专题 求离心率

技巧归类

求离心率

- 知识点1
  利用图形的几何性质
  (1) 特殊三角形与离心率：一般有边角相等、三角形相似、面积公式、正余弦定理、角平分线性质、高的性质、中线的性质等，通常数形结合，用几何法进行运算
  (2) 平行四边形与离心率：可能存在四边形也可能利用圆锥曲线的对称性构造四边形，一般有：对边平行相等；两条对角线长度的平方和等于两倍的两个邻边的平方和等.
  (3) 圆与离心率：一般利用弦的中点与圆心的连线与弦垂直，直径所对的圆周角是90°，半径相等，圆与圆的位置关系等.
- 知识点2
  利用坐标运算：
  如果从题目中的条件难以发掘几何关系，那么可考虑将点的坐标用a,b,c进行表示，再利用条件列出等式求解.

求离心率的范围问题

- 知识点3
  借助题目中给出的不等信息：
  题目中某点的横坐标(或纵坐标)是否有范围要求：例如椭圆与双曲线对横坐标的范围有要求. 如果问题围绕着“曲线上存在一点”，则可考虑将该点坐标用a,b,c表示，且点坐标的范围就是求离心率范围的突破口
- 知识点4
  借助函数的值域求解范围
  若题目中有一个核心变量，则可以考虑将离心率表示为某个变量的函数，从而求该函数的值域即可；
- 知识点5
  借助平面几何图形中的不等关系
  根据平面图形的关系，如三角形两边之和大于第三边、折线段大于或等于直线段、对称的性质中的最值等得到不等关系即可

题型目录

题型八	焦点弦与定比分点

典例集练

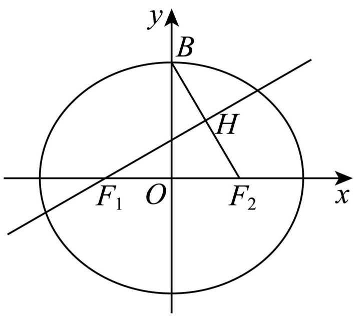
题型一　利用几何性质求解

1．已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的上顶点为$B$，两个焦点为$F_1$，$F_2$，线段$BF_2$的垂直平分线过点$F_1$，则椭圆的离心率为________.

【答案】$\frac{1}{2}/0.5$

【分析】求出线段BF_2的中点坐标，根据两直线垂直斜率关系可得$a^2=4c^2$，再结合$a^2=b^2+c^2$可求得离心率.

【详解】



如图，设BF_2的垂直平分线与BF_2交于点H，

由题，$F_1\left(-c,0\right)$，$F_2\left(c,0\right)$，$B\left(0,b\right)$，则$H\left(\frac{c}{2},\frac{b}{2}\right)$，

$\therefore k_{F_1H}=\frac{\frac{b}{2}-0}{\frac{c}{2}-\left(-c\right)}=\frac{b}{3c}$，$k_{BF_2}=\frac{0-b}{c-0}=-\frac{b}{c}$，

$\because k_{F_1H}\cdot k_{BF_2}=-1$，

$\therefore \frac{b}{3c}\times\left(-\frac{b}{c}\right)=-1$，化简得，$b^2=3c^2$，

由$a^2=b^2+c^2$，解得$a^2=4c^2$，

$\therefore e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{1}{4}$，即$e=\frac{1}{2}$.

故答案为：$\frac{1}{2}$.

2．已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左焦点为$F_1\left(-c,0\right)$，坐标原点为$O$，若在双曲线右支上存在一点$P$满

足$\left|PF_1\right| = \sqrt{3}c$，且$\left|PO\right| = c$，则双曲线$C$的离心率为__________.

【答案】$\sqrt{3}+1$

【分析】构建焦点三角形，判断出其为直角三角形，进而可求.

【详解】如图，因为$\left|PO\right| = c = |F_1O| = |F_2O|$，所以$\angle PF_1O = \angle OPF_1, \angle PF_2O = \angle OPF_2$，

所以$\angle OPF_1 + \angle OPF_2 = \angle F_1PF_2 = \dfrac{\pi}{2}$，

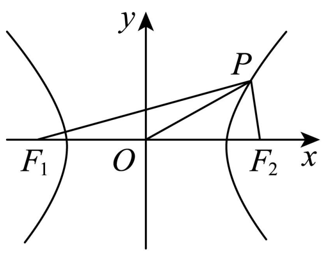
则$|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = |F_1F_2|^2, \therefore 3c^2 + (\sqrt{3}c - 2a)^2 = 4c^2$，

$2c^2 - 4\sqrt{3}ac + 4a^2 = 0$，

$e^2 - 2\sqrt{3}e + 2 = 0$，

解得$e = \sqrt{3}+1$.

故答案为：$\sqrt{3}+1$

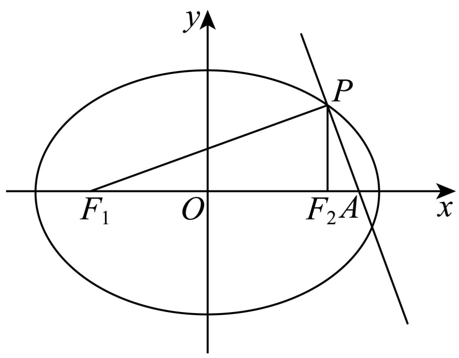


3．已知椭圆$C: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\left(a > b > 0\right)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，点$P$在椭圆$C$上，且$PF_2 \perp F_1F_2$，过$P$作$F_1P$的垂线交$x$轴于点A，若$\left|AF_2\right| = \dfrac{1}{2}c$，记椭圆的离心率为$e$，则$e^2 =$______.

【答案】$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

【分析】由题意可得$\left|PF_2\right|^2 = \left|F_1F_2\right| \cdot \left|AF_2\right|$，从而可求得$\left|PF_2\right| = c$，根据勾股定理可求得$\left|PF_1\right|$，利用椭圆离心率的定义即可求得结果.

