高职高考
数学
复习

§6.3 同角三角函数的基本关系式

【复习目标】

1.掌握同角三角函数的基本关系式.

2.能利用基本关系式进行求值、化简、证明.

【知识回顾】

同角三角函数的基本关系式.

1.平方关系:$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

2.商数关系:$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$.

【说明】 (1)“同角”的概念与角的表达形式无关.

例如:$\sin^2 3\alpha+\cos^2 3\alpha=1$,$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\tan\frac{\alpha}{2}$,

(2)上述关系都必须在定义域允许的范围内成立.

【例题精解】

【例1】 已知$\sin\alpha=-\frac{4}{5}$,且α是第三象限角,求$\cos\alpha$,$\tan\alpha$的值.

【解】 由$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,得$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$.

$\because$ α是第三象限的角,$\cos\alpha<0$,

$\therefore$ $\cos\alpha=-\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$,$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$.

【点评】 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$可变形为$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$,$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$,其正负号由$\alpha$的象限确定.若题目未给定$\alpha$的象限,则需分类讨论.

【对点练习1】

已知$\cos\alpha=\frac{1}{2}$,且$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,则$\sin\alpha=$__________,$\tan\alpha=$__________.

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sqrt{3}$

【解析】 $\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sqrt{3}$.

【例2】　已知$\tan\alpha=3$,且α是第三象限角,求角α的正弦和余弦值.

【解】　由题意得$\begin{cases}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 & ①,\\ \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=3 & ②,\end{cases}$

由②得$\sin\alpha=3\cos\alpha$,代入①,整理得$10\cos^2\alpha=1$,则$\cos^2\alpha=\frac{1}{10}$.

∵α是第三象限的角,∴$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{10}}{10}$,代入②,得$\sin\alpha=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

【点评】　由于$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,又$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$恒成立,可联立方程组解出$\sin\alpha,\cos\alpha$.

【对点练习2】

已知$\tan\alpha=-\frac{3}{4}$,α为第二象限角,则$\sin\alpha=$__________,

$\cos\alpha=$__________.

【答案】 $\frac{3}{5}$ $-\frac{4}{5}$

【解析】 由题意得$\begin{cases}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 ①,\\ \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{3}{4} ②,\end{cases}$

∵α是第三象限的角,

∴$\sin\alpha=\frac{3}{5}$,$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$.

【例3】 已知$\tan\alpha=2$,求:

(1)$\dfrac{4\sin\alpha-2\cos\alpha}{5\sin\alpha+3\cos\alpha}$; (2)$\dfrac{\sin^2\alpha+3\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$.

【解】 解法一:∵$\tan\alpha=2$,∴$\cos\alpha\neq0$.

(1)$$\frac{4\sin\alpha-2\cos\alpha}{5\sin\alpha+3\cos\alpha}=\frac{\frac{4\sin\alpha-2\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{5\sin\alpha+3\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{4\tan\alpha-2}{5\tan\alpha+3}=\frac{6}{13}.$$

(2)$$\frac{\sin^2\alpha+3\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{\frac{\sin^2\alpha+3\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\tan^2\alpha+3\tan\alpha}{\tan^2\alpha-1}=\frac{2^2+3\times2}{2^2-1}=\frac{10}{3}.$$

解法二:$\because \tan\alpha=2$,$\therefore \sin\alpha=2\cos\alpha$.

(1)$\dfrac{4\sin\alpha-2\cos\alpha}{5\sin\alpha+3\cos\alpha}=\dfrac{8\cos\alpha-2\cos\alpha}{10\cos\alpha+3\cos\alpha}=\dfrac{6\cos\alpha}{13\cos\alpha}=\dfrac{6}{13}$.

(2)$\dfrac{\sin^2\alpha+3\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\dfrac{(2\cos\alpha)^2+3(2\cos\alpha)\cdot\cos\alpha}{(2\cos\alpha)^2-\cos^2\alpha}=\dfrac{10\cos^2\alpha}{3\cos^2\alpha}=\dfrac{10}{3}$.

【点评】　本题利用同角三角函数的商数关系将“弦”化“切”,使得所求与已知相互靠拢,大大降低运算量.

【对点练习3】

已知$\tan\alpha=-2$,则$\dfrac{3\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-2\cos\alpha}=$__________,

$\dfrac{2\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}=$__________.

【答案】 $\dfrac{5}{4}$　$\dfrac{5}{3}$

【解析】 $\dfrac{3\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-2\cos\alpha}=\dfrac{3\tan\alpha+1}{\tan\alpha-2}=\dfrac{-6+1}{-4}=\dfrac{5}{4}$,

$\dfrac{2\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}=\dfrac{2\tan^2\alpha-\tan\alpha}{\tan^2\alpha+2}=\dfrac{8-(-2)}{4+2}=\dfrac{5}{3}$.

【仿真训练】

一、选择题

1.化简:$(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)=$ (　　)

A.$\sin^2\alpha$　　B.$\cos^2\alpha$　　C.$\frac{1}{\sin^2\alpha}$　　D.$\frac{1}{\cos^2\alpha}$

【答案】　B

2.化简:$\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}=$ (　　)

A.$\cos\alpha$　　B.$\sin\alpha$　　C.$\tan\alpha$　　D.1

【答案】 A

3.化简:$\cos\theta\cdot\tan\theta=$ ( )

A.$\tan\theta$ B.$\cos\theta$ C.$\sin\theta$ D.$\frac{1}{\sin\theta}$

【答案】 C

4.化简:$\sqrt{1-\cos^2 80°}$= (　　)

A.$\cos 80°$　　B.$-\cos 80°$　　C.$\sin 80°$　　D.$\pm\cos 80°$

【答案】　C

5.若$\cos\theta=\frac{1}{2}$,且θ是第一象限角,则$\sin\theta=$ (　　)

A.$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D.$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】　B