专题46 古典概型与概率的基本性质

【考点预测】

知识点1、随机事件的概率

对随机事件发生可能性大小的度量(数值)称为事件的概率，事件A的概率用$P(A)$表示.

知识点2、古典概型

（1）定义

一般地，若试验E具有以下特征：

①有限性：样本空间的样本点只有有限个；

②等可能性：每个样本点发生的可能性相等.

称试验E为古典概型试验，其数学模型称为古典概率模型，简称古典概型.

（2）古典概型的概率公式

一般地，设试验E是古典概型，样本空间Ω包含n个样本点，事件A包含其中的k个样本点，则定义事件A的概率$P\left(A\right)=\dfrac{k}{n}=\dfrac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)}$.

知识点3、概率的基本性质

（1）对于任意事件A都有：$0\le P(A)\le 1$.

（2）必然事件的概率为1，即$P(\Omega)=1$；不可能事概率为0，即$P(\varnothing)=0$.

（3）概率的加法公式：若事件A与事件B互斥，则$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

推广：一般地，若事件A_1，A_2，…，A_n彼此互斥，则事件发生（即A_1，A_2，…，A_n中有一个发生）的概率等于这n个事件分别发生的概率之和，即：$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)$.

（4）对立事件的概率：若事件A与事件B互为对立事件，则$P(A)=1-P(B)$，$P(B)=1-P(A)$，且$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=1$.

（5）概率的单调性：若$A\subseteq B$，则$P(A)\le P(B)$.

（6）若A，B是一次随机实验中的两个事件，则$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

【方法技巧与总结】

1、解决古典概型的问题的关键是：分清基本事件个数n与事件A中所包含的基本事件数.

因此要注意清楚以下三个方面：

(1)本试验是否具有等可能性；

(2)本试验的基本事件有多少个；

(3)事件A是什么.

2、解题实现步骤：

(1)仔细阅读题目，弄清题目的背景材料，加深理解题意；

(2)判断本试验的结果是否为等可能事件，设出所求事件A；

(3)分别求出基本事件的个数n与所求事件A中所包含的基本事件个数m；

(4)利用公式$P(A)=\dfrac{A包含的基本事件的个数}{基本事件的总数}$求出事件$A$的概率.

3、解题方法技巧：

(1)利用对立事件、加法公式求古典概型的概率

(2)利用分析法求解古典概型.

①任一随机事件的概率都等于构成它的每一个基本事件概率的和.

②求试验的基本事件数及事件A包含的基本事件数的方法有列举法、列表法和树状图法.

【题型归纳目录】

题型一：简单的古典概型问题

题型二：古典概型与向量的交汇问题

题型三：古典概型与几何的交汇问题

题型四：古典概型与函数的交汇问题

题型五：古典概型与数列的交汇问题

题型六：古典概率与统计的综合

题型七：有放回与无放回问题的概率

题型八：概率的基本性质

【典例例题】

题型一：简单的古典概型问题

例1.（2023·全国·高三专题练习（理））池州九华山是著名的旅游胜地．天气预报8月1日后连续四天，每天下雨的概率为0.6，现用随机模拟的方法估计四天中恰有三天下雨的概率：在0~9十个整数值中，假定0，1，2，3，4，5表示当天下雨，6，7，8，9表示当天不下雨．在随机数表中从某位置按从左到右的顺序读取如下20组四位随机数：

9533	9522	0018	7472	0018	3879	5869	3281
7890	2692	8280	8425	3990	8460	7980	2436
5987	3882	0753	8935				

据此估计四天中恰有三天下雨的概率为（　　）

A．$\dfrac{3}{10}$　　B．$\dfrac{2}{5}$　　C．$\dfrac{7}{20}$　　D．$\dfrac{9}{20}$

例2.（2023

·全国·高三专题练习（理））假定某运动员每次投掷飞镖正中靶心的概率为40%，现采用随机模拟的方法估计该运动员两次投掷飞镖恰有一次命中靶心的概率：先由计算器产生0到9之间取整数值的随机数，指定1，2，3，4表示命中靶心，5，6，7，8，9，0表示未命中靶心；再以每两个随机数为一组，代表两次的结果，经随机模拟产生了20组随机数：93 28 12 45 85 69 68 34 31 25 73 93 02 75 56 48 87 30 11 35 据此估计，该运动员两次掷镖恰有一次正中靶心的概率为（ ）

A．0.50　　B．0.45　　C．0.40　　D．0.35

例3．（2023·河北·武安市第一中学高三阶段练习）一袋中装有除颜色外完全相同的4个白球和5个黑球，从中有放回的摸球3次，每次摸一个球．用模拟实验的方法，让计算机产生1～9的随机数，若1～4代表白球，5～9代表黑球，每三个为一组，产生如下20组随机数：

917 966 191 925 271 932 735 458 569 683

431 257 393 627 556 488 812 184 537 989

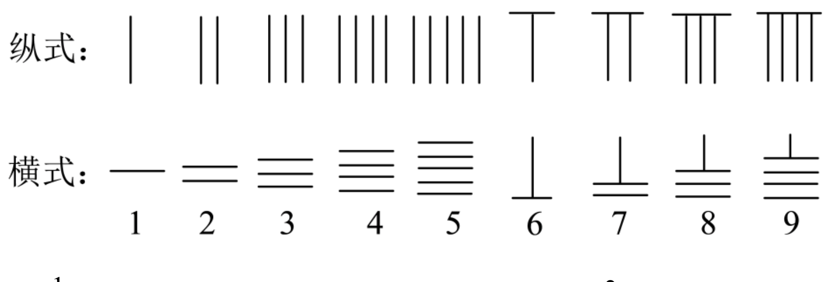
则三次摸出的球中恰好有两次是白球的概率近似为（ ）

A．$\frac{7}{20}$　　B．$\frac{3}{10}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$\frac{1}{5}$

变式1．（2023·全国·高三专题练习（文））从3名男生和2名女生中随机选取3人参加书法展览会，则选取的3人中至少有2名男生的概率为（ ）

A．$\frac{3}{5}$　　B．$\frac{7}{10}$　　C．$\frac{4}{5}$　　D．$\frac{9}{10}$

变式2．（2023·江苏·南京市秦淮中学高三阶段练习）我们的祖先创造了一种十分重要的计算方法：筹算.筹算用的算筹是竹制的小棍，也有骨制的.据《孙子算经》记载，算筹记数法则是：凡算之法，先识其位，一纵十横，百立千僵，千十相望，万百相当.即在算筹计数法中，表示多位数时，个位用纵式，十位用横式，百位用纵式，千位用横式，以此类推，如图所示，例如：⊥‖表示62，表示26，现有5根算筹，据此表示方式表示两位数（算筹不剩余且个位不为0），则这个两位数大于40的概率为（ ）



A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{3}{5}$

变式3．（2023·湖南·雅礼中学高三阶段练习）在某种信息传输过程中，用6个数字的一个排列（数字允许重

复）表示一个信息，不同排列表示不同信息，若所用数字只有 0 和 1，例如 001100 就是一个信息．在所有信息中随机取一信息，则该信息恰有 2 个 1 的概率是（　　）

A．$\frac{5}{16}$　　B．$\frac{11}{32}$　　C．$\frac{15}{32}$　　D．$\frac{15}{64}$

变式 4．（2023·全国·模拟预测）甲、乙、丙、丁、戊共 5 名同学进行劳动技术比赛，决出第 1 名到第 5 名的名次.甲和乙去询问成绩，回答者对甲说："很遗憾，你和乙都没有获得冠军."对乙说："你当然不会是最差的."若在此对话的基础上 5 人名次的情况是等可能的，则最终丙和丁获得前两名的概率为（　）