【详解】如下图所示：



因为$PF_2 \perp F_1F_2$， $AP \perp PF_1$，所以$\triangle PF_1F_2 \sim \triangle APF_2$，

可得$\frac{|PF_2|}{|F_1F_2|}=\frac{|AF_2|}{|PF_2|}$，即$|PF_2|^2=|F_1F_2|\cdot|AF_2|=2c\cdot\frac{1}{2}c=c^2$，可得$|PF_2|=c$；

又在$Rt\triangle PF_1F_2$中，$|PF_1|=\sqrt{c^2+(2c)^2}=\sqrt{5}c$，

由椭圆定义可得$|PF_1|+|PF_2|=2a$，即$\sqrt{5}c+c=2a$，

所以$e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，可得$e^2=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

故答案为：$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

4．椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的两个焦点为$F_1(-c,0),F_2(c,0),M$是椭圆上一点，且满足$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2M}=0$.则椭圆离心率$e$的取值范围为（　）

A．$\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$　　B．$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　C．$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$　　D．$\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$

【答案】D

【分析】根据给定条件，可得$F_1M \perp F_2M$，进而得出$|MO|=c \ge b$，再求出离心率范围即得.

【详解】由点M满足$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2M}=0$，得$F_1M \perp F_2M$，即$\triangle F_1MF_2$是直角三角形，原点$O$是斜边$F_1F_2$的中点，

因此$|MO|=c$，又点M在椭圆上，则$c \ge b$，即$c^2 \ge b^2=a^2-c^2$，整理得$\frac{c^2}{a^2}\ge\frac{1}{2}$，

即$e^2\ge\frac{1}{2}$，而$0<e<1$，因此$\frac{\sqrt{2}}{2}\le e<1$，

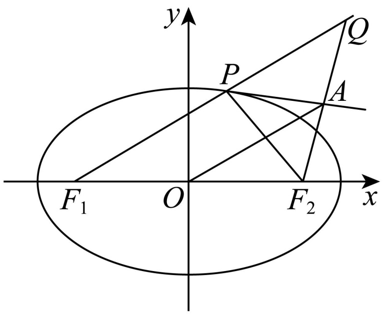
所以椭圆离心率e的取值范围为$\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.

故选：D

5．点P在椭圆上，且在第一象限，过右焦点F_2作$\angle F_1PF_2$的外角平分线的垂线，垂足为A，O为坐标原点，若$|OA|=\sqrt{3}b$，则该椭圆的离心率为______.

【答案】$\frac{\sqrt{6}}{3}$/$\frac{1}{3}\sqrt{6}$

【分析】延长F_2A，交PF_1于点Q，根据PA是$\angle F_1PF_2$的外角平分线，得到$|AQ|=|AF_2|$，$|PQ|=|PF_2|$，再利用椭圆的定义求解.

【详解】

延长 F_2A，交 PF_1 于点 Q，$\because PA$ 是 $\angle F_1PF_2$ 的外角平分线，

$\therefore |AQ|=\left|AF_2\right|$，$|PQ|=\left|PF_2\right|$，

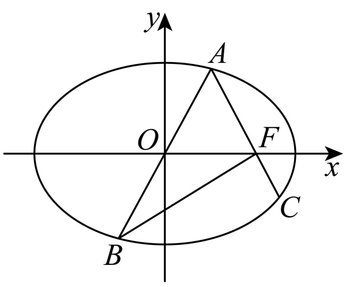
又 O 是 F_1F_2 的中点，$\therefore QF_1 /\!/ AO$，且 $\left|QF_1\right|=2|OA|=2\sqrt{3}b$.

又 $\left|QF_1\right|=\left|PF_1\right|+|PQ|=\left|PF_1\right|+\left|PF_2\right|=2a$，

$\therefore 2a=2\sqrt{3}b$，$\therefore a^2=3b^2=3(a^2-c^2)$，则 $a=\dfrac{\sqrt{6}}{2}c$，$\therefore$离心率为 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

故答案为：$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

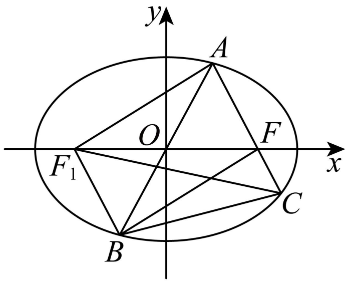
6. 如图，A，B，C 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 上的三个点，AB 经过原点 O，AC 经过右焦点 F，若 $BF\perp AC$ 且 $\left|BF\right|=3\left|CF\right|$，则该椭圆的离心率为_______.



【答案】$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【分析】设椭圆的左焦点为 $F_1\left(-c,0\right)$，连接 AF_1,BF_1,CF_1，设 $\left|CF\right|=m$，利用对称性得到 $\left|AF_1\right|=\left|BF\right|=3m$，$\left|AF\right|=2a-3m$，$\left|CF_1\right|=2a-m$，再根据 $BF\perp AC$，分别在 $\triangle AF_1C$ 和 $\mathrm{R}t\triangle AF_1F$ 中，利用勾股定理求解.

【详解】解：如图所示：



设椭圆的左焦点为$F_1(-c,0)$，连接AF_1,BF_1,CF_1，

设$|CF|=m$，由对称性知：$|AF_1|=|BF|=3m$，

$|AF|=2a-3m$，$|CF_1|=2a-m$，

因为$AF_1//BF$，所以$AF_1\perp AC$，

在$\triangle AF_1C$中，$|AF_1|^2+|AC|^2=|CF_1|^2$，即$9m^2+(2a-2m)^2=(2a-m)^2$，

解得$m=\dfrac{a}{3}$，

在$\mathrm{R}t\triangle AF_1F$中，$9m^2+(2a-3m)^2=(2c)^2$，

将$m=\dfrac{a}{3}$代入上式，得$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

故答案为：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

题型二　利用坐标法求解

7．已知F为双曲线C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点，平行于$x$轴的直线$l$分别交$C$的渐近线和右支于点A，$B$，且$\angle OAF=90°$，$\angle OBF=\angle OFB$，则$C$的离心率为（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\dfrac{3}{2}$　　D．$\sqrt{3}$

【答案】B

【分析】设$B(m,n)$，联立方程组求得$A\left(\dfrac{an}{b},n\right)$，根据$\angle OAF=90°$，得到$k_{AF}\cdot k_{OA}=-1$，求得$n=\dfrac{ab}{c}$，再由$B(m,n)$在双曲线$C$上，化简得到$m^2=\dfrac{a^2c^2+a^4}{c^2}$，结合$|OB|=|OF|$，化简得到$2a^2=c^2$，进而求得双曲线的离心率.

