思维拓展03 函数和不等式中的恒成立和有解问题（精讲+精练）

考点归纳

①一元二次不等式中的恒成立和有解问题
②基本不等式中的恒成立问题
③函数不等式中的恒成立和有解问题

一、必备知识整合

一、恒成立和有解问题思路一览

设函数 $f(x)$ 的值域为 (a,b) 或 $[a,b]$，或 $(a,b]$ 或 $[a,b)$ 中之一种，则

①若 $\lambda \geq f(x)$ 恒成立（即 $\lambda < f(x)$ 无解），则 $\lambda \geq [f(x)]_{\max}$；

②若 $\lambda \leq f(x)$ 恒成立（即 $\lambda > f(x)$ 无解），则 $\lambda \leq [f(x)]_{\min}$；

③若 $\lambda \geq f(x)$ 有解（即存在 x 使得 $\lambda \geq f(x)$ 成立），则 $\lambda \geq [f(x)]_{\min}$；

④若 $\lambda \leq f(x)$ 有解（即存在 x 使得 $\lambda \leq f(x)$ 成立），则 $\lambda \leq [f(x)]_{\max}$；

⑤若 $\lambda = f(x)$ 有解（即 $\lambda \neq f(x)$ 无解），则 $\lambda \in \{y \mid y = f(x)\}$；

⑥若 $\lambda = f(x)$ 无解（即 $\lambda \neq f(x)$ 有解），则 $\lambda \in C_u\{y \mid y = f(x)\}$.

【说明】（1）一般来说，优先考虑分离参数法，其次考虑含参转化法.

（2）取值范围都与最值或值域(上限、下限)有关，另外要注意①②③④中前后等号的取舍！（即端点值的取舍）

二、分离参数的方法

①常规法分离参数：如 $\lambda f(x) = g(x) \Rightarrow \lambda = \dfrac{g(x)}{f(x)}$；

②倒数法分离参数：如 $\lambda f(x) = g(x) \Rightarrow \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{f(x)}{g(x)}$；

【当 $f(x)$ 的值有可能取到，而 $g(x)$ 的值一定不为 0 时，可用倒数法分离参数.】

③讨论法分离参数：如：$\lambda g(x)\geq f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda\geq\dfrac{f(x)}{g(x)},g(x)>0\\ \lambda\leq\dfrac{f(x)}{g(x)},g(x)<0\end{cases}$

$(-1)^n\lambda\leq f(n)(n\in N^*)\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda\leq f(n),n\text{为正偶数}\\ -\lambda\leq f(n),n\text{为正奇数}\end{cases}$

④整体法分离参数：如$\lambda^2+\lambda=f(x)$；

⑤不完全分离参数法：如$\dfrac{b}{x}=\ln x+x-x^2$；

⑥作商法凸显参数，换元法凸显参数．

【注意】

（1）分离参数后，问题容易解决，就用分离参数法（大多数题可以使用此方法）． 但如果难以分离参数或分离参数后，问题反而变得更复杂，则不分离参数，此时就用含参转化法．

（2）恒成立命题对自变量的范围有时有一部分或端点是必然成立的，应该考虑先去掉这一部分或端点，再分离参数求解．【否则往往分离不了参数或以至于答案出问题．】

三、其他恒成立类型一

① $f(x)$在$[a,b]$上是增函数，则$f'(x)\geq 0$恒成立．(等号不能漏掉)．

② $f(x)$在 $[a,b]$上是减函数，则$f'(x)\leq 0$恒成立．(等号不能漏掉)．

③ $f(x)$在$[a,b]$上是单调函数，方法一：分上述两种情形讨论；(常用方法)

四、其他恒成立类型二

①$\forall x_1\in A,\exists x_2\in B$，使得方程$g(x_2)=f(x_1)$成立$\Leftrightarrow\{y\,|\,y=f(x),x\in A\}\subseteq\{y\,|\,y=g(x),x\in B\}$．

②$\exists x_1\in A,\exists x_2\in B$，使得方程$g(x_2)=f(x_1)$成$\Leftrightarrow\{y\,|\,y=f(x),x\in A\}\subseteq\{y\,|\,y=g(x),x\in B\}\neq\varnothing$．

五、其他恒成立类型三

①$\forall x_1\in A,\forall x_2\in B$， $f(x_1)\geq g(x_2)\Leftrightarrow f(x_1)_{\min}\geq g(x_2)_{\max}$；

②$\forall x_1\in A,\exists x_2\in B$， $f(x_1)\geq g(x_2)\Leftrightarrow f(x_1)_{\min}\geq g(x_2)_{\min}$；

③$\exists x_1\in A,\forall x_2\in B$， $f(x_1)\geq g(x_2)\Leftrightarrow f(x_1)_{\max}\geq g(x_2)_{\max}$；

④$\exists x_1\in A,\exists x_2\in B$， $f(x_1)\geq g(x_2)\Leftrightarrow f(x_1)_{\max}\geq g(x_2)_{\min}$．