2023年高考数学模拟试卷

考生须知：

1．全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用2B铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。

2．请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。

3．保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

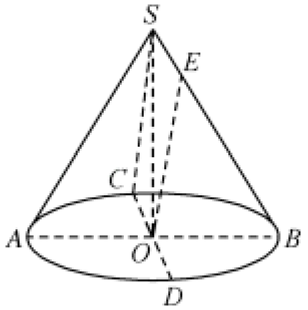
1．函数 $f\left(x\right)=\cos\dfrac{\pi x}{2}$ 与 $g\left(x\right)=kx-k$ 在 $\left[-6,8\right]$ 上最多有 n 个交点，交点分别为 $\left(x,y\right)$（$i=1$，……，n），则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i+y_i\right)=$（　　）

A．7　　**B．8**　　**C．9**　　**D．10**

2．已知双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$b>0$）的渐近线方程为 $\sqrt{3}x\pm y=0$，则 $b=$（　　）

A． $2\sqrt{3}$　　**B．** $\sqrt{3}$　　**C．** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　**D．** $4\sqrt{3}$

3．如图，在圆锥 ***SO*** 中，***AB***，***CD*** 为底面圆的两条直径，***AB***∩***CD***＝***O***，且 ***AB***⊥***CD***，***SO***＝***OB***＝3，$SE=\dfrac{1}{4}SB$，异面直线 ***SC*** 与 ***OE*** 所成角的正切值为（　　）



A． $\dfrac{\sqrt{22}}{2}$　　**B．** $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　**C．** $\dfrac{13}{16}$　　**D．** $\dfrac{\sqrt{11}}{3}$

4．复数 z 满足 $z-1=\left(z+1\right)i$（i为虚数单位),则 z 的值是(　　)

A． $1+i$　　**B．** $1-i$　　**C．** i　　**D．** $-i$

5．棱长为2的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 内有一个内切球 O，过正方体中两条异面直线 AB，A_1D_1 的中点 P,Q 作直线，则该直线被球面截在球内的线段的长为（　　）

A． $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　**B．** $\sqrt{2}-1$　　**C．** $\sqrt{2}$　　**D．1**

6．将函数 $f(x)=\sin 3x-\sqrt{3}\cos 3x+1$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$的图象，给出下列关于 $g(x)$的结论：

①它的图象关于直线 $x=\frac{5\pi}{9}$ 对称；

②它的最小正周期为 $\frac{2\pi}{3}$；

③它的图象关于点$(\frac{11\pi}{18}$，1)对称；

④它在$[\frac{5\pi}{3},\frac{19\pi}{9}]$上单调递增.

其中所有正确结论的编号是（　　）

A．①②　　B．②③　　C．①②④　　D．②③④

7．一个正四棱锥形骨架的底边边长为2，高为 $\sqrt{2}$，有一个球的表面与这个正四棱锥的每个边都相切，则该球的表面积为（　　）

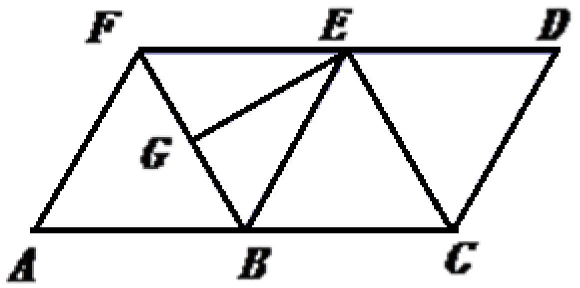
A．$4\sqrt{3}\pi$　　B．4π　　C．$4\sqrt{2}\pi$　　D．3π

8．“$\varphi=-\frac{\pi}{8}$”是“函数 $f(x)=\sin(3x+\varphi)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{8}$ 对称”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

9．下图为一个正四面体的侧面展开图，G 为 BF 的中点，则在原正四面体中，直线 EG 与直线 BC 所成角的余弦值为（　　）



A．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{6}}{3}$

C．$\frac{\sqrt{3}}{6}$　　D．$\frac{\sqrt{33}}{6}$

10．造纸术、印刷术、指南针、火药被称为中国古代四大发明，此说法最早由英国汉学家艾约瑟提出并为后来许多中国的历史学家所继承，普遍认为这四种发明对中国古代的政治，经济，文化的发展产生了巨大的推动作用.某小学三年级共有学生 500 名，随机抽查 100 名学生并提问中国古代四大发明，能说出两种发明的有 45 人，能说出 3 种及其以上发明的有 32 人，据此估计该校三级的 500 名学生中，对四大发明只能说出一种或一种也说不出的有（　　）