【详解】双曲线C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的渐近线方程为$y=\pm\dfrac{b}{a}x$.

设$B(m,n)$，联立方程组$\begin{cases}y=\dfrac{b}{a}x\\y=n\end{cases}$，解得$A\left(\dfrac{an}{b},n\right)$.

因为$\angle OAF=90°$，所以$k_{AF}\cdot k_{OA}=-1$，即$\dfrac{n}{\dfrac{an}{b}-c}\cdot\dfrac{b}{a}=-1$，可得$n=\dfrac{ab}{c}$.

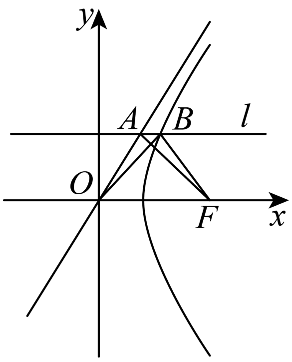
又因为点$B\left(m,n\right)$在双曲线C上，所以$\dfrac{m^2}{a^2}-\dfrac{n^2}{b^2}=1$，

将$n=\dfrac{ab}{c}$代入，可得$m^2=\dfrac{a^2c^2+a^4}{c^2}$，

由$\angle OBF=\angle OFB$，所以$\left|OB\right|=\left|OF\right|$，所以$m^2+n^2=c^2$，即$\dfrac{a^2c^2+a^4}{c^2}+\dfrac{a^2b^2}{c^2}=c^2$，

化简得$2a^2=c^2$，则$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{2}$，所以双曲线的离心率为$\sqrt{2}$.

故选：B.



8．已知F_1，F_2是双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$的左、右焦点，若双曲线上存在点$P$满足$\overrightarrow{PF_2}\cdot\overrightarrow{PF_1}=-2a^2$，则双曲线离心率的最小值为（　　）

A．$\sqrt{6}$　　　　B．$\sqrt{5}$　　　　C．2　　　　D．$\sqrt{3}$

【答案】D

【分析】设P的坐标，代入双曲线的方程，利用数量积的坐标表示，结合双曲线离心率的计算公式求解即得.

【详解】设$P(x_0,y_0)$，双曲线的半焦距为c，则有$|x_0|\ge a$，$\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$，$F_1(-c,0),F_2(c,0)$，

于是$\overrightarrow{PF_2}=(c-x_0,-y_0),\overrightarrow{PF_1}=(-c-x_0,-y_0)$，

因此$\overrightarrow{PF_2}\cdot\overrightarrow{PF_1}=x_0^2-c^2+y_0^2=x_0^2+(\dfrac{x_0^2}{a^2}-1)b^2-c^2=\dfrac{c^2}{a^2}\cdot x_0^2-b^2-c^2\ge\dfrac{c^2}{a^2}\cdot a^2-b^2-c^2=-b^2$，

当且仅当$|x_0|=a$时取等号，则$-2a^2\ge -b^2$，即$\dfrac{b^2}{a^2}\ge 2$，离心率$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}\ge\sqrt{3}$，

所以双曲线离心率的最小值为$\sqrt{3}$.

故选：D

9．过双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左焦点且垂直于$x$轴的直线与双曲线交于$A,B$两点，$D$为虚轴上的一个端点，且$\angle ADB$为钝角，则此双曲线离心率的取值范围为（　）

A．$\left(1,\sqrt{2}\right)$　　　　B．$\left(\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$　　　C．$\left(\sqrt{2},2\right)$　　　　D．$\left(\sqrt{2+\sqrt{2}},+\infty\right)$

【答案】D

【分析】根据双曲线的性质求出A,B,D的坐标，写出向量$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}$，根据$\angle ADB$为钝角，结合向量的数量积公式化简求解即可.

【详解】设双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左焦点为$F_1(-c,0)$，

令$x=-c$，得$y=\pm\frac{b^2}{a}$，

可设$A\left(-c,\frac{b^2}{a}\right),B\left(-c,-\frac{b^2}{a}\right)$

由对称性，不妨设$D(0,b)$，可得$\overrightarrow{DA}=\left(-c,\frac{b^2}{a}-b\right)$，$\overrightarrow{DB}=\left(-c,-\frac{b^2}{a}-b\right)$，

由题意知A,D,B三点不共线，

所以$\angle ADB$为钝角$\Leftrightarrow\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}<0$，

即为$c^2-\left(\frac{b^2}{a}+b\right)\left(\frac{b^2}{a}-b\right)<0$，

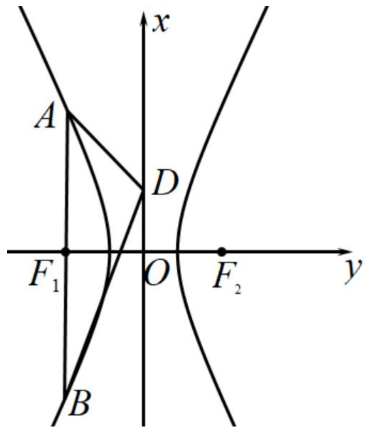
将$b^2=c^2-a^2$代入化简得$e^4-4a^2c^2+2a^4>0$，

由$e=\frac{c}{a}$，可得$e^4-4e^2+2>0$，

又$e>1$，解得$e^2>2+\sqrt{2}$，则$e>\sqrt{2+\sqrt{2}}$，

综上，离心率的取值范围为$(\sqrt{2+\sqrt{2}},+\infty)$.

故选：D.



