5.1.1 利用函数性质判定方程解的存在性

【学习目标】

1.结合学过的函数图象，了解函数零点与方程解的关系.

2.结合具体函数及其图象的特点，了解函数零点存在定理．

返回目录

知识点一 函数的零点

使得$f(x_0)=0$的数x_0称为方程$f(x)=0$的解，也称为函数$f(x)$的零点.$f(x)$的零点就是函数$y=f(x)$的图象与x轴交点的__横坐标__.

【诊断分析】

判断正误.（请在括号中打“√”或“×”）

（1）函数$y = x + 1$的零点是$(-1,0)$.（ × ）

[解析] 零点不是点，是一个数，是函数图象与x轴交点的横坐标.

（2）函数$y = x^2 - 2x - 3$有两个零点.（ √ ）

返回目录

知识点二 零点存在定理

若函数$y = f(x)$在闭区间$[a, b]$上的图象是一条连续的曲线，并且在区间端点的函数值一正一负，即$\underline{f(a)\cdot f(b) < 0}$，则在开区间$(a, b)$内，函数$y = f(x)$至少有一个零点，即在区间$(a, b)$内相应的方程$f(x) = 0$<u>至少有一个</u>解.

返回目录

【诊断分析】

判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1) $f(x)$在区间$[a,b]$内满足$f(a)\cdot f(b)>0$,则$f(x)$在区间(a,b)内无零点.(×)

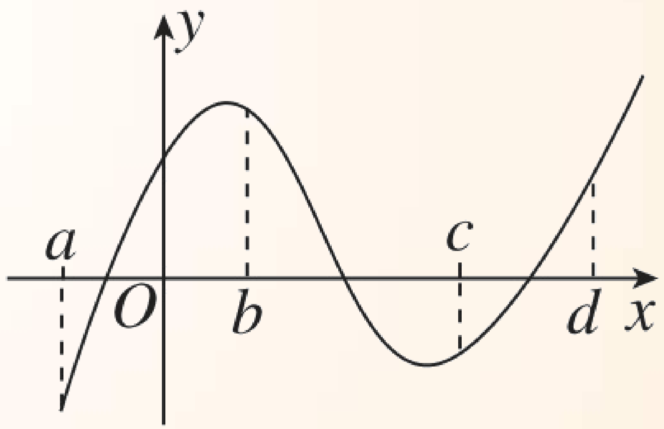
(2) $f(x)$在区间(a,b)内有一个零点,则$f(a)\cdot f(b)<0$.(×)

[解析] 函数$y=x^2$在区间$(-2,2)$内有零点,但$f(-2)\cdot f(2)>0$.

返回目录

探究点一 由图象确定函数的零点

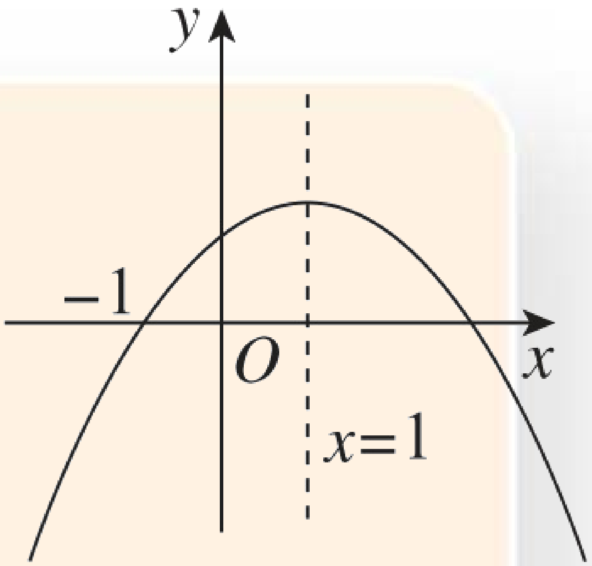
例1（1）已知函数$f(x)$的图象如图所示，则函数$f(x)$在$[a,d]$内有__3__个零点.



[解析] 由题图知函数$f(x)$在$[a,d]$内有3个零点.

返回目录

（2）已知二次函数$y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$的图象如图所示，则下列结论中正确的是（ **D** ）



A.$a > 0$

B.$c < 0$

C.$(-1,0)$是函数的一个零点

D.3是函数的一个零点

[解析] 由题图可知$a < 0, c > 0$，$\because$ 函数图象的对称轴为直线$x = 1$，函数图象与x轴的一个交点的坐标为$(-1,0)$，$\therefore$ 函数图象与x轴的另一个交点的坐标为$(3,0)$，$\therefore$ 3是函数的一个零点.故选D.