A．$\frac{4}{27}$　　B．$\frac{8}{27}$　　C．$\frac{2}{9}$　　D．$\frac{4}{9}$

变式 5．（2023·全国·成都七中高三开学考试（理））已知某校高三年级共1400人，按照顺序从1到1400编学号.为了如实了解学生"是否有带智能手机进入校园的行为"，设计如下调查方案：先从装有2个黑球和3个白球的不透明盒子中随机取出1个球，如果是白球，回答问题一；否则回答问题二.问题如下：一、你的学号的末位数字是奇数吗？二、你是否有带智能手机进入校园的行为？现在高三年级1400人全部参与调查，经统计：有972人回答"否"，其余人回答"是".则该校高三年级"带智能手机进入校园"的人数大概为（　）

A．8　　B．20　　C．148　　D．247

题型二：古典概型与向量的交汇问题

例 4．（2023·全国·高三专题练习）已知$a,b\in\{-2,-1,1,2\}$，若向量$\vec{m}=(a,b)$，$\vec{n}=(1,1)$，则向量$\vec{m}$与$\vec{n}$所成的角为锐角的概率是（　）

A．$\frac{3}{16}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{3}{8}$　　D．$\frac{7}{16}$

例 5．（2023·全国·高三专题练习（理））从集合$\{1,2,4\}$中随机抽取一个数 a，从集合$\{2,4,5\}$中随机抽取一个数 b，则向量$\vec{m}=(a,b)$与向量$\vec{n}=(2,-1)$垂直的概率为（　）

A．$\frac{1}{9}$　　B．$\frac{2}{9}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{2}{3}$

例 6．（2023·全国·高三专题练习）设$m,n\in\{0,1,2,3,4\}$，向量$\vec{a}=(-1,-2),\vec{b}=(m,n)$，则$\vec{a}//\vec{b}$的概率为（　）

A．$\frac{2}{25}$　　B．$\frac{3}{25}$　　C．$\frac{3}{20}$　　D．$\frac{1}{5}$

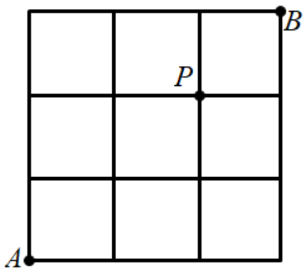
变式 6．（2023·全国·高三专题练习）已知向量$\vec{a}=(-2,1),\vec{b}=(x,y)$.若$x,y$分别表示将一枚质地均匀的正方体骰子先后抛掷两次时第一次、第二次出现的点数，求满足$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$的概率.

变式 7．（2023·福建省福州外国语学校高三阶段练习）将一颗骰子掷两次，观察出现的点数，并记第一次出现的点数为m，第二次出现的点数为n，向量$\vec{p}=(m,n)$，$\vec{q}=(2,6)$，则向量$\vec{p}$与$\vec{q}$共线的概率为____________

题型三：古典概型与几何的交汇问题

例 7．（2023·安徽马鞍山·二模（文））在边长为 1 的正方形四个顶点中任取两个点，则这两点之间距离大于 1 的概率为______.

例 8．（2023·云南·一模（理））河图洛书是中国古代流传下来的神秘图案，被誉为"宇宙魔方"，九宫格源于河图洛书.如图是由 9 个单位正方形（边长为 1 个单位的正方形）组成的九宫格，一个质点从 A 点沿单位正方形的边以最短路径运动到B点，共有C_6^3种不同的路线，则在这些路线中，该质点经过P点的概率为______.



例 9．（2023·安徽·安庆一中高三期末（理））连续掷骰子两次得到的点数分别记为a和b，则使直线$x-2y=0$与圆$(x-a)^2+(y-b)^2=5$相交的概率为____________.

变式 8．（2023·四川·高考真题（文））在集合$\{1,2,3,4,5\}$中任取一个偶数a和一个奇数b构成以原点为起点的向量$\vec{\alpha}=(a,b)$，从所有得到的以原点为起点的向量中任取两个向量为邻边作平行四边形，记所有作成的平行四边形的个数为n，其中面积等于 2 的平行四边形的个数为m，则$\frac{m}{n}=$（　）

A．$\frac{2}{15}$　　B．$\frac{1}{5}$　　C．$\frac{4}{15}$　　D．$\frac{1}{3}$

变式 9．（2023·全国·高三专题练习）平面内有$2n$个点$(n\geq 2)$等分圆周，从$2n$个点中任取 3 个，可构成直角三角形的概率为$\frac{3}{11}$，连接这$2n$个点可构成正多边形，则此正多边形的边数为（　　）

A．6　　B．8　　C．12　　D．16

变式 10．（2023·河北邯郸·高三开学考试）从正方体的8个顶点和中心中任选4个，则这4个点恰好构成三棱锥的概率为（　　）

A. $\frac{41}{63}$　　B. $\frac{38}{63}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{5}{7}$

变式 11．（2023·全国·高三专题练习（理））对于正方体 6 个面的中心，甲，乙两人分别从这 6 个点中任意选两个点连成直线，则所得的两条直线相互垂直的概率等于（　）

A. $\frac{6}{25}$　　B. $\frac{8}{75}$　　C. $\frac{4}{15}$　　D. $\frac{4}{75}$

变式 12．（2023·浙江嘉兴·高三阶段练习）从圆内接正八边形的8个顶点中任取3个顶点构成三角形，则所得的三角形是直角三角形的概率是（　）

A. $\frac{1}{14}$　　B. $\frac{3}{14}$　　C. $\frac{7}{20}$　　D. $\frac{3}{7}$

题型四：古典概型与函数的交汇问题

例 10．（2023·全国·高三专题练习）已知集合$A=\left\{-2,-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{2},1,2,3\right\}$，从集合 A 中任取一个元素 a，使函数$y=x^a$是奇函数且在$\left(0,+\infty\right)$上递增的概率为__.

例 11．（2023·全国·高三专题练习）一个盒子中装有六张卡片，上面分别写着如下六个定义域为 R 的函数：$f_1(x)=x$，$f_2(x)=x^2$，$f_3(x)=x^3$，$f_4(x)=\sin x$，$f_5(x)=\cos x$，$f_6(x)=2|x|+1$. 现从盒子中逐一抽取卡片并判函数的奇偶性，每次抽出后均不放回，若取到一张写有偶函数的卡片则停止抽取，否则继续进行，设抽取次数为 X，则$X<3$的概率为__________.

例 12．（2023·全国·高三专题练习）对于定义域为 D 的函数$f\left(x\right)$，若对任意的$x_1,x_2\in D$，当$x_1<x_2$时都有$f\left(x_1\right)\le f\left(x_2\right)$，则称函数$f\left(x\right)$为“不严格单调增函数”，若函数$f\left(x\right)$的定义域$D=\left\{1,2,3,4,5\right\}$，值域为$A=\left\{6,7,8\right\}$，则函数$f\left(x\right)$为“不严格单调增函数”的概率是______.

