专题 20　半角模型

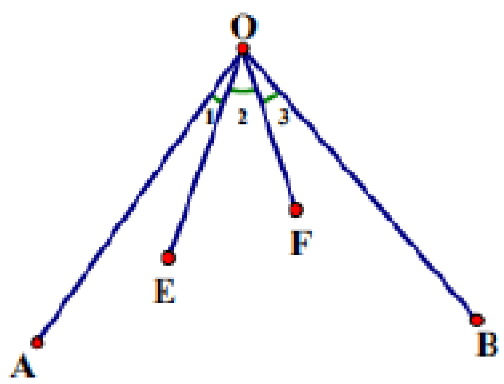
倍长中线或类中线（与中点有关的线段）构造全等三角形

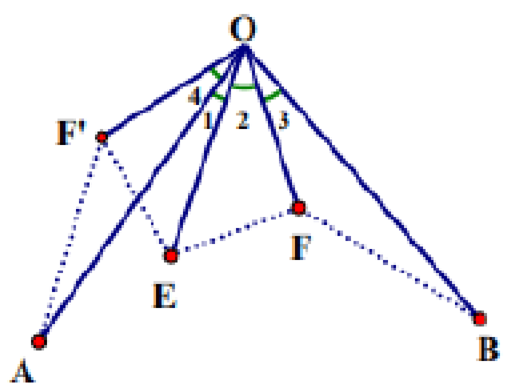
如图①：

（1）$\angle 2=\frac{1}{2}\angle AOB$；（2）OA=OB。

如图②：

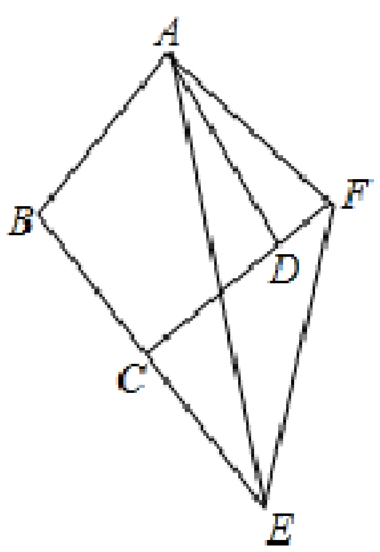
连接 FB，将△FOB 绕点 O 旋转至△FOA 的位置，连接 F′E、FE，可得△OEF′ ≌△OEF。





模型精练

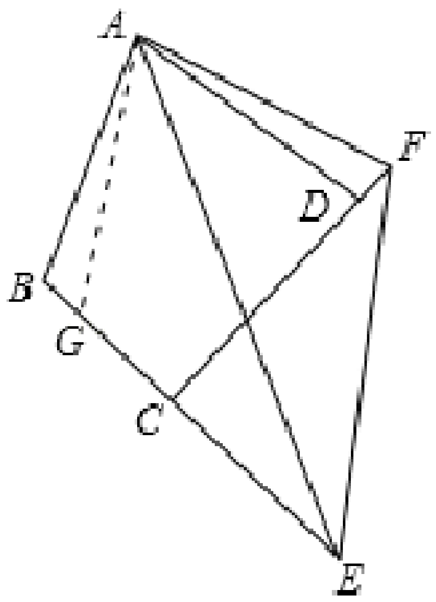
1.（2019 秋•九龙坡区校级月考）如图．在四边形 ABCD 中，∠B+∠ADC ＝180°，AB ＝AD，E、F 分别是边 BC、CD 延长线上的点，且$\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$，求证：EF ＝BE－FD．



【点睛】在 BE 上截取 BG，使 BG ＝DF，连接 AG．根据 SAA 证明△ABG ≌△ADF 得到 AG ＝AF，∠BAG ＝∠DAF，根据$\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$，可知∠GAE ＝∠EAF，可证明△AEG ≌△AEF，EG ＝EF，那么 EF ＝

GE ＝BE －BG ＝BE －DF .

【解析】证明：在 BE 上截取 BG ，使 BG ＝DF ，连接 AG .



