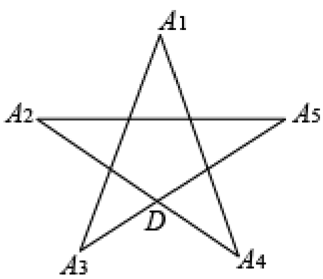
例 12 (2022秋·河北邯郸·八年级统考期中) 利用“模型”解决几何综合问题往往会取得事半功倍的效果.

几何模型:如图 (1),我们称它为“A”型图案,易证明:$\angle EDF = \angle A + \angle B + \angle C$;

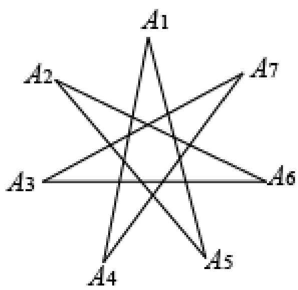
应用上面模型解决问题:



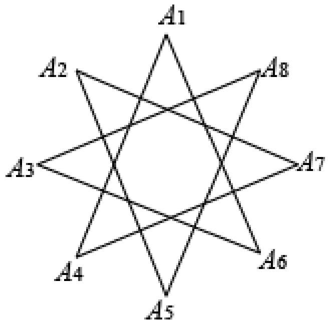
图（1）



图（2）



图（3）



图（4）

(1) 如图 (2),“五角星”形,求 $\angle A_1+\angle A_2+\angle A_3+\angle A_4+\angle A_5=$?

分析:图中 $A_1A_3DA_4$ 是“A”型图,于是 $\angle A_2DA_5=\angle A_1+\angle A_3+\angle A_4$,所以 $\angle A_1+\angle A_2+\angle A_3+\angle A_4+\angle A_5=$ _;

(2) 如图 (3),“七角星”形,求 $\angle A_1+\angle A_2+\angle A_3+\angle A_4+\angle A_5+\angle A_6+\angle A_7$;

(3) 如图 (4),“八角星”形,可以求得:$\angle A_1+\angle A_2+\angle A_3+\angle A_4+\angle A_5+\angle A_6+\angle A_7+\angle A_8=$ _;

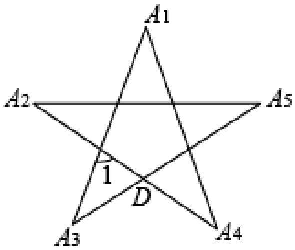
【答案】(1)180° (2)180° (3)360°

【分析】(1) 根据三角形外角的性质把 5 个角转化到一个三角形中可得答案;

(2) 根据三角形外角的性质把 7 个角转化到一个三角形中可得答案.

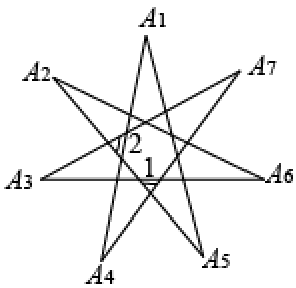
(3) 根据三角形外角的性质把 8 个角转化到一个四边形中可得答案.

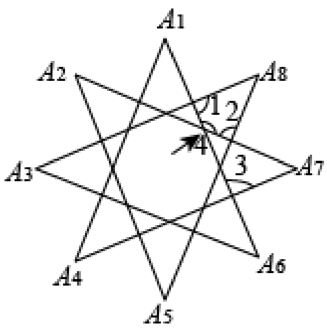
【详解】(1) 解:如图,



由三角形外角的性质可得,$\angle 1=\angle A_1+\angle A_4$,$\because \angle A_2DA_5=\angle 1+\angle A_3$,$\therefore \angle A_2DA_5=\angle A_1+\angle A_4+\angle A_3$,
$\because \angle A_2DA_5+\angle A_2+\angle A_5=180°$,$\therefore \angle A_1+\angle A_2+\angle A_3+\angle A_4+\angle A_5=180°$,故答案为:180°;

(2) 如图,由 (1) 得,$\angle 1=\angle A_1+\angle A_4+\angle A_5$,$\angle 2=\angle A_2+\angle A_3+\angle A_6$,
$\because \angle 1+\angle 2+\angle A_7=180°$,$\therefore \angle A_1+\angle A_2+\angle A_3+\angle A_4+\angle A_5+\angle A_6+\angle A_7=180°$.