A．69 人　　B．84 人　　C．108 人　　D．115 人

11．已知 $y=ax+b$ 与函数 $f(x)=2\ln x+5$ 和 $g(x)=x^2+4$ 都相切，则不等式组 $\begin{cases}x-ay+3\geq 0\\x+by-2\geq 0\end{cases}$ 所确定的平面区域在 $x^2+y^2+2x-2y-22=0$ 内的面积为（　　）

A．2π　　B．3π　　C．6π　　D．12π

12．将 3 个黑球 3 个白球和 1 个红球排成一排，各小球除了颜色以外其他属性均相同，则相同颜色的小球不相邻的排法共有（　　）

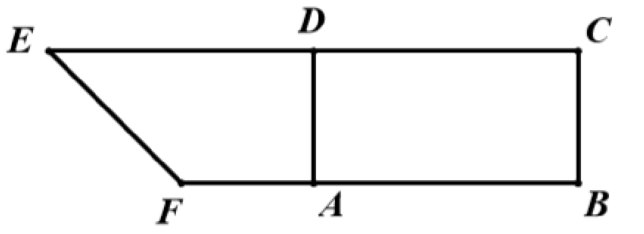
A．14 种　　B．15 种　　C．16 种　　D．18 种

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

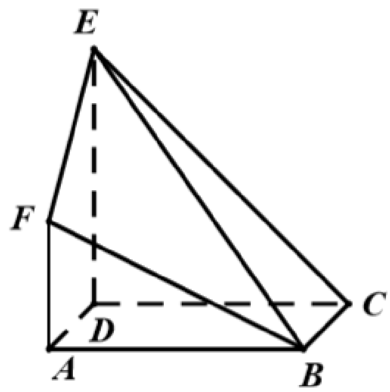
13．已知正实数 x,y 满足 $xy=1$，则 $(\frac{x}{y}+y)(\frac{y}{x}+x)$ 的最小值为_____.

14．甲、乙、丙、丁四名同学报名参加淮南文明城市创建志愿服务活动，服务活动共有“走进社区”、“环境监测”、“爱心义演”、“交通宣传”等四个项目，每人限报其中一项，记事件 A 为“4 名同学所报项目各不相同”，事件 B 为“只有甲同学一人报走进社区项目”，则 $P(A|B)$ 的值为______.

15．如图所示，在直角梯形 $BCDF$ 中，$\angle CBF=\angle BCE=90°$，$A$、$D$ 分别是 BF、CE 上的点，$AD//BC$，且 $AB=DE=2BC=2AF$（如图①）.将四边形 $ADEF$ 沿 AD 折起，连接 BE、BF、CE（如图②）.在折起的过程中，则下列表述：



图①



图②

①$AC//$平面 BEF；

②四点 B、C、E、F 可能共面；

③若 $EF\perp CF$，则平面 $ADEF\perp$平面 $ABCD$；

④平面 BCE 与平面 BEF 可能垂直.其中正确的是__________.

16．复数 $z=\dfrac{2i}{1+i}$ (i 为虚数单位）的虚部为__________.

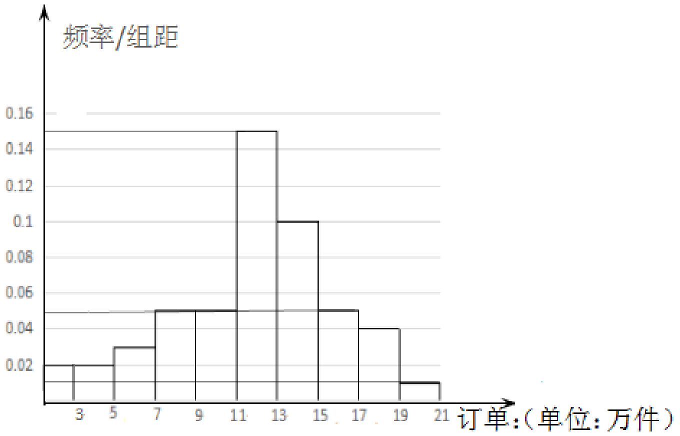
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（12 分）等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 **2**，a_2,a_4,a_8 分别等于等比数列 $\{b_n\}$ 的第 **2** 项，第 **3** 项，第 **4** 项.