∵∠B+∠ADC ＝180° ，∠ADF +∠ADC ＝180° ，

∴∠B＝∠ADF .

在△ABG 和△ADF 中，

=
{∠ = ∠ ，
=

∴△ABG ≌△ADF （SAS ），

∴∠BAG ＝∠DAF ，AG ＝AF .

∴∠BAG +∠EAD ＝∠DAF +∠EAD ＝∠EAF = $\frac{1}{2}$∠BAD .

∴∠GAE ＝∠EAF .

在△AEG 和△AEF 中，

=
{∠ = ∠ ，
=

∴△AEG ≌△AEF （SAS ）.

∴EG ＝EF ，

∵EG ＝BE －BG

∴EF ＝BE －FD .

2.（2020•锦州模拟）问题情境：已知，在等边△ABC 中，∠BAC 与∠ACB 的角平分线交于点 O，点 M 、N 分别在直线 AC，AB 上，且∠MON ＝60°，猜想 CM 、MN 、AN 三者之间的数量关系.

方法感悟：小芳的思考过程是在 CM 上取一点，构造全等三角形，从而解决问题；

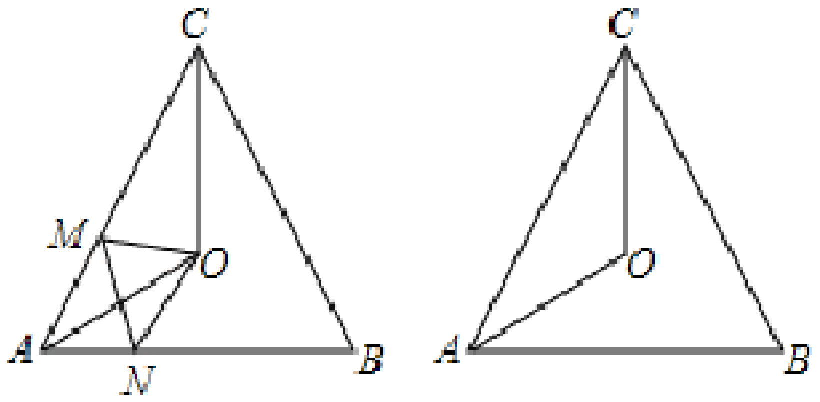


图 1 图 2

小丽的思考过程是在 AB 取一点，构造全等三角形，从而解决问题；

问题解决：（1）如图 1，M 、N 分别在边 AC，AB 上时，探索 CM 、MN 、AN 三者之间的数量关系，并证明；

（2）如图 2，M 在边 AC 上，点 N 在 BA 的延长线上时，请你在图 2 中补全图形，标出相应字母，探索 CM 、MN 、AN 三者之间的数量关系，并证明.

【点睛】（1）在 AC 上截取 CD ＝AN，连接 OD ，证明△CDO ≌△ANO ，根据全等三角形的性质得到 OD ＝ON ，∠COD ＝∠AON ，证明△DMO ≌△NMO ，得到 DM ＝MN ，结合图形证明结论；

（2）在 AC 延长线上截取 CD ＝AN，连接 OD ，仿照（1）的方法解答.