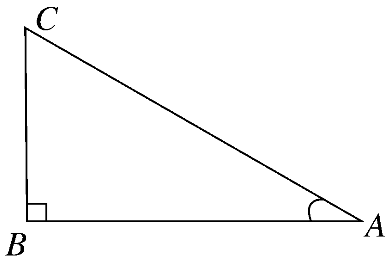
(3) 如图,由三角形外角的性质可得,$\angle 3=\angle A_1+\angle A_4$,$\angle 2=\angle A_2+\angle A_5$,$\angle 1=\angle A_3+\angle A_6$,$\angle 3+\angle A_7=\angle 4$
$\because \angle 1+\angle 2+\angle 4+\angle A_8=360°$ $\therefore A_1+\angle A_2+\angle A_3+\angle A_4+\angle A_5+\angle A_6+\angle A_7+\angle A_8=360°$,故答案为:360°.

【点睛】本题考查多边形的内角和与三角形外角的性质,能够根据三角形外角的性质进行转化是解题关键.

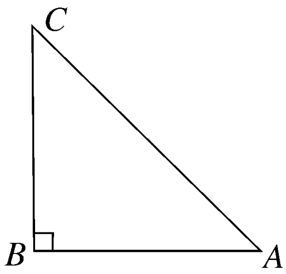
模型 3、三角板模型

【模型解读】由一副三角板拼凑出的几个图形我们称他们为三角板模型。

图①中:$\angle A=30°$,$\angle C=60°$,图②中:$\angle A=\angle C=45°$,

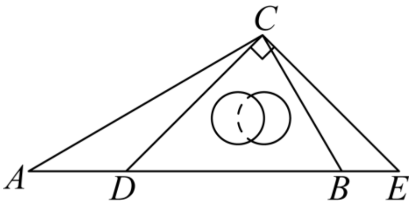


图①



图②

例 13 (2023·山西吕梁·联考模拟预测) 如图：$Rt\triangle ABC$和$Rt\triangle DCE$是两块直角三角尺，两直角三角尺的斜边AB、DE在同一直线上，其中$\angle ACB=\angle DCE=90^{\circ}$，$\angle CAB=30^{\circ}$，$\angle CED=45^{\circ}$，则$\angle ACD$的度数为（　　）



A. 10°　　B. 15°　　C. 20°　　D. 30°

【答案】B

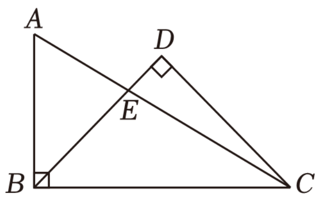
【分析】根据三角形外角的性质求解即可.

【详解】解：$\because$ 由题意得$\angle CAB=30^{\circ}$，$\angle CDE=\angle CED=45^{\circ}$，

$\therefore \angle ACD=\angle CDE-\angle CAB=45^{\circ}-30^{\circ}=15^{\circ}$，故选：$B$

【点睛】本题考查了三角形的外角的性质，解决本题的关键是熟练掌握三角形外角的性质，即三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角和.

例 14 (2023春·安徽·九年级专题练习) 将两块直角三角尺按如图摆放，其中$\angle ABC=\angle D=90^{\circ}$，$\angle A=60^{\circ}$，$\angle DCB=45^{\circ}$，若$AC$，$BD$相交于点$E$，则$\angle AED$的大小为（　　）



A. 110°　　B. 105°　　C. 95°　　D. 75°

【答案】B

【分析】在$\triangle BEC$中，利用三角形内角和定理，可求出$\angle BEC$的度数，再结合对顶角相等，即可得出$\angle AED$的度数.

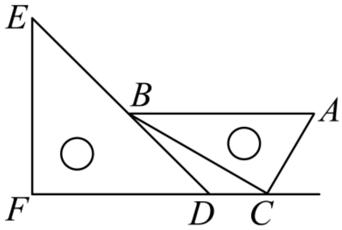
【详解】解：在$\triangle BEC$中，$\angle EBC=45^{\circ}$，$\angle ECB=30^{\circ}$，

$\therefore \angle BEC=180^{\circ}-\angle EBC-\angle ECB=180^{\circ}-45^{\circ}-30^{\circ}=105^{\circ}$，$\therefore \angle AED=\angle BEC=105^{\circ}$. 故选：$B$.