变式 13．（2023·全国·高三专题练习）已知四条直线$l_1:y=x$，$l_2:y=3x-2$，$l_3:y=3x+2$，从这三条直线中任取两条，这两条直线都与函数$f(x)=x^3$的图象相切的概率为（　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

变式 14．（2023·河北·唐山市海港高级中学高三开学考试）已知函数$f\left(x\right)=\frac{a}{3}x^3+bx^2+x+2$．若 a，b 分别是从 1，2，3 中任取的一个数，则函数$f\left(x\right)$有两个极值点的概率为（　）

A．$\frac{1}{6}$　　B．$\frac{1}{3}$

C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{5}{6}$

变式 15．（2023·河南·鹤壁高中高三阶段练习（理））一个盒子中装有 6 张卡片，上面分别写着如下 6 个定义域为 **R** 的函数：$f_1(x)=x$，$f_2(x)=\cos x$，$f_3(x)=x^3$，$f_4(x)=x^5$，$f_5(x)=\sin x$，$f_6(x)=|x|$．现从盒子中任取 2 张卡片，将卡片上的函数相加得到一个新函数，则所得函数是奇函数的概率是（　）

A．0.2　　B．0.25　　C．0.75　　D．0.4

变式 16．（2023·广东·金山中学高三阶段练习）设函数 $f\left(x\right)=ax+\frac{x}{x-1}\left(x>1\right)$，若 a 是从 $0,1,2$ 三个数中任取一个，b 是从 $1,2,3,4,5$ 五个数中任取一个，那么 $f\left(x\right)>b$ 恒成立的概率是（　）

A．$\frac{3}{5}$　　B．$\frac{7}{15}$　　C．$\frac{2}{5}$　　D．$\frac{1}{2}$

变式 17．（2023·江西·南昌市豫章中学高三开学考试（文））已知集合 $A=\left\{1,2,3,4,5,6\right\},a\in A,b\in A$，则"使函数 $f\left(x\right)=\ln\left(x^2+ax+b\right)$ 的定义域为 R"的概率为（　）

A．$\frac{13}{36}$　　B．$\frac{15}{36}$　　C．$\frac{17}{36}$　　D．$\frac{19}{36}$

变式 18．（2023·广东·东莞市东华高级中学高三阶段练习）在不超过 18 的素数中，随机选取两个不同的数，其和等于 16 的概率是（　）

A．$\frac{1}{21}$　　B．$\frac{2}{21}$　　C．$\frac{1}{42}$　　D．$\frac{1}{7}$

变式 19．（2023·江苏江苏·高三阶段练习）从属于区间 $\left[2,8\right]$ 的整数中任取两个数，则至少有一个数是质数的概率为（　）

A．$\frac{6}{7}$　　B．$\frac{5}{7}$　　C．$\frac{9}{14}$　　D．$\frac{11}{14}$

变式 20．（2023·湖南·麻阳苗族自治县第一中学高三阶段练习（理））从 n 个正整数 1，2…n 中任意取出两个不同的数，若取出的两数之和等于 5 的概率为 $\frac{1}{14}$，则 n 的值为（　）

A．6　　B．8　　C．10　　D．14

题型五：古典概型与数列的交汇问题

例 13．（2023·全国·高三专题练习（理））在二项式$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\cdot\sqrt[4]{x}}\right)^n$的展开式，前三项的系数成等差数列，把展开式中所有的项重新排成一列，有理项中恰有两项相邻的概率为（　）

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{5}{12}$　　D．$\frac{15}{28}$

例 14．（2023·全国·高三专题练习（文））斐波那契数列又称黄金分割数列，也叫"兔子数列"，在数学上，斐波那契数列被以下递推方法定义：数列$\{a_n\}$满足$a_1=a_2=1$，$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$，先从该数列前 12 项中随机抽取 1 项，是质数的概率是（　）

A．$\frac{5}{12}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{7}{12}$

例 15．（2023·河南·高三阶段练习（理））记数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$S_n=an^2-4an+b$，在数集$\{-1,0,1\}$中随机抽取一个数作为a，在数集$\{-3,0,3\}$中随机抽取一个数作为b.在这些不同数列中随机抽取一个数列$\{a_n\}$，则$\{a_n\}$是递增数列的概率为（　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{2}{9}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{3}{4}$

变式 21．（2023·全国·高三专题练习（文））记数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，已知$S_n=an^2-4an+b$，在数集$\{-1,0,1\}$中随机抽取一个数作为 a，在数集$\{-3,0,3\}$中随机抽取一个数作为 b，则满足$S_n\ge S_2\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$的概率为(　)

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{2}{9}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$\frac{2}{3}$

变式 22．（2023·全国·高三专题练习）已知数列$\{a_n\}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$的前 n 项和为$S_n,a_1=1$，且$S_n=2a_n-1$，若数列$\{b_n\}$满足$a_nb_n=-n^2+11n-32$，从$5\le n\le 10,n\in\mathbf{N}^*$中任取两个数，则至少一个数满足$b_{n+1}=b_n$的概率为（　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{3}{5}$　　C．$\frac{7}{12}$　　D．$\frac{2}{3}$

变式 23．（2023·湖南·长沙一中高三阶段练习）袋中装有大小相同的四个球.四球上分别标有数字"2"、"0"、"2"、"2"，现从中随机选取三个球，则所选三个球上的数字能构成等差数列的概率为（　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{4}$

变式 24．（2023·全国·高三专题练习）意大利数学家斐波那契的《算经》中记载了一个有趣的数列：1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，…，若从该数列的前 96 项中随机地抽取一个数，则这个数是奇数的概率为_________.

题型六：古典概率与统计的综合

例 16．（2023·江西·高三阶段练习（理））下图是国家统计局 7 月发布的 2021 年 6 月至 2022 年 6 月规模以上工业原煤产量增速的月度走势，其中 2022 年 1~2 月看作 1 个月，现有如下说法：

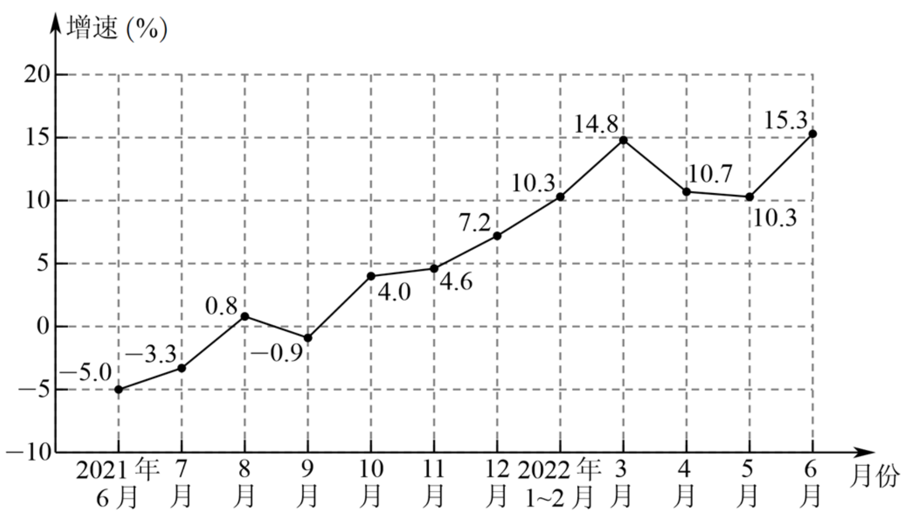
①2021 年 10 月至 2022 年 3 月，规模以上工业原煤产量增速呈现上升趋势；

②2021 年 6 月至 2022 年 6 月，规模以上工业原煤产量增速的中位数为 5.9；

③从这 12 个增速中随机抽取 2 个，增速都超过 10 的概率为 $\frac{5}{33}$.