【解析】解：（1）CM ＝AN +MN ，

理由如下：在 AC 上截取 CD ＝AN，连接 OD ，

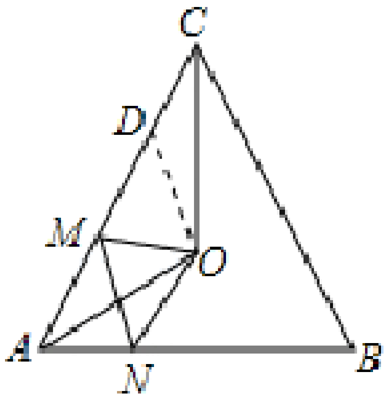


图1

∵△ABC 为等边三角形，∠BAC 与∠ACB 的角平分线交于点 O，

∴∠OAC =∠OCA =30°，

∴OA =OC，

在△CDO 和△ANO 中，

=
{∠ = ∠ ，
=

∴△CDO ≌△ANO （SAS）

∴OD =ON，∠COD =∠AON，

∵∠MON =60°，

∴∠COD +∠AOM =60°，

∵∠AOC =120°，

∴∠DOM =60°，

在△DMO 和△NMO 中，

=
{∠ = ∠ ，
=

∴△DMO ≌△NMO，

∴DM =MN，

∴CM ＝CD +DM ＝AN +MN ；

（2）补全图形如图 2 所示：

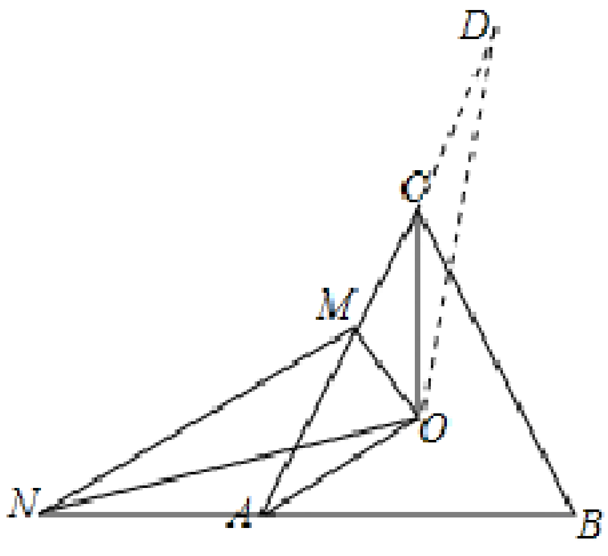


图2

CM ＝MN － AN，

理由如下：在 AC 延长线上截取 CD ＝AN，连接 OD ，

在△CDO 和△ANO 中，

=
{∠ = ∠ = 150°，
=

∴△CDO ≌△ANO （SAS）

∴OD ＝ON，∠COD ＝∠AON ，

∴∠DOM ＝∠NOM ，

在△DMO 和△NMO 中，

=
{∠ = ∠ ，
=

∴△DMO ≌△NMO （SAS）

∴MN ＝DM ，

∴CM ＝DM － CD ＝MN － AN．

3.（2020•章丘区模拟）如图，在正方形 ABCD 中，M、N 分别是射线 CB 和射线 DC 上的动点，且始终∠MAN ＝45°.

（1）如图 1，当点 M、N 分别在线段 BC、DC 上时，请直接写出线段 BM、MN、DN 之间的数量关系；

（2）如图 2，当点 M、N 分别在 CB、DC 的延长线上时，（1）中的结论是否仍然成立，若成立，给予证明，若不成立，写出正确的结论，并证明；

（3）如图 3，当点 M、N 分别在 CB、DC 的延长线上时，若 CN ＝CD ＝6，设 BD 与 AM 的延长线交于点 P，交 AN 于 Q，直接写出 AQ、AP 的长.