（**1**）求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（**2**）若数列 $\{c_n\}$ 满足 $\frac{c_1}{a_1}+\frac{c_2}{a_2}+\cdots+\frac{c_n}{a_n}=b_{n+1}$,求数列 $\{c_n\}$ 的前 **2020** 项的和.

18.（12 分）为了解网络外卖的发展情况，某调查机构从全国各城市中抽取了 **100** 个相同等级地城市，分别调查了甲乙两家网络外卖平台（以下简称外卖甲、外卖乙）在今年 **3** 月的订单情况，得到外卖甲该月订单的频率分布直方图，外卖乙该月订单的频数分布表，如下图表所示.



订单：（单位：万件）	$[3,5)$	$[5,7)$	$[7,9)$	$[9,11)$	
频数	**1**	**2**	**2**	**3**	
订单：（单位：万件）	$[11,13)$	$[13,15)$	$[15,17)$	$[17,19)$	$[19,21)$
频数	**40**	**20**	**20**	**10**	**2**

（**1**）现规定，月订单不低于 **13** 万件的城市为**“**业绩突出城市**”**，填写下面的列联表，并根据列联表判断是否有 **90%** 的把握认为**“**是否为业绩突出城市**”**与**“**选择网络外卖平台**”**有关.

	业绩突出城市	业绩不突出城市	总计
外卖甲			
外卖乙			
总计			

（**2**）由频率分布直方图可以认为，外卖甲今年 **3** 月在全国各城市的订单数 Z（单位：万件）近似地服从正态分布

$N(\mu,\sigma^2)$，其中μ近似为样本平均数$\overline{x}$（同一组数据用该区间的中点值作代表），σ的值已求出，约为**3.64**，现把频率视为概率，解决下列问题：

①从全国各城市中随机抽取**6**个城市，记X为外卖甲在今年**3**月订单数位于区间$(4.88,15.8)$的城市个数，求X的数学期望；

②外卖甲决定在今年**3**月订单数低于**7**万件的城市开展“订外卖，抢红包”的营销活动来提升业绩，据统计，开展此活动后城市每月外卖订单数将提高到平均每月**9**万件的水平，现从全国各月订单数不超过**7**万件的城市中采用分层抽样的方法选出**100**个城市不开展营销活动，若每按一件外卖订单平均可获纯利润**5**元，但每件外卖平均需送出红包**2**元，则外卖甲在这**100**个城市中开展营销活动将比不开展营销活动每月多盈利多少万元？

附：①参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$.

参考数据：

$P(K^2\geq k_0)$	**0.15**	**0.10**	**0.05**	**0.025**	**0.010**	**0.001**
k_0	**2.702**	**2.706**	**3.841**	**5.024**	**6.635**	**10.828**

②若$Z-N(\mu,\sigma^2)$，则$P(\mu-\sigma<Z\leq\mu+\sigma)=0.6826$，$P(\mu-2\sigma<Z\leq\mu+2\sigma)=0.9544$.

19.（12分）在平面直角坐标系***xOy***中，曲线***C***的参数方程为$\begin{cases}x=1+\cos\varphi\\ y=\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$为参数），以坐标原点为极点，***x***轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线***l***的极坐标方程为$\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$.

（1）求曲线***C***的极坐标方程和直线***l***的直角坐标方程；

（2）若射线$\theta=\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$与曲线***C***交于点***A***（不同于极点***O***），与直线***l***交于点***B***，求$\dfrac{|OA|}{|OB|}$的最大值.

20.（12分）过点**P(-4,0)**的动直线***l***与抛物线$C:x^2=2py(p>0)$相交于***D***、***E***两点，已知当***l***的斜率为$\dfrac{1}{2}$时，$\overrightarrow{PE}=4\overrightarrow{PD}$.

（1）求抛物线***C***的方程；

（2）设DE的中垂线在y轴上的截距为b,求b的取值范围.