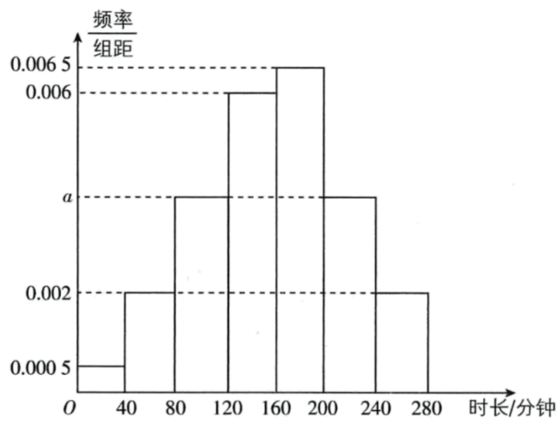
则说法正确的个数为（　　）

规模以上工业原煤产量增速月度走势



A．0　　　　B．1　　　　C．2　　　　D．3

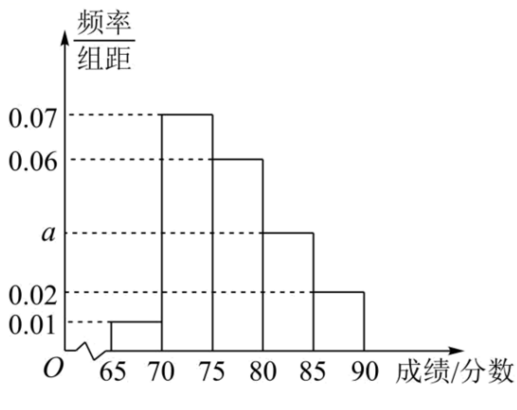
例 17．（2023·四川·树德中学高三阶段练习（文））2022 年 9 月 30 日至 10 月 9 日，第 56 届国际乒联世界乒乓球团体锦标赛在成都市高新区体育中心举行．某学校统计了全校学生在国庆期间观看世乒赛中国队比赛直播的时长情况（单位：分钟），并根据样本数据绘制得到如图所示的频率分布直方图．



(1)求频率分布直方图中 a 的值，并估计样本数据的中位数；

(2)采用以样本量比例分配的分层随机抽样方式，从观看时长在 $[200,280]$ 的学生中抽取 6 人．现从这 6 人中随机抽取 3 人在全校交流观看体会，记“抽取的 3 人中恰有 2 人的观赛时长在 $[200,240)$”为事件 A，求 $P(A)$．

例 18．（2023·四川·树德怀远中学高三开学考试（文））2021 年秋季学期，某省在高一推进新教材，为此该省某市教育部门组织该市全体高中教师在暑假期间进行相关学科培训，培训后举行测试（满分 100 分），从该市参加测试的数学老师中抽取了 100 名老师并统计他们的测试分数，将成绩分成五组，第一组 $[65,70)$，第二组 $[70,75)$，第三组 $[75,80)$，第四组 $[80,85)$，第五组 $[85,90]$，得到如图所示的频率分布直方图.

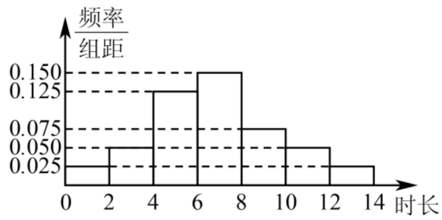


(1)求 a 的值以及这 100 人中测试成绩在 $[80,85)$ 的人数；

(2)估计全市老师测试成绩的平均数和中位数（保留两位小数）；

(3)若要从第三、四、五组老师中用分层抽样的方法抽取 6 人作学习心得交流分享，并在这 6 人中再抽取 2 人担当分享交流活动的主持人，求第四组至少有 1 名老师被抽到的概率.

变式 25．（2023·陕西·安康市教学研究室高三阶段练习（文））“学习强国”学习平台是由中宣部主管，以深入学习宣传习近平新时代中国特色社会主义思想为主要内容，立足全体党员，面向全社会的优质平台．该平台首次实现了“有组织，有管理，有指导，有服务”的学习，极大地满足了广大党员干部和人民群众多样化、自主化、便捷化的学习需求，日益成为老百姓了解国家动态，紧跟时代脉搏的热门 APP．某市宣传部门为了解市民利用“学习强国”学习国家政策的情况，从全市抽取 1000 人进行调查，统计市民每周利用“学习强国”的时长，下图是根据调查结果绘制的频率分布直方图．



(1)估计该市市民每周利用“学习强国”时长在区间 $[6,8)$ 内的概率；

(2)估计该市市民每周利用“学习强国”的平均时长；

(3)若宣传部为了解市民每周利用“学习强国”的具体情况，准备采用分层抽样的方法从 $[4,6)$ 和 $[10,12)$ 组中抽取 7 人了解情况，从这 7 人中随机选取 2 人参加座谈会，求所选取的 2 人来自不同的组的概率．

变式 26．（2023·陕西·安康市教学研究室三模（文））某学校为了解高三尖子班数学成绩，随机抽查了 60 名尖子生的期中数学成绩，得到如下数据统计表：

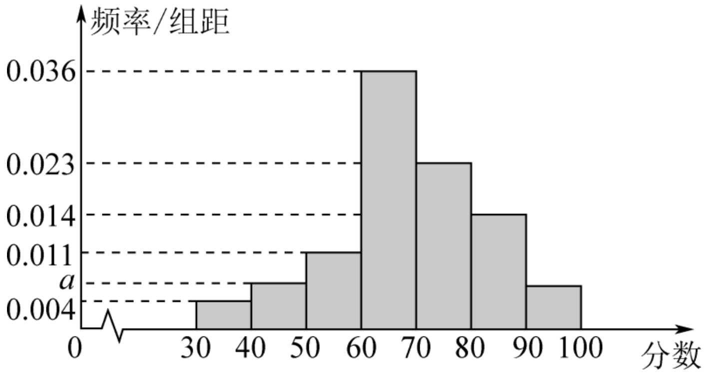
期中数学成绩（单位：分）	频数	频率
$(120,125]$	3	0.05
$(125,130]$	x	p
$(130,135]$	9	0.15
$(135,140]$	15	0.25
$(140,145]$	18	0.30
$(145,150]$	y	q
合计	60	1.00

若数学成绩超过 135 分的学生为"特别优秀"，超过 120 分而不超过 135 分的学生为"优秀"，已知数学成绩"优秀"的学生与"特别优秀"的学生人数比恰好为$2:3$．

(1)求 x，y，p，q 的值；

(2)学校教务为进一步了解这 60 名学生的学习方法，从数学成绩"优秀"、"特别优秀"的学生中用分层抽样的方法抽取 5 人，再从这 5 人中随机抽取 3 人进行问卷调查，求至少抽到 2 名学生数学成绩"特别优秀"的概率．

变式 27．（2023·四川·高三开学考试（理））致敬百年，读书筑梦，某学校组织全校学生参加"学党史颂党恩，党史网络知识竞赛"活动，并从中抽取 100 位学生的竞赛成绩作为样本进行统计，得到如图所示的频率分布直方图．规定：成绩在$[80,100]$内为优秀，成绩低于 60 分为不及格．



(1)求 a 的值，并用样本估算总体，能否认为该校参加本活动的学生成绩符合"不及格的人数低于 20%"的要求；

(2)若样本中成绩优秀的男生为 5 人，现从样本的优秀答卷中随机选取 3 份作进一步分析，求其中至少有 1 份是男生的概率．

【方法技巧与总结】

1、 有关古典概型与统计结合的题型是高考考查概率的一个重要题型，已成为高考考查的热点，概率与统计结合题，无论是直接描述还是利用频率分布表、分布直方图、茎叶图等给出信息，只需要能够从题中提炼出需要的信息，即可解决此类问题．

2、 求复杂事件的概率通常有两种方法：

一是将所求事件转化为彼此互斥的事件的和；二是先求其对立事件的概率，然后再应用公式求解．如果采用解法一，一定是将事件拆分成若干个互斥事件，不能重复和遗漏；如果采用第二种，一定要找准其对立事件，否则容易出现错误．

题型七：有放回与无放回问题的概率

例 19．（2023·湖南·长郡中学高三阶段练习）一个盒子里装有除颜色外完全相同的 6 个小球，盒子中有编号分别为 1、2、3、4 的红球 4 个，编号分别为 4、5 的白球 2 个，从盒子中任取 3 个小球（假设取到任何一个小球的可能性相同）.则在取出的 3 个小球中，小球编号最大值为 4 的概率是________.