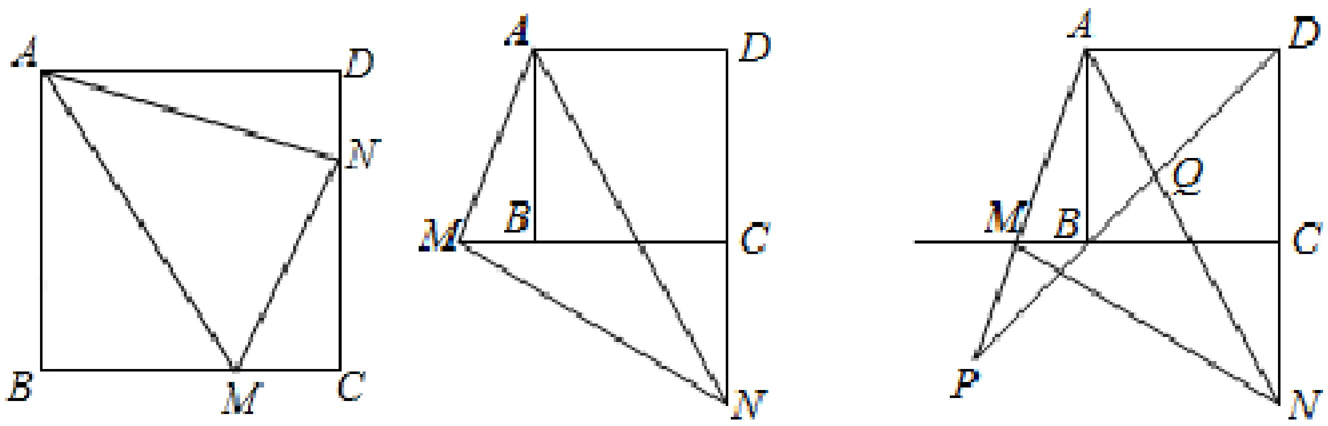


图1　　图2　　图3

【点睛】（1）在 MB 的延长线上，截取 BE ＝DN，连接 AE，则可证明△ABE ≌△ADN，得到 AE ＝AN，进一步证明△AEM ≌△ANM，得出 ME ＝MN，得出 BM +DN ＝MN；

（2）在 DC 上截取 DF ＝BM，连接 AF，可先证明△ABM ≌△ADF，得出 AM ＝AF，进一步证明△MAN ≌△FAN，可得到 MN ＝NF，从而可得到 DN - BM ＝MN；

（3）由已知得出 DN ＝12，由勾股定理得出 AN = $\sqrt{\ \ ^2+\ \ ^2}=6\sqrt{5}$，由平行线得出△ABQ ∽△NDQ，得出$\frac{\ }{\ }=\frac{\ }{\ }=\frac{\ }{\ }=\frac{1}{2}$，$\frac{\ }{\ }=\frac{1}{3}$，求出 AQ ＝$2\sqrt{5}$；由（2）得出 DN - BM ＝MN．设 BM ＝x，则 MN ＝12 - x，CM ＝6+x，在 Rt△CMN 中，由勾股定理得出方程，解方程得出 BM ＝2，由勾股定理得出 AM = $\sqrt{\ \ ^2+\ \ ^2}=2\sqrt{10}$，由平行线得出△PBM ∽△PDA，得出$\frac{\ }{\ }=\frac{\ }{\ }=\frac{1}{3}$，求出 PM = $\frac{1}{2}$AM = $\sqrt{10}$，得出 AP ＝AM +PM ＝$3\sqrt{10}$.