10．已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的左右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_1 作 x 轴的垂线交 C 于点 P．$OM\perp PF_2$ 于点 M（其中 O 为坐标原点），且有 $\overrightarrow{PF_2}=3\overrightarrow{MF_2}$，则 C 的离心率为______．

【答案】$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

【分析】由向量垂直的坐标表示得出关于 a,b,c 的齐次式后可得离心率．

【详解】如图，易得 $P(-c,\frac{b^2}{a})$，$F_2(c,0)$，$\overrightarrow{PF_2}=(2c,-\frac{b^2}{a})$，设 $M(x,y)$，

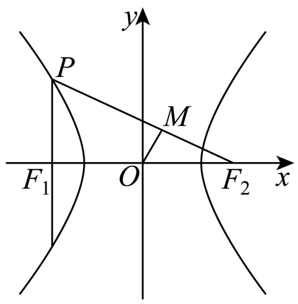
$\overrightarrow{MF_2}=(c-x,-y)$，由 $\overrightarrow{PF_2}=3\overrightarrow{MF_2}$ 得 $(2c,-\frac{b^2}{a})=3(c-x,-y)$，

$\begin{cases}2c=3(c-x)\\ -\frac{b^2}{a}=-3y\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=\frac{1}{3}c\\ y=\frac{b^2}{3a}\end{cases}$，即 $M(\frac{1}{3}c,\frac{b^2}{3a})$，$\overrightarrow{OM}=(\frac{1}{3}c,\frac{b^2}{3a})$，

又 $OM\perp PF_2$，$\therefore\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{PF_2}=\frac{2}{3}c^2-\frac{b^4}{3a^2}=0$，$e=\frac{c}{a}$，$b^2=c^2-a^2$ 代入得 $2e^2-(e^2-1)^2=0$，因为 $e>1$ 故解得

$e=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$，

故答案为：$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$．



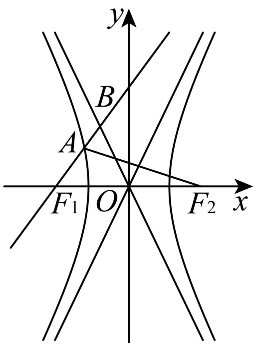
11．已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过点 F_1 作直线分别交双曲线左支和一条渐近线于点 A,B（A,B 在同一象限内），且满足 $\left|F_1A\right|=\left|AB\right|$．联结 AF_2，满足 $AF_2\perp BF_1$．若该双曲线的

离心率为e，求e^2的值____________.

【答案】$12-4\sqrt{7}$

【分析】设点$A\left(x_0,y_0\right)(x_0<0,y_0>0)$，由$AF_2\perp BF_1$，A在双曲线上，$\left|F_1A\right|=\left|AB\right|$得到$B$的坐标，然后根据$B$在渐近线$y=-\dfrac{b}{a}x$上列方程，解方程得到$a=\dfrac{\sqrt{7}+2}{3}b$，然后求离心率即可.

【详解】



不妨设$A\left(x_0,y_0\right)(x_0<0,y_0>0)$，

由$AF_2\perp BF_1$得$\dfrac{y_0}{x_0-c}\cdot\dfrac{y_0}{x_0+c}=-1$，化简得$y_0^2+x_0^2-c^2=0$（1），

$\because A$在双曲线上，$\therefore\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$，即$x_0^2=a^2+\dfrac{a^2y_0^2}{b^2}$， 代入（1）解得$y_0=\dfrac{b^2}{c}$，

$\because\left|F_1A\right|=\left|AB\right|$，$\therefore B\left(2x_0+c,2y_0\right)$，

又$\because B$在渐近线$y=-\dfrac{b}{a}x$上，

$\therefore 2y_0=-\dfrac{b}{a}\left(2x_0+c\right)$，即$-2bx_0=2ay_0+bc$.

两边平方得$4b^2x_0^2=4a^2y_0^2+b^2c^2+4abcy_0$（2），

将$x_0^2=a^2+\dfrac{a^2y_0^2}{b^2}$和$y_0=\dfrac{b^2}{c}$代入（2）得$\dfrac{4a^2b^4}{c^2}+b^2c^2+4ab^3=4a^2b^2+\dfrac{4a^2b^4}{c^2}$，

化简得$3a^2-4ab-b^2=0$，解得$a=\dfrac{\sqrt{7}+2}{3}b$或$a=\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}b$（舍去），

即$a^2=\dfrac{11+4\sqrt{7}}{9}\left(c^2-a^2\right)$，化简得$e^2=12-4\sqrt{7}$.

故答案为：$12-4\sqrt{7}$.

12．已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，过$F_1$斜率为$\dfrac{4}{3}$的直线与$C$的右支交于点$P$，若线段$PF_1$与$y$轴的交点恰为$PF_1$的中点，则$C$的离心率为（　）

A．$\dfrac{1}{3}$　　B．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　C．2　　D．3

【答案】D

【分析】求得 P 点坐标，根据直线 PF_1 的斜率列方程，化简求得双曲线的离心率.

【详解】由于线段 PF_1 与 y 轴的交点恰为 PF_1 的中点，且 O 是 F_1F_2 的中点，

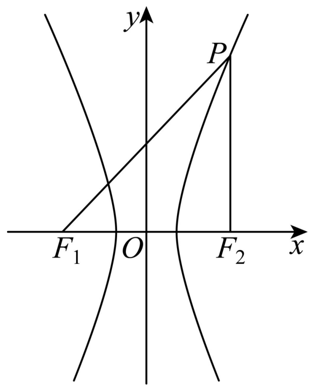
所以 $PF_2 \perp F_1F_2$，由 $\frac{c^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 解得 $y_P=\frac{b^2}{a}$，

则 $P\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$，而 $F_1(-c,0)$，所以 $k_{PF_1}=\frac{\frac{b^2}{a}}{2c}=\frac{b^2}{2ac}=\frac{c^2-a^2}{2ac}=\frac{4}{3}$，

$8ac=3c^2-3a^2, 3c^2-8ac-3a^2=0$，

两边除以 a^2 得 $3e^2-8e-3=0$，解得 $e=3$ 或 $e=-\frac{1}{3}$（舍去）.