例 20．（2023·全国·高三专题练习）从标有 1，2，3，4 的卡片中不放回地先后抽出两张卡片，则 4 号卡片“第一次被抽到的概率”、“第二次被抽到的概率”、“在整个抽样过程中被抽到的概率”分别是（　　）

A．$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$　　　B．$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4}$　　　C．$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$　　　D．$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$

例 21．（2023·全国·高三专题练习）一箱中装有 6 个同样大小的红球，编号为 1，2，3，4，5，6，还有 4 个同样大小的黄球，编号为 7，8，9，10．现从箱中任取 4 个球，下列变量服从超几何分布的是（　　）

A．X 表示取出的最小号码

B．若有放回的取球时，X 表示取出的最大号码

C．取出一个红球记 2 分，取一个黄球记 1 分，X 表示取出的 4 个球的总得分

D．若有放回的取球时，X 表示取出的黄球个数

变式 28．（2023·全国·高三专题练习（文））纸箱里有编号为 1 到 9 的 9 个大小相同的球，从中不放回地随机取 9 次，每次取 1 个球，则编号为偶数的球被连续抽取出来的概率为（　　）

A．$\frac{1}{4}$　　　B．$\frac{1}{12}$　　　C．$\frac{1}{21}$　　　D．$\frac{1}{16}$

变式 29．（2023·全国·高三专题练习）每次从 0～9 这 10 个数字中随机取一个数字（取后放回），连续取 n 次，依次得到 n 个数字组成的数字序列．若使该序列中的数字 0 至少出现一次的概率不小于 0.9，则 n 的最小值是（　　）（参考数据 $\lg 9 \approx 0.954$）

A．23　　　B．22　　　C．21　　　D．20

变式 30．（2023·全国·高三专题练习）不透明袋中装有质地，大小相同的 4 个红球，m 个白球，若从中不放回地取出 2 个球，在第一个取出的球是红球的前提下，第二个取出的球是白球的概率为 $\frac{5}{8}$．

(1)求白球的个数 m；

(2)若有放回的取出两个求，记取出的红球个数为 X，求 $E\left(X\right)$，$D\left(X\right)$．

变式 31．（2023·全国·高三专题练习）已知甲袋中有 4 个白球 2 个黑球，乙袋中有 3 个白球 2 个黑球.现从甲袋中任取 2 个球放入乙袋，然后再从乙袋中任取 1 个球.

(1)求甲袋中任取出的 2 个球为同色球的概率；

(2)求乙袋中任取出 1 球为白球的概率.

变式 32．（2023·江西·南昌市八一中学三模（理））甲、乙两位同学进行摸球游戏，盒中装有 6 个大小和质地相同的球，其中有 4 个白球，2 个红球．

(1)甲、乙先后不放回地各摸出 1 个球，求两球颜色相同的概率；

(2)甲、乙两人先后轮流不放回地摸球，每次摸 1 个球，当摸出第二个红球时游戏结束，或能判断出第二个红球被哪位同学摸到时游戏也结束．设游戏结束时甲、乙两人摸球的总次数为 X，求 X 的分布列和期望．

变式 33．（2023·黑龙江·哈尔滨三中高三学业考试）袋中有 8 个除颜色外完全相同的小球，其中 1 个黑球，3 个白球，4 个红球．

(1)若从袋中一次摸出 2 个小球，求这两个小球恰为异色球的概率；

(2)若从袋中一次摸出 3 个小球，求黑球与白球的个数都没有超过红球个数的概率；

(3)若从袋中不放回的取 3 次球，每次取 1 球，取到黑球记 0 分，取到白球记 4 分，取到红球记 2 分，求最后得分为 8 分的概率．

变式 34．（2023·天津外国语大学附属外国语学校高三阶段练习）一个口袋里有形状一样仅颜色不同的 5 个小球，其中白色球 3 个，黑色球 2 个．若从中任取 1 个球，每次取球后都放回袋中，则事件“连续取球 3 次，恰好取到两次白球”的概率为____________；若从中任取 2 个球，记所取球中白球可能被取到的个数为 ξ，则随机变量 ξ 的期望为____________.

变式 35．（2023·浙江·模拟预测）从装有大小完全相同的 m 个白球，n 个红球和 3 个黑球共 6 个球的布袋中随机摸取一球，有放回地摸取 3 次，记摸取的白球个数为 X，若 $E(X)=1$，则 $m=$__________，$P\left(X\geq 2\right)=$

__________.

题型八：概率的基本性质

例 22．（2023·全国·高三专题练习）已知$P\left(A\right)=0.5$，$P\left(B\right)=0.3$，$P(AB)=0.2$，则$P\left(A\cup B\right)=$（　）

A．0.5　　B．0.6　　C．0.8　　D．1

例 23．（2023·全国·高三专题练习）一架飞机向目标投弹，击毁目标的概率为 0.2，目标未受损的概率为 0.4，则使目标受损但未击毁的概率是（　）

A．0.4　　B．0.48　　C．0.6　　D．0.8

例 24．（2023·全国·高三专题练习）已知事件A、B相互独立，$P(A)=0.4, P(B)=0.3$，则$P(A+B)=$（　）

A．0.58　　B．0.9　　C．0.7　　D．0.72

变式 36．（2023·全国·高三专题练习）甲、乙两人下棋，甲获胜的概率为$\frac{2}{5}$，和棋的概率为$\frac{1}{3}$，则乙获胜的概率为（　）

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{1}{5}$　　C．$\frac{3}{5}$　　D．$\frac{4}{15}$

变式 37．（2023·全国·高三专题练习）若随机事件A，B互斥，A，B发生的概率均不等于 0，且$P\left(A\right)=2-a$，$P\left(B\right)=4a-5$，则实数a的取值范围是（　）

A．$\left(\frac{5}{4},2\right)$　　B．$\left(\frac{5}{4},\frac{3}{2}\right)$　　C．$\left(\frac{5}{4},\frac{4}{3}\right]$　　D．$\left[\frac{5}{4},\frac{3}{2}\right]$

变式 38．（2023·全国·高三专题练习）抛掷一枚质地均匀的骰子，事件A表示“向上的点数是奇数”，事件B表示“向上的点数不超过 3”，则$P(A\cup B)$=（　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{5}{6}$　　D．1

变式 39．（2023·全国·高三专题练习）若$P(\xi\le x_2)=1-\beta$，$P(\xi\ge x_1)=1-\alpha$，其中$x_1<x_2$，则$P(x_1\le\xi\le x_2)$等于(　　)