【点睛】本题考查三角形内角和定理以及对顶角，牢记“三角形内角和是180°”及“对顶角相等”是解题的关键.

例 15 (2023·陕西咸阳·校考一模) 如图，将一副三角尺按图中所示位置摆放，点C在FD的延长线上，点C、F

分别为直角顶点，且 $\angle A=60^{\circ}$，$\angle E=45^{\circ}$，若 $AB\parallel CF$，则 $\angle CBD$ 的度数是（　　）



A. 15°　　B. 20°　　C. 25°　　D. 30°

【答案】A

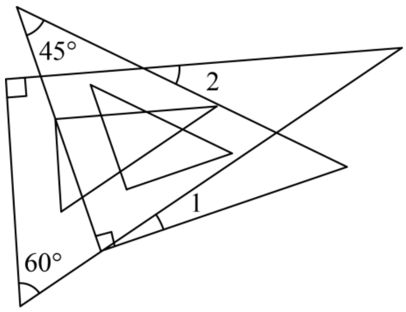
【分析】由 $AB\parallel CF$，利用“两直线平行，内错角相等”可求出 $\angle BCD=30^{\circ}$，再利用三角形的外角性质，即可求出 $\angle CBD$ 的度数.

【详解】解：$\because AB\parallel CF$，$\therefore \angle BCD=\angle ABC=30^{\circ}$.

$\because \angle BDF$ 是 $\triangle BCD$ 的外角，$\therefore \angle CBD=\angle EDF-\angle BCD=45^{\circ}-30^{\circ}=15^{\circ}$. 故选：$A$.

【点睛】本题考查了平行线的性质以及三角形的外角性质，牢记“三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和”及“两直线平行，内错角相等”是解题的关键.

例 16 (2023·江苏盐城·统考二模) 一副三角板如图所示摆放，其中含 45° 角的直角三角板的直角顶点在另一个三角板的斜边上，若 $\angle 1=18^{\circ}$，则 $\angle 2$ 的度数是（　　）

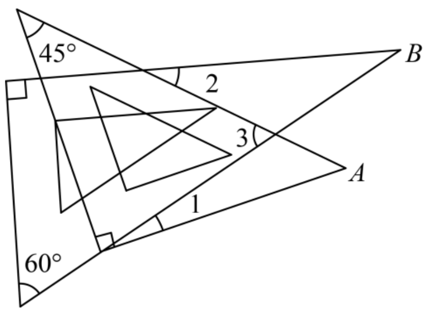


A. 18°　　B. 23°　　C. 28°　　D. 33°

【答案】D

【分析】利用三角形的外角性质进行求解即可.

【详解】解：如图，由题意得：$\angle A=45^{\circ}$，$\angle B=30^{\circ}$，

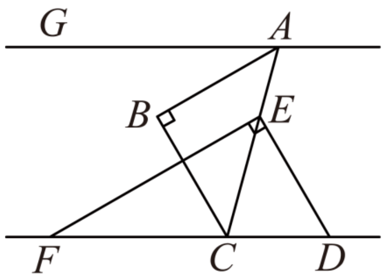


$\because \angle 1=18^{\circ}$，$\therefore \angle 3=\angle 1+\angle A=63^{\circ}$，$\therefore \angle 2=\angle 3-\angle B=33^{\circ}$. 故选：$D$.

【点睛】本题考查三角形的外角性质，解答的关键是明确三角形的外角等于与其不相邻的两个内角之和.