故选：D



13．直线 $y=2x$ 与椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的交点在 x 轴上的射影恰好是椭圆的焦点，则椭圆 C 的离心率为（　　）

A．$\sqrt{2}-1$　　　　B．$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$　　　　C．$\sqrt{3}-1$　　　　D．$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

【答案】A

【分析】根据A在椭圆上和直线 $y=2x$ 上列方程，整理后求得椭圆的离心率.

【详解】设在第一象限的交点为 A，右焦点为 $F(c,0)$，

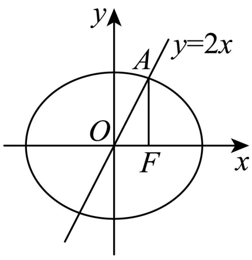
根据题意：$AF \perp x$ 轴，A 在椭圆上，

由 $\frac{c^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 解得 $y_A=\frac{b^2}{a}$，则 $A\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$，$A$ 在直线 $y=2x$ 上，则 $A(c,2c)$，

所以 $2c=\frac{b^2}{a}$，$b^2=2ac$，$a^2-c^2=2ac$，所以 $e^2+2e-1=0\,(0<e<1)$，

解得 $e=\sqrt{2}-1$.

故选：A



题型三　利用第一定义求解

14．已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0),F_1,F_2$分别是$C$的左，右焦点，$P$为$C$上一点，若线段$PF_1$的中点在$y$轴上，$\angle PF_1F_2=\frac{\pi}{6}$，则$C$的离心率为（　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　　　B．$\frac{2}{3}$　　　　C．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　　　D．$2-\sqrt{3}$

【答案】A

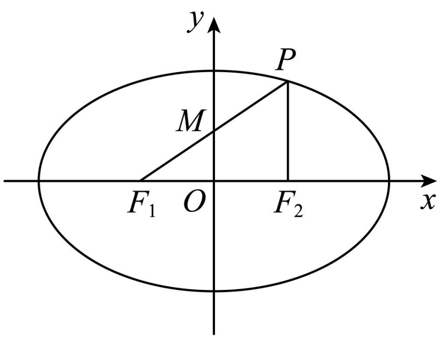
【分析】根据中点关系可得$PF_2\perp x$轴，进而根据直角三角形中的边角关系，结合椭圆定义即可求解.

【详解】由于线段PF_1的中点M在y轴上,O是F_1F_2的中点，所以$MO//PF_2,\therefore PF_2\perp x$轴，

$\left|F_1F_2\right| = 2c$，$\angle PF_1F_2=\frac{\pi}{6}$，所以$\left|PF_2\right|=\left|F_1F_2\right|\tan\angle PF_1F_2=\frac{2\sqrt{3}c}{3}$，$\left|PF_1\right|=\frac{\left|F_1F_2\right|}{\cos\angle PF_1F_2}=\frac{2c}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4\sqrt{3}c}{3}$，

由椭圆定义可得$\frac{2\sqrt{3}c}{3}+\frac{4\sqrt{3}c}{3}=2a\Rightarrow a=\sqrt{3}c\Rightarrow e=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

故选：A



15．F_1，F_2是椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的左，右焦点，点$M$为椭圆$E$上一点，点$N$在$x$轴上，满足$\angle F_1MN=\angle F_2MN=45°$，$3\left|NF_1\right|=4\left|NF_2\right|$，则椭圆$E$的离心率为______.

【答案】$\frac{5}{7}$

【分析】根据$\angle F_1MN=\angle F_2MN=45°$，得到$F_1M\perp F_2M$，且$MN$是$\angle F_1MF_2$的角平分线，再结合$3\left|NF_1\right|=4\left|NF_2\right|$和角平分线定理得到$\frac{\left|F_1M\right|}{\left|F_2M\right|}=\frac{4}{3}$，然后在$\mathrm{Rt}\triangle F_1MF_2$中，利用勾股定理求解.

【详解】解：因为$\angle F_1MN=\angle F_2MN=45^\circ$，

所以$F_1M\perp F_2M$，则MN是$\angle F_1MF_2$的角平分线，

所以$\frac{|F_1M|}{|F_2M|}=\frac{|F_1N|}{|F_2N|}$，

又因为$3|NF_1|=4|NF_2|$，

所以$\frac{|F_1M|}{|F_2M|}=\frac{4}{3}$，设$|F_1M|=4x,|F_2M|=3x$，

由椭圆定义得$|F_1M|+|F_2M|=2a$，

即$4x+3x=2a$，解得$x=\frac{2}{7}a$，

则$|F_1M|=\frac{8}{7}a,|F_2M|=\frac{6}{7}a$，

则$\left(\frac{8}{7}a\right)^2+\left(\frac{6}{7}a\right)^2=4c^2$，

所以$\frac{c^2}{a^2}=\frac{25}{49}$，则$e=\frac{c}{a}=\frac{5}{7}$，

故答案为：$\frac{5}{7}$

16．已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，经过$F_2$的直线交椭圆$C$于$P,Q$两点，$O$为坐标原点，且$\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF_2}\right)\cdot\overrightarrow{PQ}=0,\overrightarrow{PF_2}=2\overrightarrow{F_2Q}$，则椭圆$C$的离心率为______.

【答案】$\frac{\sqrt{5}}{3}$/$\frac{1}{3}\sqrt{5}$

【分析】利用向量的数量积的运算律，以及椭圆的定义，利用齐次化方法求离心率.

【详解】因为$\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF_2}\right)\cdot\overrightarrow{PQ}=0,\overrightarrow{PF_2}=2\overrightarrow{F_2Q}$，所以$\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF_2}\right)\cdot\frac{3}{2}\overrightarrow{PF_2}=0$，

即$\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF_2}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OF_2}-\overrightarrow{OP}\right)=0$，

所以$|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OF_2}|=|\overrightarrow{OF_1}|=c$，所以$\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{2}$.