【解析】解：（1）BM +DN ＝MN，理由如下：

如图 1，在 MB 的延长线上，截取 BE ＝DN ，连接 AE ，

∵四边形 ABCD 是正方形，

∴AB ＝AD ，∠BAD ＝∠ABC ＝∠D ＝90° ，

∴∠ABE ＝90° ＝∠D ，

在△ABE 和△ADN 中，$\begin{cases} = \\ \angle \quad = \angle \\ = \end{cases}$，

∴△ABE ≌△ADN （SAS ），

∴AE ＝AN ，∠EAB ＝∠NAD ，

∴∠EAN ＝∠BAD ＝90° ，

∵∠MAN ＝45° ，

∴∠EAM ＝45° ＝∠NAM ，

在△AEM 和△ANM 中，$\begin{cases} = \\ \angle \quad = \angle \\ = \end{cases}$，

∴△AEM ≌△ANM （SAS ），

∴ME ＝MN ，

又∵ME ＝BE +BM ＝BM +DN ，

∴BM +DN ＝MN ；

故答案为：BM +DN ＝MN ；

（2）（1）中的结论不成立，DN －BM ＝MN ．理由如下：

如图 2，在 DC 上截取 DF ＝BM ，连接 AF ，

则∠ABM ＝90° ＝∠D ，

在△ABM 和△ADF 中，$\begin{cases} = \\ \angle \quad = \angle \\ = \end{cases}$，

∴△ABM ≌△ADF （SAS），

∴AM ＝AF，∠BAM ＝∠DAF ，

∴∠BAM ＋∠BAF ＝∠BAF＋∠DAF ＝∠BAD ＝90°，

即∠MAF ＝∠BAD ＝90°，

∵∠MAN ＝45°，

∴∠MAN ＝∠FAN ＝45°，

在△MAN 和△FAN 中，$\begin{cases} = \\ \angle \quad = \angle \\ = \end{cases}$，

∴△MAN ≌△FAN （SAS），

∴MN ＝NF，

∴MN ＝DN －DF ＝DN －BM ，

∴DN －BM ＝MN ．

（3）∵四边形 ABCD 是正方形，

∴AB ＝BC ＝AD ＝CD ＝6，AD ∥BC，AB ∥CD，∠ABC ＝∠ADC ＝∠BCD ＝90°，

∴∠ABM ＝∠MCN ＝90°，

∵CN ＝CD ＝6，

∴DN ＝12，

∴$AN=\sqrt{\quad^2+\quad^2}=\sqrt{6^2+12^2}=6\sqrt{5}$，

∵AB ∥CD ，

∴△ABQ ∽△NDQ ，

∴$\frac{\ }{\ }=\frac{\ }{\ }=\frac{\ }{\ }=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$，

∴$\frac{\ }{\ }=\frac{1}{3}$，

∴$AQ=\frac{1}{3}AN=2\sqrt{5}$；

由（2）得：DN －BM ＝MN ．

设 BM ＝x，则 MN ＝12－x，CM ＝6+x，

在 Rt△CMN 中，由勾股定理得：$6^2+(6+x)^2=(12-x)^2$，

解得：x＝2，

∴BM ＝2，

∴$AM=\sqrt{\ ^2+\ ^2}=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$，

∵BC ∥AD ，

∴△PBM ∽△PDA ，

∴$\frac{\ }{\ }=\frac{\ }{\ }=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，

∴$PM=\frac{1}{2}AM=\sqrt{10}$，

∴$AP=AM+PM=3\sqrt{10}$.

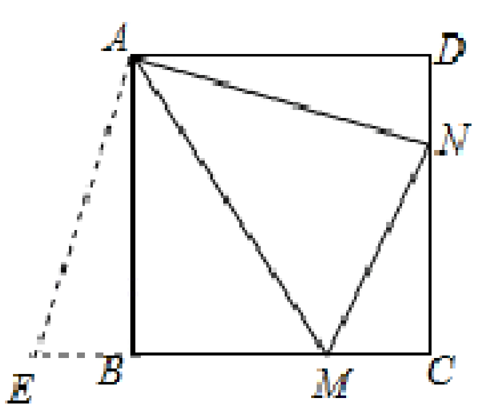


图1

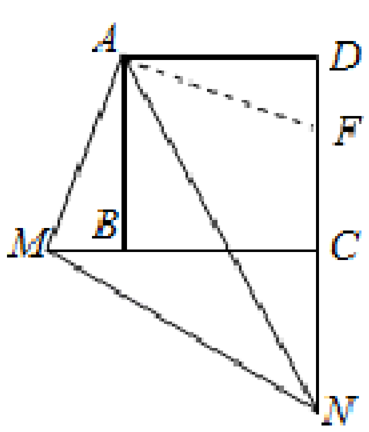


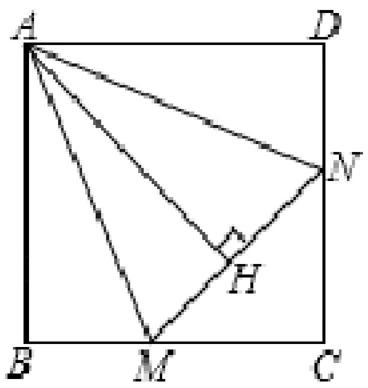
图2

4.（2019•麒麟区模拟）已知，正方形 ABCD 中，∠MAN ＝45°，∠MAN 绕点 A 顺时针旋转，它的两边分别交 CB、DC（或它们的延长线）于点 M、N，AH⊥MN 于点 H．