例 17 (2023春·陕西渭南·七年级统考期中) 如图，$GA\parallel FD$，一副直角三角板 ABC 和 DEF 如图摆放，$\angle EDF=60^{\circ}$，$\angle BAC=45^{\circ}$，若 $BC\parallel DE$，则下列结论：① $\angle GAB=30^{\circ}$；② $AB\parallel EF$；③ $\angle AED=120^{\circ}$；④ EC 平

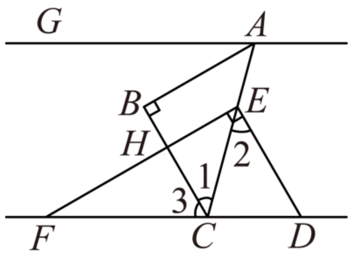
分 $\angle DEF$，正确的有______．（填序号）



【答案】①②④

【分析】如图，由题意得：$\angle B=\angle DEF=90^\circ$，$\angle 1=\angle BAC=45^\circ$，根据平行线的性质求出 $\angle 3=\angle EDF=60^\circ$，$\angle 2=\angle 1=45^\circ$，进而可求出 $\angle AED$，$\angle FEC$，即可判断③④；根据三角形的内角和定理、平行线的性质和角的和差求出 $\angle GAB=30^\circ$，即可判断①；求出 $\angle B=\angle EHC=90^\circ$，进而可判断②．

【详解】解：如图，由题意得：$\angle B=\angle DEF=90^\circ$，$\angle 1=\angle BAC=45^\circ$，$\because \angle EDF=60^\circ$，$\therefore \angle DFE=30^\circ$，



$\because BC /\!/ DE$，$\therefore \angle 3=\angle EDF=60^\circ$，$\angle 2=\angle 1=45^\circ$，

$\therefore \angle DCE=180^\circ-60^\circ-45^\circ=75^\circ$，$\angle AED=180^\circ-\angle 2=135^\circ$，故结论③错误；

$\because \angle FEC=90^\circ-\angle CED=45^\circ$，$\therefore \angle FEC=\angle CED=45^\circ$，$\therefore EC$ 平分 $\angle DEF$，故结论④正确；

$\because GA /\!/ FD$，$\therefore \angle GAC=\angle DCE=75^\circ$，$\therefore \angle GAB=\angle GAC-\angle BAC=75^\circ-45^\circ=30^\circ$，故结论①正确；

$\because \angle EHC=\angle 3+\angle DFE=90^\circ$，$\therefore \angle B=\angle EHC$，$\therefore AB /\!/ EF$，故结论②正确；故答案为：①②④．

【点睛】本题考查了平行线的判定和性质、三角形的内角和定理以及三角形的外角性质等知识，熟练掌握三角形的相关知识和平行线的判定和性质是解题的关键．

例 18（2023春·湖南衡阳·七年级统考期末）一副三角板如图1摆放，$\angle C=\angle DFE=90^\circ$，$\angle B=30^\circ$，$\angle E=45^\circ$，点 F 在 BC 上，点 A 在 DF 上，且 AF 平分 $\angle CAB$，现将三角板 DFE 绕点 F 以每秒 5° 的速度顺时针旋转（当点 D 落在射线 FB 上时停止旋转），设旋转时间为 t 秒．

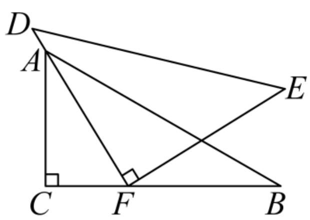


图1

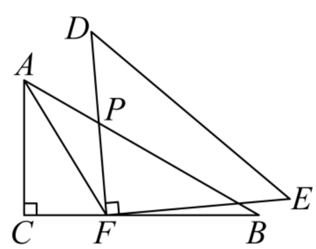


图2

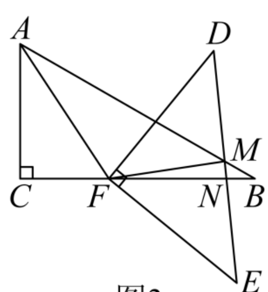


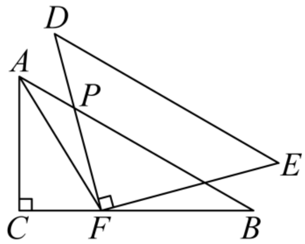
图3

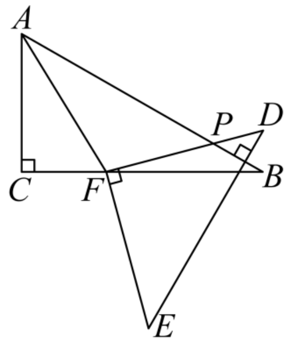
(1) 当 $t=$______秒时，$DE /\!/ AB$；当 $t=$______秒时，$DE\perp AB$；