A．$(1-\alpha)(1-\beta)$　　B．$1-(\alpha+\beta)$

C．$1-\alpha(1-\beta)$　　D．$1-\beta(1-\alpha)$

变式 40．（2023·全国·高三专题练习）下列四个命题：①对立事件一定是互斥事件，互斥事件不一定是对立事件；②若A、B为两个事件，则$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$；③若事件A、B、C两两互斥

$P(A)+P(B)+P(C)=1$；④若 $A、B$ 满足 $P(A)+P(B)=1$ 且 $P(AB)=0$，则 $A、B$ 是对立事件.其中错误的命题个数是（　　）

A．0　　　　B．1　　　　C．2　　　　D．3

【过关测试】

一、单选题

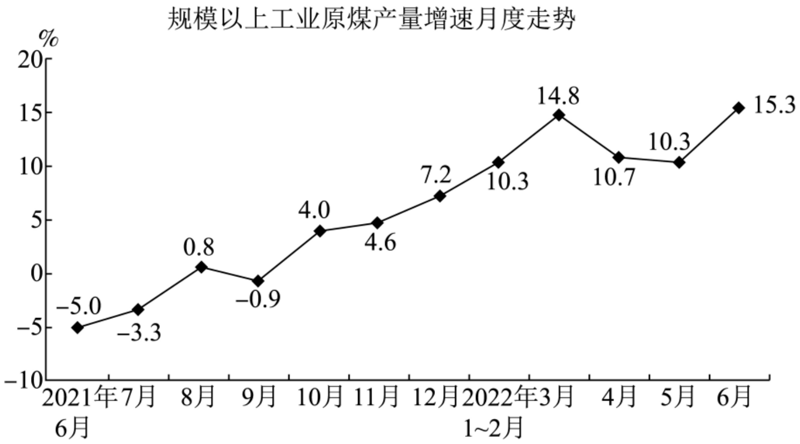
1．（2023·江西·高三阶段练习（文））下图是国家统计局 7 月发布的 2021 年 6 月至 2022 年 6 月规模以上工业原煤产量增速的月度走势，其中 2022 年 1~2 月看作 1 个月，现有如下说法：

①2021 年 10 月至 2022 年 3 月，规模以上工业原煤产量增速呈现上升趋势；

②2021 年 6 月至 2022 年 6 月，规模以上工业原煤产量增速的中位数为5.9；

③从这 12 个增速中随机抽取 1 个，增速超过 10 的概率为$\frac{5}{12}$.

则说法正确的个数为（　）



A．0　　　　B．1　　　　C．2　　　　D．3

2．（2023·福建·福州十八中高三开学考试）将 5 个 1 和 2 个 0 随机排成一行，则 2 个 0 不相邻的概率为（　）

A．$\frac{3}{7}$　　　　B．$\frac{5}{7}$　　　　C．$\frac{2}{5}$　　　　D．$\frac{3}{5}$

3．（2023·四川成都·高三开学考试（文））从 3 男 2 女共 5 名医生中，抽取 2 名医生参加社区核酸检测工作，则至少有 1 名女医生参加的概率为（　）.

A．$\frac{2}{5}$　　　　B．$\frac{3}{5}$　　　　C．$\frac{7}{10}$　　　　D．$\frac{1}{2}$

4．（2023·上海交大附中高三开学考试）分别统计了甲、乙两位同学 16 周的各周课外体育运动时长（单位：h），得如图所示茎叶图，则下列结论中错误的是（ ）

甲		乙
6 1	5.	
8 5 3 0	6.	3
7 5 3 2	7.	4 6
6 4 2 1	8.	1 2 2 5 6 6 6 6
4 2	9.	0 2 3 8
	10.	1

A．甲同学周课外体育运动时长的样本中位数为 7.4

B．乙同学周课外体育运动时长的样本平均数约为 8.60（按四舍五入精确到 0.01）

C．甲同学周课外体育运动时长大于 8 的概率的估计值小于 0.4

D．乙同学周课外体育运动时长的方差约为 0.80（按四舍五入精确到 0.01）

5．（2023·四川·树德怀远中学高三开学考试（理））20 名学生，任意分成甲、乙两组，每组 10 人，其中 2 名学生干部恰好被分在不同组内的概率是（　　）

A．$\frac{C_2^1C_{18}^9}{C_{20}^{10}}$　　B．$\frac{2C_2^1C_{18}^8}{C_{20}^{10}}$　　C．$\frac{2C_2^1C_{19}^8}{C_{20}^{10}}$　　D．$\frac{C_2^1C_{18}^8}{C_{20}^{10}}$

6．（2023·四川·模拟预测（文））从集合$\{x\in\mathbf{N}|10\le x\le 20\}$中任取 2 个不同的质数$a,b$，则$|a-b|\ge 4$的概率为（　　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{3}{5}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{2}{5}$

7．（2023·河南·商丘市第一高级中学高三开学考试（理））为进一步强化学校美育育人功能，构建“五育并举”的全面培养的教育体系，某校开设了传统体育、美育、书法三门选修课程，该校某班级有 6 名同学分别选修其中的一门课程，每门课程至少有一位同学选修，则恰有 2 名同学选修传统体育的概率为（　　）

A．$\frac{5}{36}$　　B．$\frac{1}{6}$　　C．$\frac{7}{36}$　　D．$\frac{7}{18}$

二、多选题

8．（2023·全国·高三专题练习）记$P(A),P(B)$分别为事件A，B发生的概率，则下列结论中可能成立的有（　　）

A．$P(AB)=P(A)P(B)$　　B．$P(A+B)=P(A)+P(B)$

C．$P(A+B)<P(A)+P(B)$　　D．$P(A+B)>P(A)+P(B)$

9．（2023·全国·高三专题练习）已知随机变量ξ的分布如下：则实数a的值为（　　）

ξ	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$1-\frac{3}{2}a$	$2a^2$

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$-\frac{1}{4}$

10．（2023·湖南·高三开学考试）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_i=1$或$a_i=2$的概率均为

$\frac{1}{2}\left(i=1,2,3,\cdots,n\right)$.设 S_n 能被 3 整除的概率为 P_n，则（   ）

A．$P_2=1$　　B．$P_3=\frac{1}{4}$　　C．$P_{11}=\frac{341}{1024}$　　D．当 $n\geq 5$ 时，$P_n<\frac{1}{3}$

11．（2023·浙江·慈溪中学高三开学考试）盒中装有大小相同的 5 个小球（编号为 1 至 5），其中黑球 3 个，白球 2 个.每次取一球（取后放回），则（   ）

A．每次取到 1 号球的概率为$\frac{1}{5}$

B．每次取到黑球的概率为$\frac{2}{5}$

C．“第一次取到黑球”和“第二次取到白球”是相互独立事件

D．“每次取到 3 号球”与“每次取到 4 号球”是对立事件

三、填空题

12．（2023·全国·高三专题练习）通过手机验证码登录哈罗单车 App，验证码由四位数字随机组成，如某人收到的验证码 $\left(a_1, a_2, a_3, a_4\right)$ 满足 $a_1<a_2<a_3<a_4$，则称该验证码为递增型验证码，某人收到一个验证码，那么是首位为 2 的递增型验证码的概率为__.

13．（2023·全国·高三专题练习）现有 5 名师范大学毕业生主动要求到西部某地的甲、乙、丙三校支教，每个学校至少去 1 人，则恰好有 2 名大学生分配到甲校的概率为___________.