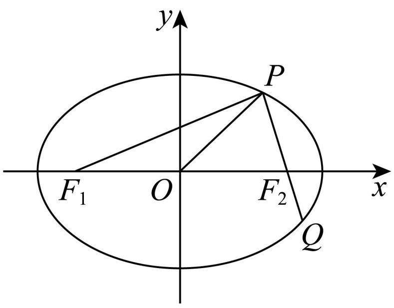
设$|F_2Q|=x$，则$|PF_2|=2x$，所以$|PF_1|=2a-2x,|QF_1|=2a-x$，

由$|PF_1|^2+|PQ|^2=|QF_1|^2$得$(2a-2x)^2+(3x)^2=(2a-x)^2$，

所以$a=3x$，所以$|PF_2|=\frac{2}{3}a,|PF_1|=\frac{4a}{3}$，

在$\mathrm{Rt}\triangle PF_1F_2$中，由$|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2$，

得$\left(\dfrac{2}{3}a\right)^2+\left(\dfrac{4}{3}a\right)^2=(2c)^2$，所以$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.



故答案为: $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

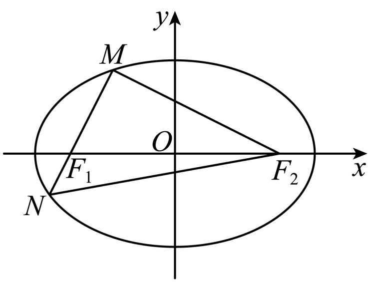
17. 已知F_1，F_2分别是椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左，右焦点，$M,N$是椭圆$C$上两点，且$\overrightarrow{MF_1}=2\overrightarrow{F_1N}$，$\overrightarrow{MF_2}\cdot\overrightarrow{MN}=0$，则椭圆$C$的离心率为（　）

A．$\dfrac{3}{4}$　　B．$\dfrac{2}{3}$　　C．$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　D．$\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

【答案】C

【分析】设$|NF_1|=n$，结合椭圆的定义，在$\mathrm{Rt}\triangle MNF_2$中利用勾股定理求得$n=\dfrac{a}{3}$，$\mathrm{Rt}\triangle MF_1F_2$中利用勾股定理求得$36c^2=20a^2$，可求椭圆$C$的离心率.

【详解】连接NF_2，设$|NF_1|=n$，则$|MF_1|=2n$，$|MF_2|=2a-2n$，$|NF_2|=2a-n$，



在$\mathrm{Rt}\triangle MNF_2$中$|MN|^2+|MF_2|^2=|NF_2|^2$，即$(3n)^2+(2a-2n)^2=(2a-n)^2$，

$\therefore 9n^2+4a^2-8an+4n^2=4a^2-4an+n^2$，$\therefore 12n^2=4an$，$n=\dfrac{a}{3}$，

$\therefore |MF_1|=\dfrac{2a}{3}$，$|MF_2|=\dfrac{4a}{3}$，

在$\mathrm{Rt}\triangle MF_1F_2$中，$|MF_1|^2+|MF_2|^2=|F_1F_2|^2$，即$4c^2=\dfrac{4a^2}{9}+\dfrac{16a^2}{9}$，

$\therefore 36c^2=20a^2$，$e^2=\dfrac{20}{36}=\dfrac{5}{9}$，又$\because e\in(0,1)$，$\therefore e=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

故选：C.

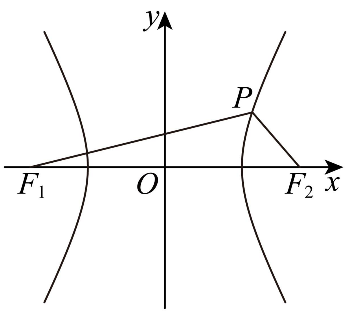
18．已知F_1,F_2是双曲线C的两个焦点，P为C上一点，且$\angle F_1PF_2=120^\circ$，$|PF_1|=4|PF_2|$，则C的离心率为（　）

A．$\dfrac{\sqrt{21}}{3}$　　B．$\dfrac{\sqrt{21}}{5}$　　C．$\sqrt{7}$　　D．$\sqrt{13}$

【答案】A

【分析】根据$|PF_1|=4|PF_2|$，$\angle F_1PF_2=120^\circ$，利用余弦定理可得$c=\dfrac{\sqrt{21}}{2}m$，再由双曲线定义可得$a=\dfrac{3m}{2}$，由离心率定义可得$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$.

【详解】如下图所示：



根据题意可设$|PF_2|=m,|PF_1|=4m,m>0$，易知$|F_1F_2|=2c$；

由余弦定理可知$\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{|PF_2|^2+|PF_1|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|}=\dfrac{17m^2-4c^2}{2\cdot 4m\cdot m}=-\dfrac{1}{2}$，可得$c^2=\dfrac{21}{4}m^2$；

即$c=\dfrac{\sqrt{21}}{2}m$，

由双曲线定义可知可知$|PF_1|-|PF_2|=3m=2a$，即$a=\dfrac{3m}{2}$；

所以离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$.

故选：A

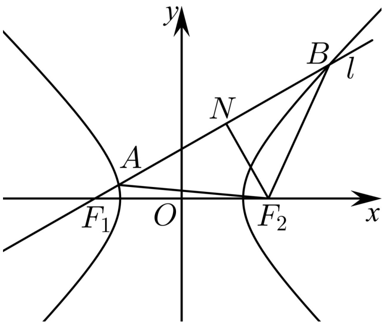
19．已知F_1,F_2是双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左，右焦点，过点$F_1$倾斜角为$30^\circ$的直线与双曲线的左，右两支分别交于点$A,B$.若$|AF_2|=|BF_2|$，则双曲线$C$的离心率为（　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．$2\sqrt{2}$

【答案】A

【分析】设$\left|AF_2\right|=\left|BF_2\right|=m$，利用双曲线的定义及题中几何关系将$m$用$a$、$c$表示，再利用几何关系建立关于$a$、$c$齐次方程，从而求出离心率.