(2) 在旋转过程中，DF 与 AB 的交点记为 P，如图2，若 $\triangle AFP$ 有两个内角相等，求 t 的值；

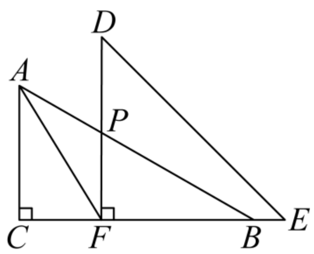
(3) 当边 DE 与边 AB、BC 分别交于点 M、N 时，如图3，连接 AE，设 $\angle BAE=x^\circ$，$\angle AED=y^\circ$，$\angle DFB=z^\circ$，试问 $x+y+z$ 是否为定值？若是，请求出定值；若不是，请说明理由．

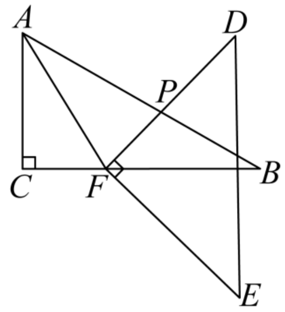
【答案】(1)3; 21　(2) 当 t 为 6 或 15 或 24 时, $\triangle AFP$ 有两个内角相等
(3) 是定值, $x+y+z=105$,理由见解析
【分析】(1) 由平行和垂直求出旋转角,结合旋转速度求出旋转时间;
(2) 画出图形,分类讨论,① $\angle PAF=\angle PFA$;② $\angle PAF=\angle APF$;③ $\angle PFA=\angle APF$,求出旋转角,再求出 t 值; (3) 找出与 $\angle BAE$, $\angle AED$, $\angle DFB$,有关的数量关系,再把无关的角消去,得出结论.
【详解】(1) 如图,当 $DE\parallel AB$ 时, $\angle EDF=\angle BPF=45^{\circ}$

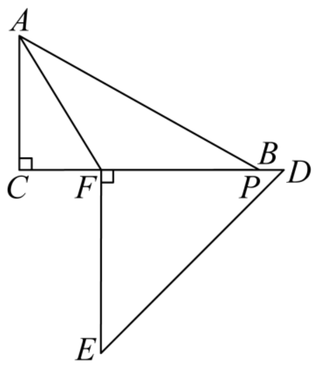




$\because AF$ 平分 $\angle BAC$, $\angle BAC=60^{\circ}$, $\therefore \angle BAF=30^{\circ}$,
又 $\because \angle BPF$ 为 $\triangle APF$ 的一个外角, $\therefore \angle PFA=\angle BPF-\angle BAF=45^{\circ}-30^{\circ}=15^{\circ}$, $\therefore t=\dfrac{15^{\circ}}{5^{\circ}}=3$;
如图,当 $DE\perp AB$ 时, $\angle DPB=180^{\circ}-90^{\circ}-45^{\circ}=45^{\circ}$, $\therefore \angle APF=\angle DPB=45^{\circ}$,
$\because \angle BAF=30^{\circ}$, $\therefore \angle AFP=180^{\circ}-\angle APF-\angle BAF=180^{\circ}-45^{\circ}-30^{\circ}=105^{\circ}$, $\therefore t=\dfrac{105^{\circ}}{5^{\circ}}=21$. 故答案为: 3; 21.
(2) ①如图,当 $\angle PAF=\angle PFA$ 时,