21.（12分）已知抛物线***E***：$y^2=2px$（$p>0$），焦点***F***到准线的距离为**3**，抛物线***E***上的两个动点***A***（x_1，y_1）和***B***（x_2，y_2），其中$x_1\neq x_2$且$x_1+x_2=1$．线段***AB***的垂直平分线与***x***轴交于点 ***C***.

（1）求抛物线***E***的方程；

（2）求ΔABC面积的最大值.

22.（10分）曲线C_1的参数方程为$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\cos\varphi \\ y=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}sin\varphi \end{cases}$（$\varphi$为参数），以原点$O$为极点，$x$轴的正半轴为极轴的极坐标系中，曲线$C_2$的极坐标方程为$\rho\cos^2\theta=3\sin\theta$.

(1)求曲线C_1的极坐标方程和曲线C_2的直角坐标方程；

(2)若直线$l:y=kx$与曲线C_1，C_2的交点分别为A、B（A、B异于原点），当斜率$k\in[\dfrac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}]$时，求$|OA|+\dfrac{1}{|OB|}$的最小值.

参考答案

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、**C**

【解析】

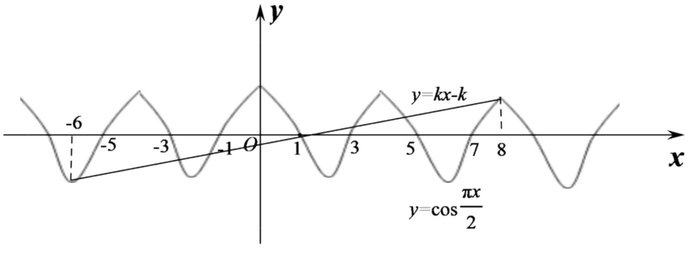
根据直线$g(x)$过定点$(1,0)$，采用数形结合，可得最多交点个数， 然后利用对称性，可得结果.

【详解】

由题可知：直线$g(x)=kx-k$过定点$(1,0)$

且$f(x)=\cos\dfrac{\pi x}{2}$在$[-6,8]$是关于$(1,0)$对称

如图



通过图像可知：直线$g(x)$与$f(x)$最多有**9**个交点

同时点$(1,0)$左、右边各四个交点关于$(1,0)$对称

所以$\sum_{i=1}^{9}(x_i+y_i)=2\times4+1=9$

故选：**C**

【点睛】

本题考查函数对称性的应用，数形结合，难点在于正确画出图像，同时掌握基础函数$y=\cos x$的性质，属难题.

2、**A**

【解析】

根据双曲线方程$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$b>0$），确定焦点位置，再根据渐近线方程$\sqrt{3}x\pm y=0$得到$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$求解.

【详解】

因为双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$b>0$），

所以$a=2$，又因为渐近线方程为$\sqrt{3}x\pm y=0$，

所以$\frac{b}{a}=\frac{b}{2}=\sqrt{3}$，

所以$b=2\sqrt{3}$.

故选：**A.**

【点睛】

本题主要考查双曲线的几何性质，还考查了运算求解的能力，属于基础题.

3、**D**

【解析】

可过点***S***作***SF***∥***OE***，交***AB***于点***F***，并连接***CF***，从而可得出∠***CSF***（或补角）为异面直线***SC***与***OE***所成的角，根据条件即可求出$SC=3\sqrt{2}$，$SF=CF=\sqrt{10}$，这样即可得出***tan***∠***CSF***的值.

【详解】

如图，过点***S***作***SF***∥***OE***，交***AB***于点***F***，连接***CF***，

则∠***CSF***（或补角）即为异面直线***SC***与***OE***所成的角，

$\because SE=\frac{1}{4}SB$，$\therefore SE=\frac{1}{3}BE$，

又***OB***=**3**，$\therefore OF=\frac{1}{3}OB=1$，

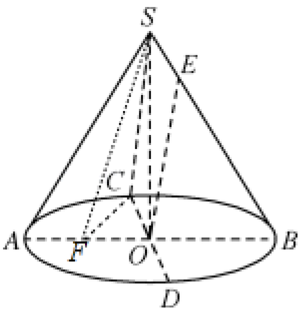
***SO*⊥*OC*，*SO*＝*OC*＝3**，∴$SC=3\sqrt{2}$；

***SO*⊥*OF*，*SO*＝3，*OF*＝1**，∴$SF=\sqrt{10}$；

***OC*⊥*OF*，*OC*＝3，*OF*＝1**，∴$CF=\sqrt{10}$，

∴等腰**△*SCF*** 中，$tan\angle CSF=\dfrac{\sqrt{(\sqrt{10})^2-(\frac{3\sqrt{2}}{2})^2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{\sqrt{11}}{3}$．

故选：***D*.**



【点睛】

本题考查了异面直线所成角的定义及求法，直角三角形的边角的关系，平行线分线段成比例的定理，考查了计算能力，属于基础题.