14．（2023·重庆巴蜀中学高三阶段练习）某个班级周一上午准备安排语文、数学、英语、物理、生物等 5 节课，则数学和物理排课不相邻的概率为___________.

15．（2023·云南大理·模拟预测）某校为落实“双减政策．在课后服务时间开展了丰富多彩的体育兴趣小组活动，现有甲、乙、丙三名同学拟参加篮球、足球、乒乓球三项活动，由于受个人精力和时间限制，每人只能等可能的选择参加其中一项活动，则恰有两人参加同一项活动的概率为__________.

四、解答题

16．（2023·广东·金山中学高三阶段练习）某中学课外实践活动小组在某区域内通过一定的有效调查方式对“北京冬奥会开幕式”当晚的收看情况进行了随机抽样调查．统计发现，通过手机收看的约占$\frac{1}{2}$，通过电视收看的约占$\frac{1}{3}$，其他为未收看者：

(1)从被调查对象中随机选取 3 人，其中至少有 1 人通过手机收看的概率；

(2)从被调查对象中随机选取 3 人，用 X 表示通过电视收看的人数，求 X 的分布列和期望．

17．（2023

·江西·赣源中学高三阶段练习（文））客家文化是指客家人共同创造的物质文化与精神文化的总和，包括客家方言、客家民俗、客家民居、客家山歌、客家艺术、客家人物、客家山水、客家诗文、客家历史、客家饮食、海内外客家分布等多方面.石城，是客家先民迁徙的重要中转站、客家民系的重要发源地、中华客家文化的重要发祥地，素有客家摇篮之美称.为弘扬和发展客家文化，石城县开展了丰富多彩的客家文化活动，引起了广大中学生对于客家文化的极大兴趣，某校从甲、乙两个班级所有学生中分别随机抽取 8 名，对他们的客家文化知识了解程度进行评分调查（满分 100 分），被抽取的学生的评分结果如下茎叶图所示：

甲		乙
9 6	7	1
8 4 2 0	8	0 1 2 5 9
3 0	9	0 4

(1)分别计算甲、乙两个班级被抽取的 8 名学生得分的平均值和方差，并估计两个班级学生对客家文化知识了解的整体水平差异；

(2)若从得分不低于 85 分的学生中随机抽取 2 人参观客家文化摄影展，求这两名学生均来自乙班级的概率.

18．（2023·浙江省杭州第二中学高三阶段练习）有 3 名志愿者在 2022 年 10 月 1 号至 10 月 5 号期间参加核酸检测工作.

(1)若每名志愿者在这 5 天中任选一天参加核酸检测工作，且各志愿者的选择互不影响，求 3 名志愿者恰好连续 3 天参加核酸检测工作的概率；

(2)若每名志愿者在这 5 天中任选两天参加核酸检测工作，且各志愿者的选择互不影响，记ξ表示这 3 名志愿者在 10 月 1 号参加核酸检测工作的人数，求随机变量ξ的分布列及数学期望$E\left(\xi\right)$.

19．（2023·江苏省泰兴中学高三阶段练习）现有三个白球，十五个红球，且甲、乙、丙三个盒子中各装有六个小球.

(1)若甲、乙、丙三个盒子中各有一个白球，且小明从三个盒子中任选两个盒子并各取出一个球，求小明取出两个白球的概率；

(2)若甲盒中有三个白球，小明先从甲盒中取出一个球，再从乙盒中取出一个球，最后再从丙盒中取出一个球，如此循环，直至取出一个白球后停止取球，且每次取球均不放回．若小明在第 X 次取球时取到白球，求 X 的概率分布和数学期望．

专题46 古典概型与概率的基本性质

【考点预测】

知识点1、随机事件的概率

对随机事件发生可能性大小的度量(数值)称为事件的概率，事件A的概率用$P(A)$表示.

知识点2、古典概型

（1）定义

一般地，若试验E具有以下特征：

①有限性：样本空间的样本点只有有限个；

②等可能性：每个样本点发生的可能性相等.

称试验E为古典概型试验，其数学模型称为古典概率模型，简称古典概型.

（2）古典概型的概率公式

一般地，设试验E是古典概型，样本空间Ω包含n个样本点，事件A包含其中的k个样本点，则定义事件A的概率$P\left(A\right)=\frac{k}{n}=\frac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)}$.

知识点3、概率的基本性质

（1）对于任意事件A都有：$0\le P(A)\le 1$.

（2）必然事件的概率为1，即$P(\Omega)=1$；不可能事概率为0，即$P(\varnothing)=0$.

（3）概率的加法公式：若事件A与事件B互斥，则$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

推广：一般地，若事件A_1，A_2，…，A_n彼此互斥，则事件发生（即A_1，A_2，…，A_n中有一个发生）的概率等于这n个事件分别发生的概率之和，即：$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)$.

（4）对立事件的概率：若事件A与事件B互为对立事件，则$P(A)=1-P(B)$，$P(B)=1-P(A)$，且$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=1$.

（5）概率的单调性：若$A\subseteq B$，则$P(A)\le P(B)$.

（6）若A，B是一次随机实验中的两个事件，则$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

【方法技巧与总结】

1、解决古典概型的问题的关键是：分清基本事件个数n与事件A中所包含的基本事件数.

因此要注意清楚以下三个方面：

(1)本试验是否具有等可能性；

(2)本试验的基本事件有多少个；

(3)事件A是什么.

2、解题实现步骤：

(1)仔细阅读题目，弄清题目的背景材料，加深理解题意；

(2)判断本试验的结果是否为等可能事件，设出所求事件 A；

(3)分别求出基本事件的个数 n 与所求事件 A 中所包含的基本事件个数 m；

(4)利用公式 $P(A)=\dfrac{A\text{包含的基本事件的个数}}{\text{基本事件的总数}}$ 求出事件 A 的概率.

3、解题方法技巧：

(1)利用对立事件、加法公式求古典概型的概率

(2)利用分析法求解古典概型.

①任一随机事件的概率都等于构成它的每一个基本事件概率的和.

②求试验的基本事件数及事件 A 包含的基本事件数的方法有列举法、列表法和树状图法.

【题型归纳目录】

题型一：简单的古典概型问题

题型二：古典概型与向量的交汇问题

题型三：古典概型与几何的交汇问题

题型四：古典概型与函数的交汇问题

题型五：古典概型与数列的交汇问题

题型六：古典概率与统计的综合

题型七：有放回与无放回问题的概率

题型八：概率的基本性质

【典例例题】

题型一：简单的古典概型问题

例 1.（2023·全国·高三专题练习（理））池州九华山是著名的旅游胜地．天气预报 8 月 1 日后连续四天，每天下雨的概率为 0.6，现用随机模拟的方法估计四天中恰有三天下雨的概率：在 0~9 十个整数值中，假定 0，1，2，3，4，5 表示当天下雨，6，7，8，9 表示当天不下雨．在随机数表中从某位置按从左到右的顺序读取如下 20 组四位随机数：

9533	9522	0018	7472	0018	3879	5869	3281
7890	2692	8280	8425	3990	8460	7980	2436
5987	3882	0753	8935				

据此估计四天中恰有三天下雨的概率为（　　）

A．$\dfrac{3}{10}$　　B．$\dfrac{2}{5}$　　C．$\dfrac{7}{20}$　　D．$\dfrac{9}{20}$

答案：B

【解析】由表中数据可得四天中恰有三天下雨的有 9533，9522，0018，0018，3281，8425，2436，0753，共 8 组，

所以估计四天中恰有三天下雨的概率为 $\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$.