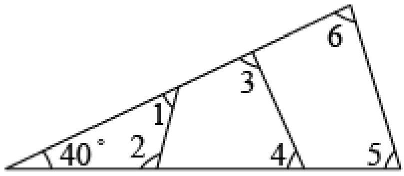


$\because \angle PAF=30^{\circ}$, $\therefore \angle PFA=30^{\circ}$, $\therefore t=6$;
②如图,当 $\angle PFA=\angle APF$ 时, $\because \angle PAF=30^{\circ}$, $\angle PAF+\angle PFA+\angle APF=180^{\circ}$,
$\therefore \angle AFP=\dfrac{1}{2}(180^{\circ}-30^{\circ})=75^{\circ}$, $\therefore t=15$;
③如图,当 $\angle PAF=\angle APF$ 时, $\angle AFP=180^{\circ}-\angle PAF-\angle APF=180^{\circ}-30^{\circ}-30^{\circ}=120^{\circ}$, $\therefore t=24$,
综上所述:当 t 为 6 或 15 或 24 时, $\triangle AFP$ 有两个内角相等.
(3) $x+y+z$ 是为定值 105,理由如下:
$\because \angle BMN$ 是 $\triangle AME$ 的一个外角, $\angle MNB$ 是 $\triangle DFN$ 的一个外角,
$\therefore \angle BMN=\angle BAE+\angle AED=x^{\circ}+y^{\circ}$, $\angle MNB=\angle DFB+\angle D=z^{\circ}+45^{\circ}$,
又 $\because \angle BMN+\angle MNB+\angle B=180^{\circ}$, $\angle B=30^{\circ}$, $\therefore x^{\circ}+y^{\circ}+z^{\circ}+45^{\circ}+30^{\circ}=180^{\circ}$,
$\therefore x^{\circ}+y^{\circ}+z^{\circ}=105^{\circ}$, $\therefore x+y+z=105$.
【点睛】本题以求三角形旋转时间为背景,考查了学生对图形的旋转变换、平行的性质、垂直的性质和求等

腰三角形内角的掌握情况，第 (2) 问分情况讨论是解决问题的关键，第 (3) 问找到三个角之间的关系是关键.

课后专项训练

题目 1 (2023·广东江门·八年级校考期中) 如下图，$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6$ 的度数为（　　）

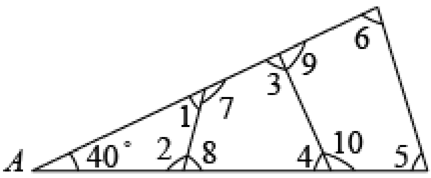


A. 540°　　B. 500°　　C. 460°　　D. 420°

【答案】D

【分析】根据三角形内角和定理可得 $\angle 1+\angle 2=140^{\circ}$，根据平角的定义和四边形内角和可得 $\angle 3+\angle 4=\angle 1+\angle 2=140^{\circ}$，同理可得 $\angle 5+\angle 6=\angle 3+\angle 4=140^{\circ}$，据此即可求解.

【详解】解：如图所示，



$\because \angle A=40^{\circ}$，$\therefore \angle 1+\angle 2=180^{\circ}-40^{\circ}=140^{\circ}$，

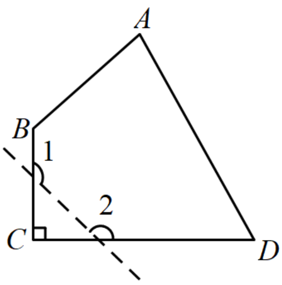
$\because \angle 1+\angle 7=180^{\circ}$，$\angle 2+\angle 8=180^{\circ}$，$\therefore \angle 1+\angle 2+\angle 7+\angle 8=360^{\circ}$

$\because \angle 7+\angle 8+\angle 3+\angle 4=360^{\circ} \therefore \angle 3+\angle 4=\angle 1+\angle 2=140^{\circ}$，

同理可得：$\angle 5+\angle 6=\angle 3+\angle 4=140^{\circ}$，$\therefore \angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6=140^{\circ}\times 3=420^{\circ}$，故选：$D$.

【点睛】本题考查了三角形内角和定理，四边形内角和定理，熟知四边形内角和等于 360° 是解题的关键.

题目 2 (2023 春·江苏·七年级专题练习) 如图，已知四边形 $ABCD$ 中，$\angle C=90^{\circ}$，若沿图中虚线剪去 $\angle C$，则 $\angle 1+\angle 2$ 等于（　　）



A. 90°　　B. 135°　　C. 270°　　D. 315°

【答案】C

【分析】运用内外角之间的关系可得 $\angle 1+\angle 2=270^{\circ}$.

【详解】解：$\because$ 三角形的内角和等于 180°，$\therefore$ 可得 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 的邻补角之和等于 90°，

$\therefore \angle 1+\angle 2=2\times 180^{\circ}-90^{\circ}=270^{\circ}$，故选：$C$.

【点睛】本题考查了三角形的内外角之间的关系，三角形的内角和等于 180°，解题的关键是理解题意，掌握