返回目录

（3）定义在**R**上的奇函数$f(x)$满足$f(x)=x^2-2x(x\geq 0)$，则函数$f(x)$的零点个数为(　**D**　)

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

[解析] 根据题意可知$x=2$，$x=0$为$f(x)$的零点，因为奇函数的图象关于原点对称，所以$x=-2$也为$f(x)$的零点，所以$f(x)$的零点共有3个，故选D.

[素养小结]

由图象确定函数的零点个数主要有两种方法：

1.直接画出函数的图象，通过图象与x轴交点的个数确定零点个数.

2.将函数$f(x)$写成$f(x)=h(x)-g(x)$的形式，画出函数$y=h(x)$与$y=g(x)$的图象，根据两函数图象的交点个数判断方程$h(x)=g(x)$的根的个数，即可确定函数$f(x)$的零点个数.

返回目录

探究点二 由方程的解求函数的零点

[提问] 当方程易得出解时，可通过__解方程__得到对应函数的零点.

例2 求函数$f(x)=(ax-1)(x-1)(a\in\mathbf{R})$的零点.

解：①当$a=0$时，函数$f(x)=-x+1$.令$-x+1=0$，得$x=1$,则函数$f(x)$的零点为1.

返回目录

②当$a=1$时，函数$f(x)=(x-1)^2$.令$(x-1)^2=0$，得$x=1$，则函数$f(x)$的零点为1.

③当$a\neq 0$且$a\neq 1$时，令$(ax-1)(x-1)=0$，得$x=1$或$x=\frac{1}{a}$，则函数$f(x)$的零点为1，$\frac{1}{a}$.

综上，当$a=0$或$a=1$时，函数$f(x)$的零点为1；当$a\neq 0$且$a\neq 1$时，函数$f(x)$的零点为1，$\frac{1}{a}$.

返回目录

变式 函数$f(x)=\begin{cases}x^2+x-2, x\le 0,\\ -1+\ln x, x>0\end{cases}$的零点为__$-2$, e__.

[解析] 由$f(x)=0$,得$\begin{cases}x\le 0,\\ x^2+x-2=0\end{cases}$或$\begin{cases}x>0,\\ -1+\ln x=0,\end{cases}$解得$x=-2$或$x=e$.

[素养小结]

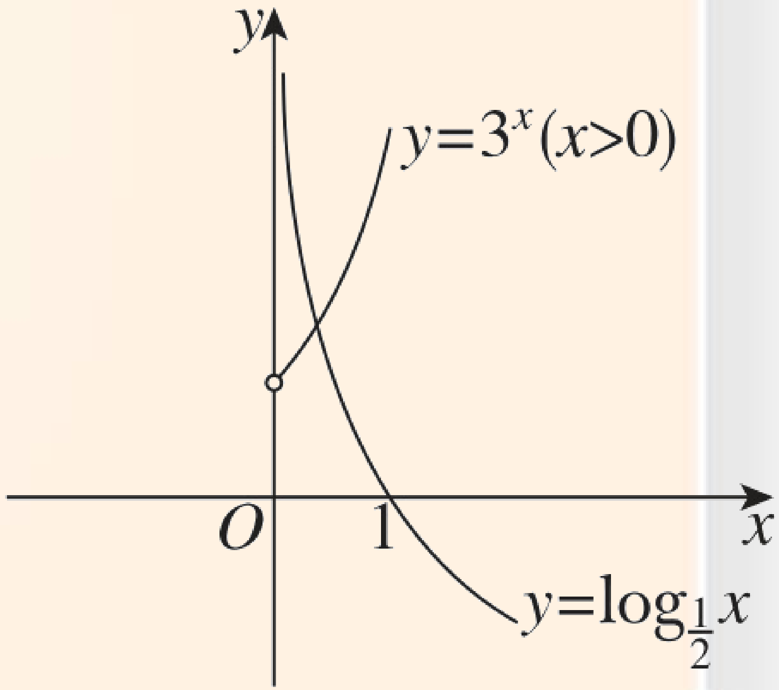
求函数$y=f(x)$的零点通常有两种方法：其一是令$y=0$，由对应方程的根求得函数的零点；其二是画出函数的图象，图象与x轴的交点的横坐标即为函数的零点.

返回目录

探究点三 函数零点的综合问题

角度1 判断函数零点个数

例3 求函数$f(x)=3^x-\log_{\frac{1}{2}}x$的零点个数.



解：令$f(x)=0$得$3^x=\log_{\frac{1}{2}}x$.

作出$y=3^x(x>0)$和$y=\log_{\frac{1}{2}}x$的图象，如图所示，

由图可知$y=3^x(x>0)$和$y=\log_{\frac{1}{2}}x$的图象有1个交点，

$\therefore f(x)=3^x-\log_{\frac{1}{2}}x$有1个零点.

返回目录