【详解】如图，过F_2作$AB\perp F_2N$与N，



设$\left|AF_2\right|=\left|BF_2\right|=m$，则$\left|AF_1\right|=m-2a$，$\left|BF_1\right|=2a+m$，

$\therefore \left|AB\right|=\left|BF_1\right|-\left|AF_1\right|=4a$，$\left|AN\right|=2a$，$\left|F_1N\right|=m$，

由题意知$\angle BF_1F_2=30^\circ$，

$\therefore$在$\mathrm{Rt}\triangle F_1NF_2$中，$\left|F_2N\right|=\left|F_1F_2\right|\sin 30^\circ=c$，

$\left|F_1N\right|=\left|F_1F_2\right|\cos 30^\circ=\sqrt{3}c$，

$\therefore m=\sqrt{3}c$，

在$\mathrm{Rt}\triangle ANF_2$中，$AN^2+NF_2^2=AF_2^2$，

即$\left(2a\right)^2+c^2=\left(\sqrt{3}c\right)^2$解得$\dfrac{c}{a}=\sqrt{2}$.

双曲线C的离心率为$\sqrt{2}$.

故选：A.

题型四　利用第二定义求解

20．已知直线$y=1-x$与双曲线$ax^2+by^2=1$（$a>0$，$b<0$）的渐近线交于A，B两点，且过原点和线段AB中点的直线的斜率为$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则$\dfrac{a}{b}$的值为______________.

【答案】$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【分析】设$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，利用点差法可求$\dfrac{a}{b}$的值.

【详解】设$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，AB的中点为$M\left(x_0,y_0\right)$，故$\begin{cases}ax_1^2+by_1^2=1\\ax_2^2+by_2^2=1\end{cases}$，

所以$a\left(x_1-y_1\right)\left(x_1+y_1\right)+b\left(x_2-y_2\right)\left(x_2+y_2\right)=0$即

$a\left(x_1-x_2\right)x_0+b\left(y_1-y_2\right)y_0=0$，所以$a+b\times\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\times\frac{y_0}{x_0}=0$.

因为过原点和线段AB中点的直线的斜率为$-\frac{\sqrt{3}}{2}$，故$\frac{y_0}{x_0}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由$AB:y=-x+1$可得$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-1$，所以$a+b\times(-1)\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$，

所以$\frac{a}{b}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故答案为$-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【点睛】直线和圆锥曲线的位置关系中，如果涉及到弦的中点问题，可以考虑用点差法来简化计算.

21．已知椭圆C的左右焦点分别为F_1，F_2，P，Q为C上两点，$2\overrightarrow{PF_2}=3\overrightarrow{F_2Q}$，若$\overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$，则$C$的离心率为（　）

A．$\frac{3}{5}$　　B．$\frac{4}{5}$　　C．$\frac{\sqrt{13}}{5}$　　D．$\frac{\sqrt{17}}{5}$

【答案】D

【分析】根据椭圆的焦点三角形，结合勾股定理即可求解.

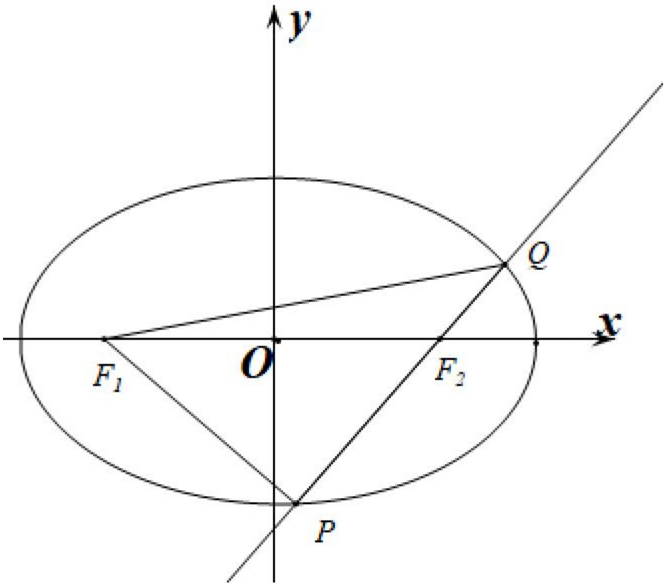
【详解】设$\left|\overrightarrow{PF_2}\right|=3m$，则$\left|\overrightarrow{QF_2}\right|=2m$，$\left|\overrightarrow{PF_1}\right|=2a-3m$，$\left|\overrightarrow{QF_1}\right|=2a-2m$.$|PQ|=5m$

在$\triangle PQF_1$中得：$(2a-3m)^2+25m^2=(2a-2m)^2$，即$m=\frac{2}{15}a$.

因此$\left|\overrightarrow{PF_2}\right|=\frac{2}{5}a$，$\left|\overrightarrow{PF_1}\right|=\frac{8}{5}a$，$\left|\overrightarrow{F_2F_1}\right|=2c$，

在$\triangle PF_1F_2$中得：$\frac{64}{25}a^2+\frac{4}{25}a^2=4c^2$，故$17a^2=25c^2$，所以$e=\frac{\sqrt{17}}{5}$.

故选：D



22．设F_1，F_2分别是椭圆C的左，右焦点，过点F_1的直线交椭圆C于M，N两点，若$\overrightarrow{MF_1}=3\overrightarrow{F_1N}$，且$\cos\angle MNF_2=\frac{4}{5}$，则椭圆$C$的离心率为_________.

【答案】$\frac{\sqrt{2}}{2}$/$\frac{1}{2}\sqrt{2}$

【分析】如图，设$|F_1N|=x$，由题意，椭圆定义结合余弦定理可得$x=\frac{a}{3}$，后在$\triangle NF_1F_2$由余弦定理可得$|F_1F_2|=\sqrt{2}a$，即可得答案.

【详解】如图，设$|F_1N|=x$，则$|MF_1|=3x$，$|MN|=4x$.

又由椭圆定义可得$|MF_2|=2a-3x,|F_2N|=2a-x$.