4、**C**

【解析】

直接利用复数的除法的运算法则化简求解即可.

【详解】

由 $z-1=(z+1)i$ 得：$z=\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1+i)(1-i)}=i$

本题正确选项：C

【点睛】

本题考查复数的除法的运算法则的应用，考查计算能力.

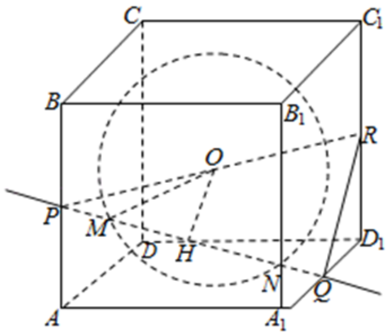
5、**C**

【解析】

连结并延长 ***PO***，交对棱 C_1D_1 于 ***R***，则 ***R*** 为对棱的中点，取 ***MN*** 的中点 ***H***，则 ***OH*⊥*MN***，推导出 ***OH*∥*RQ***，且 ***OH***＝$\dfrac{1}{2}$***RQ***＝$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，由此能求出该直线被球面截在球内的线段的长.

【详解】

如图，



MN 为该直线被球面截在球内的线段

连结并延长 ***PO***，交对棱 C_1D_1 于 ***R***，

则 ***R*** 为对棱的中点，取 ***MN*** 的中点 ***H***，则 ***OH***⊥***MN***，

∴$OH\parallel RQ$，且 $OH=\frac{1}{2}RQ=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴$MH=\sqrt{OM^2-OH^2}=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴$MN=2MH=\sqrt{2}$.

故选：***C***.

【点睛】

本题主要考查该直线被球面截在球内的线段的长的求法，考查空间中线线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查运算求解能力，是中档题.

6、B

【解析】

根据函数 $y=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$ 图象的平移变换公式求出函数 $g(x)$ 的解析式，再利用正弦函数的对称性、单调区间等相关性质求解即可.

【详解】

因为 $f(x)=\sin 3x-\sqrt{3}\cos 3x+1=2\sin(3x-\frac{\pi}{3})+1$，由 $y=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$ 图象的平移变换公式知，

函数 $g(x)=2\sin[3(x+\frac{\pi}{6})-\frac{\pi}{3}]+1=2\sin(3x+\frac{\pi}{6})+1$，其最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{3}$，故②正确；

令 $3x+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，得 $x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{9}$ $(k\in Z)$，所以 $x=\frac{5\pi}{9}$ 不是对称轴，故①错误；

令 $3x+\frac{\pi}{6}=k\pi$，得 $x=\frac{k\pi}{3}-\frac{\pi}{18}(k\in Z)$，取 $k=2$，得 $x=\frac{11\pi}{18}$，故函数 $g(x)$ 的图象关于点 $(\frac{11\pi}{18}, 1)$ 对称，故③正确；

令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 3x+\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，得 $\frac{2k\pi}{3}-\frac{2\pi}{9}\le x\le\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{9}$，取 $k=2$，得 $\frac{10\pi}{9}\le x\le\frac{13\pi}{9}$，取 $k=3$，得 $\frac{16\pi}{9}\le x\le\frac{19\pi}{9}$，故④错误；

故选：B

【点睛】

本题考查 $y=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$ 图象的平移变换和正弦函数的对称性、单调性和最小正周期等性质；考查运算求解能力和整体代换思想；熟练掌握正弦函数的对称性、单调性和最小正周期等相关性质是求解本题的关键;属于中档题、常考题型

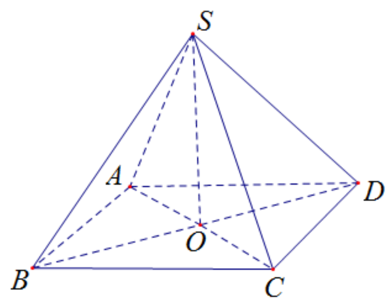
7、B

【解析】

根据正四棱锥底边边长为 2，高为 $\sqrt{2}$，得到底面的中心到各棱的距离都是 1，从而底面的中心即为球心.