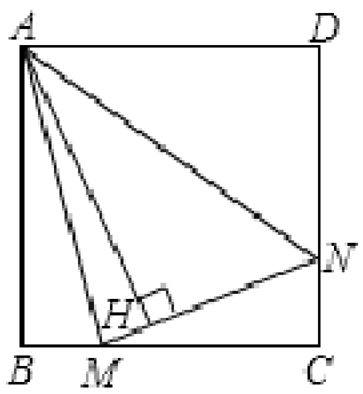
（1）如图①，当∠MAN 绕点 A 旋转到 BM ＝DN 时，请你直接写出 AH 与 AB 的数量关系：__AH ＝AB__；

（2）如图②，当∠MAN 绕点 A 旋转到 BM ≠DN 时，（1）中发现的 AH 与 AB 的数量关系还成立吗？如果不成立请写出理由，如果成立请证明；

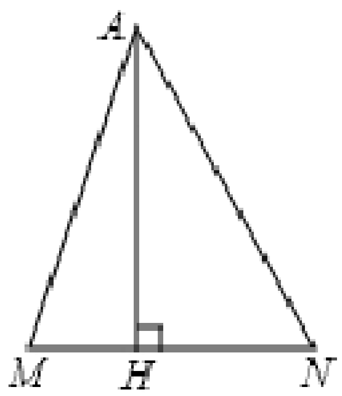
（3）如图③，已知∠MAN ＝45°，AH⊥MN 于点 H，且 MH ＝2，NH ＝3，求 AH 的长．（可利用（2）得到的结论）



图①



图②



图③

【点睛】（1）由三角形全等可以证明 AH ＝AB，

（2）延长 CB 至 E，使 BE ＝DN，证明△AEM ≌△ANM，能得到 AH ＝AB，

（3）分别沿 AM、AN 翻折△AMH 和△ANH，得到△ABM 和△AND，然后分别延长 BM 和 DN 交于点 C，得正方形 ABCE，设 AH ＝x，则 MC ＝x﹣2，NC ＝x﹣3，在 Rt△MCN 中，由勾股定理，解得 x．

【解析】解：（1）如图① AH ＝AB．

（2）数量关系成立．如图②，延长 CB 至 E，使 BE ＝DN．

∵ABCD 是正方形，

∴AB ＝AD，∠D ＝∠ABE ＝90°，

在 Rt△AEB 和 Rt△AND 中，$\begin{cases} = \\ \angle \quad = \angle \\ = \end{cases}$，

∴Rt△AEB ≌Rt△AND，

∴AE ＝AN， ∠EAB ＝∠NAD ，

∵∠DAN ＋∠BAM ＝45°，

∴∠EAB＋∠BAM ＝45°，

∴∠EAM ＝45°，

∴∠EAM ＝∠NAM ＝45°，

在△AEM 和△ANM 中，$\begin{cases} = \\ \angle \quad = \angle \\ = \end{cases}$，

∴△AEM ≌△ANM ．

∴$S_{\triangle AEM}=S_{\triangle ANM}$，EM ＝MN ，

∵AB、AH 是△AEM 和△ANM 对应边上的高，

∴AB ＝AH．

（3）如图③分别沿 AM 、AN 翻折△AMH 和△ANH ，得到△ABM 和△AND ，

∴BM ＝2，DN ＝3，∠B＝∠D＝∠BAD ＝90°．

分别延长 BM 和 DN 交于点 C，得正方形 ABCD ，

由（2）可知，AH ＝AB＝BC ＝CD ＝AD．

设 AH ＝x，则 MC ＝x﹣2，NC ＝x﹣3，

在 Rt△MCN 中，由勾股定理，得 $MN^2=MC^2+NC^2$

∴$5^2=(x-2)^2+(x-3)^2$（6 分）

解得 $x_1=6$，$x_2=-1$．（不符合题意，舍去）

∴AH ＝6.