则在$\triangle MNF_2$中，由余弦定理可得:

$$\frac{|MN|^2+|NF_2|^2-|MF_2|^2}{2|MN|\cdot|NF_2|}=\frac{4}{5}\Rightarrow\frac{16x^2+(2a-x)^2-(2a-3x)^2}{8x(2a-x)}=\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow\frac{8x^2+8ax}{8x(2a-x)}=\frac{4}{5}\Rightarrow 10x^2+10ax=16ax-8x^2\Rightarrow 18x^2=6ax\Rightarrow x=\frac{a}{3}.$$

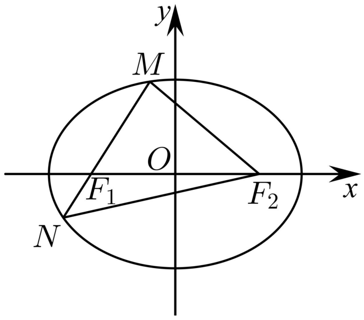
则$|F_1N|=\frac{a}{3},|NF_2|=\frac{5a}{3}$，

则在$\triangle NF_1F_2$由余弦定理可得：

$$|F_1F_2|=\sqrt{|F_1N|^2+|F_2N|^2-2|F_1N|\cdot|F_2N|}=\sqrt{\frac{a^2}{9}+\frac{25a^2}{9}-2\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{5a}{3}\cdot\frac{4}{5}}=\sqrt{2}a$$

又$|F_1F_2|=2c\Rightarrow\sqrt{2}a=2c\Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故答案为：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



23．已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的右焦点为$F_2$，过右焦点作倾斜角为$\dfrac{\pi}{3}$的直线交椭圆于$G,H$两点，且$\overrightarrow{GF_2}=2\overrightarrow{F_2H}$，则椭圆的离心率为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　　　C．$\frac{2}{3}$　　　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】C

【分析】根据题意写出直线方程，与椭圆方程联立，运用韦达定理与$\overrightarrow{GF_2}=2\overrightarrow{F_2H}$构建出关于$a$、$b$、$c$的齐次方程，根据离心率公式即可解得.

【详解】设$F_2(c,0)$，$G(x_1,y_1)$，$H(x_2,y_2)$，过点F_2做倾斜角为$\dfrac{\pi}{3}$的直线斜率$k=\sqrt{3}$，

直线方程为$y=\sqrt{3}(x-c)$，联立方程$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ y=\sqrt{3}(x-c)\end{cases}$，

可得$\left(a^2+\dfrac{1}{3}b^2\right)y^2+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}b^2cy-b^4=0$，

根据韦达定理：$y_1+y_2=-\dfrac{2\sqrt{3}b^2c}{3a^2+b^2}$，$y_1y_2=-\dfrac{3b^4}{3a^2+b^2}$，

因为$\overrightarrow{GF_2}=2\overrightarrow{F_2H}$，即$(c-x_1,-y_1)=2(x_2-c,y_2)$，所以$y_1=-2y_2$，

所以$\dfrac{y_1}{y_2}+\dfrac{y_2}{y_1}=\dfrac{(y_1+y_2)^2}{y_1y_2}-2=\dfrac{\left(-\dfrac{2\sqrt{3}b^2c}{3a^2+b^2}\right)^2}{-\dfrac{3b^4}{3a^2+b^2}}-2=-2-\dfrac{1}{2}$，

即$\dfrac{4c^2}{3a^2+b^2}=\dfrac{1}{2}$，所以$3a^2+b^2=8c^2$，联立$\begin{cases}3a^2+b^2=8c^2\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，

可得$4a^2=9c^2$，$e^2=\dfrac{4}{9}\Rightarrow e=\dfrac{2}{3}$.

故选：C.

24．已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左焦点为$F_1$，过左焦点$F_1$作倾斜角为$\frac{\pi}{6}$的直线交椭圆于$A$，$B$两点，且$\overrightarrow{AF_1}=3\overrightarrow{F_1B}$，则椭圆$C$的离心率为（　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【答案】C

【分析】联立直线与椭圆方程可得韦达定理，进而根据向量共线的坐标运算可得$a^2+3b^2=9c^2$，进而结合$a^2=b^2+c^2$求解离心率.

【详解】设$F_1(-c,0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，过点F_1所作直线的倾斜角为$\frac{\pi}{6}$，所以该直线斜率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以直线方程可写为$x=\sqrt{3}y-c$，联立方程$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ x=\sqrt{3}y-c\end{cases}$，

可得$\left(a^2+3b^2\right)y^2-2\sqrt{3}b^2cy-b^4=0$，$\Delta=\left(2\sqrt{3}b^2c\right)^2+4b^4\left(a^2+3b^2\right)>0$，

根据韦达定理：$y_1+y_2=\frac{2\sqrt{3}b^2c}{a^2+3b^2}$，$y_1y_2=-\frac{b^4}{a^2+3b^2}$，

因为$\overrightarrow{AF_1}=3\overrightarrow{F_1B}$，即$\left(-c-x_1,-y_1\right)=3\left(x_2+c,y_2\right)$，所以$y_1=-3y_2$，

所以$\frac{y_1}{y_2}+\frac{y_2}{y_1}=\frac{\left(y_1+y_2\right)^2}{y_1y_2}-2=\frac{\left(\frac{2\sqrt{3}b^2c}{a^2+3b^2}\right)^2}{-\frac{b^4}{a^2+3b^2}}-2=-3-\frac{1}{3}$，

即$\frac{3c^2}{a^2+3b^2}=\frac{1}{3}$，所以$a^2+3b^2=9c^2$，联立$\begin{cases}a^2+3b^2=9c^2\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，

可得$a^2=3c^2$，$e^2=\frac{1}{3}\Rightarrow e=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故选：C

25．设F_1,F_2分别为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右焦点，$M$为椭圆上一点，直线$MF_1,MF_2$分别交椭圆于点$A$，$B$，若$\overrightarrow{MF_1}=2\overrightarrow{F_1A},\overrightarrow{MF_2}=3\overrightarrow{F_2B}$，则椭圆离心率为（　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{21}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{7}$　　C．$\frac{3}{7}$　　D．$\frac{\sqrt{21}}{7}$

【答案】D