【详解】

如图所示：



因为正四棱锥底边边长为 2，高为 $\sqrt{2}$，

所以 $OB=\sqrt{2}, SB=2$，

O 到 SB 的距离为 $d=\frac{SO\times OB}{SB}=1$，

同理 O 到 SC, SD, SA 的距离为 1，

所以 O 为球的球心，

所以球的半径为：1，

所以球的表面积为 4π.

故选：B

【点睛】

本题主要考查组合体的表面积，还考查了空间想象的能力，属于中档题.

8、A

【解析】

先求解函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{8}$ 对称的等价条件，得到 $\varphi=k\pi+\frac{7}{8}\pi,k\in\mathbf{Z}$，分析即得解.

【详解】

若函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{8}$ 对称，

则 $3\times\left(-\frac{\pi}{8}\right)+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，

解得 $\varphi=k\pi+\frac{7}{8}\pi,k\in\mathbf{Z}$，

故“$\varphi=-\frac{\pi}{8}$”是“函数 $f(x)=\sin(3x+\varphi)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{8}$ 对称”的充分不必要条件.

故选：A

【点睛】

本题考查了充分不必要条件的判断，考查了学生逻辑推理，概念理解，数学运算的能力，属于基础题.

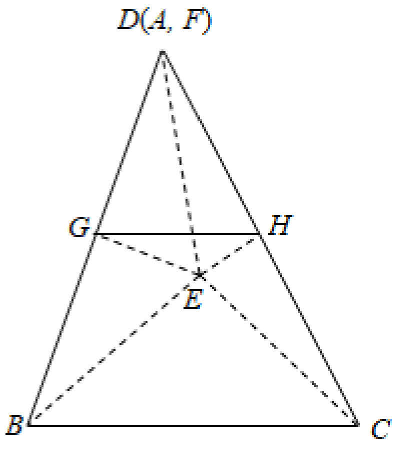
9、C

【解析】

将正四面体的展开图还原为空间几何体，A,D,F 三点重合，记作 D，取 DC 中点 H，连接 EG,EH,GH，$\angle EGH$ 即为 EG 与直线 BC 所成的角，表示出三角形 EGH 的三条边长，用余弦定理即可求得 $\cos\angle EGH$.

【详解】

将展开的正四面体折叠，可得原正四面体如下图所示，其中 A,D,F 三点重合，记作 D：



则 G 为 BD 中点，取 DC 中点 H，连接 EG,EH,GH，设正四面体的棱长均为 a，

由中位线定理可得$GH//BC$且$GH=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}a$，

所以$\angle EGH$即为EG与直线BC所成的角，

$$EG=EH=\sqrt{a^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$，

由余弦定理可得$\cos\angle EGH=\frac{EG^2+GH^2-EH^2}{2EG\cdot GH}$

$$=\frac{\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{4}a^2-\frac{3}{4}a^2}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{1}{2}a}=\frac{\sqrt{3}}{6},$$

所以直线EG与直线BC所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{6}$，

故选：**C.**

【点睛】

本题考查了空间几何体中异面直线的夹角，将展开图折叠成空间几何体，余弦定理解三角形的应用，属于中档题.

10、**D**

【解析】

先求得100名学生中，只能说出一种或一种也说不出的人数，由此利用比例，求得500名学生中对四大发明只能说出一种或一种也说不出的人数.

【详解】

在这 **100** 名学生中，只能说出一种或一种也说不出的有$100-45-32=23$人，设对四大发明只能说出一种或一种也说不出的有x人，则$\frac{100}{23}=\frac{500}{x}$，解得$x=115$人.

故选：**D**

【点睛】

本小题主要考查利用样本估计总体，属于基础题.

11、**B**

【解析】

根据直线$y=ax+b$与$f(x)$和$g(x)$都相切，求得a,b的值，由此画出不等式组所表示的平面区域以及圆

$x^2+y^2+2x-2y-22=0$，由此求得正确选项.

【详解】