故选：B.

例 2．（2023·全国·高三专题练习（理））假定某运动员每次投掷飞镖正中靶心的概率为 40%，现采用随机模拟的方法估计该运动员两次投掷飞镖恰有一次命中靶心的概率：先由计算器产生 0 到 9 之间取整数值的随机数，指定 1，2，3，4 表示命中靶心，5，6，7，8，9，0 表示未命中靶心；再以每两个随机数为一组，代表两次的结果，经随机模拟产生了 20 组随机数：

93　28　12　45　85　69　68　34　31　25　73　93　02　75　56　48　87　30　11　35

据此估计，该运动员两次掷镖恰有一次正中靶心的概率为（　）

A．0.50　　B．0.45　　C．0.40　　D．0.35

答案：A

【解析】解析：两次掷镖恰有一次正中靶心表示随机数中有且只有一个数为 1，2，3，4 中的之一.

它们分别是 93，28，45，25，73，93，02，48，30，35 共 10 个，

因此所求的概率为 $\frac{10}{20}$=0.50.

故选：A.

例 3．（2023·河北·武安市第一中学高三阶段练习）一袋中装有除颜色外完全相同的 4 个白球和 5 个黑球，从中有放回的摸球 3 次，每次摸一个球．用模拟实验的方法，让计算机产生 1～9 的随机数，若 1～4 代表白球，5～9 代表黑球，每三个为一组，产生如下 20 组随机数：

917　966　191　925　271　932　735　458　569　683

431　257　393　627　556　488　812　184　537　989

则三次摸出的球中恰好有两次是白球的概率近似为（　）

A．$\frac{7}{20}$　　B．$\frac{3}{10}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$\frac{1}{5}$

答案：B

【解析】20 组随机数恰好有两个是 $1,2,3,4$ 的有 191，271，932，393，812，184 共 6 个，

因此概率为 $P=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$.

故选：B.

变式 1．（2023·全国·高三专题练习（文））从 3 名男生和 2 名女生中随机选取 3 人参加书法展览会，则选取的 3 人中至少有 2 名男生的概率为（　）

A. $\frac{3}{5}$　　　　　　B. $\frac{7}{10}$　　　　　　C. $\frac{4}{5}$　　　　　　D. $\frac{9}{10}$

答案：B

【解析】记 3 名男生分别为a_1，a_2，a_3，2 名女生分别为b_1，b_2，

从 5 人中随机选取 3 人，所有的可能结果为

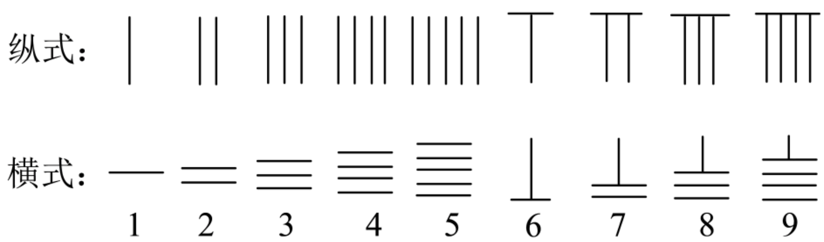
(a_1,a_2,a_3)，(a_1,a_2,b_1)，(a_1,a_2,b_2)，(a_1,a_3,b_1)，(a_1,a_3,b_2)，(a_2,a_3,b_1)，(a_2,a_3,b_2)，

(a_1,b_1,b_2)，(a_2,b_1,b_2)，(a_3,b_1,b_2)，共 10 种，

“其中至少有 2 名男生”对应的结果有 7 种，故所求概率为$\frac{7}{10}$.

故选：B.

变式 2.（2023·江苏·南京市秦淮中学高三阶段练习）我们的祖先创造了一种十分重要的计算方法：筹算.筹算用的算筹是竹制的小棍，也有骨制的.据《孙子算经》记载，算筹记数法则是：凡算之法，先识其位，一纵十横，百立千僵，千十相望，万百相当.即在算筹计数法中，表示多位数时，个位用纵式，十位用横式，百位用纵式，千位用横式，以此类推，如图所示，例如：⊥||表示 62，表示 26，现有 5 根算筹，据此表示方式表示两位数（算筹不剩余且个位不为 0)，则这个两位数大于 40 的概率为（　　）



A. $\frac{1}{3}$　　　　　　B. $\frac{1}{2}$　　　　　　C. $\frac{2}{3}$　　　　　　D. $\frac{3}{5}$

答案：B

【解析】根据题意可知：一共 5 根算筹，十位和个位上可用的算筹可以分为$4+1,3+2,2+3,1+4$共四类情况；

第一类：$4+1$，即十位用 4 根算筹，个位用 1 根算筹，那十位可能是 4 或者 8，个位为 1，则两位数为 41 或者 81；

第二类：$3+2$，即十位用 3 根算筹，个位用 2 根算筹，那十位可能是 3 或者 7，个位可能为 2 或者 6，故两位数可能 32，36，72，76；

第三类：$2+3$，即十位用 2 根算筹，个位用 3 根算筹，那么十位可能是 2 或者 6，个位可能为 3 或者 7，故两位数可能是 23，27，63，67；

第四类：$1+4$，即十位用 1 根算筹，个位用 4 根算筹，那么十位为 1，个位可能为 4 或者 8，则该两位数为 14 或者 18，

综上可知：所有的两位数有 14，18，23，27，32，36，41，63，67，72，76，81 共计 12 个，其中大于 40 的有 41，63，67，72，76，81 共计 6 个，

故这个两位数大于 40 的概率为$\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$，

故选：B.

变式 3.（2023·湖南·雅礼中学高三阶段练习）在某种信息传输过程中，用 6 个数字的一个排列（数字允许重复）表示一个信息，不同排列表示不同信息，若所用数字只有 0 和 1，例如 001100 就是一个信息．在所有信息中随机取一信息，则该信息恰有 2 个 1 的概率是（　）

A．$\frac{5}{16}$　　B．$\frac{11}{32}$　　C．$\frac{15}{32}$　　D．$\frac{15}{64}$

答案：D

【解析】每个位置可排 0 或 1，故有 2 种排法，因此用 6 个数字的一个排列的总个数为 $2^6=64$，恰好有 2 个 1 的排列的个数共有 $C_6^2=15$，

故概率为：$\frac{15}{64}$，

故选：D

变式 4.（2023·全国·模拟预测）甲、乙、丙、丁、戊共 5 名同学进行劳动技术比赛，决出第 1 名到第 5 名的名次.甲和乙去询问成绩，回答者对甲说："很遗憾，你和乙都没有获得冠军."对乙说："你当然不会是最差的."若在此对话的基础上 5 人名次的情况是等可能的，则最终丙和丁获得前两名的概率为（　）

A．$\frac{4}{27}$　　B．$\frac{8}{27}$　　C．$\frac{2}{9}$　　D．$\frac{4}{9}$

答案：A

【解析】根据题意，当甲同学为第 5 名时，乙同学可能是第 2，3，4 名，故有 $A_3^1A_3^3=18$ 种，

当甲同学不是第 5 名时，甲、乙同学可能是第 2，3，4 名，故有 $A_3^2A_3^3=36$ 种，

故满足回答者的所有情况共 $18+36=54$ 种.

其中，最终丙和丁获得前两名的情况有两类，

当甲同学为第 5 名，丙和丁获得前两名时有 $A_2^2A_2^2=4$ 种；

当甲同学不是第 5 名，丙和丁获得前两名时，有 $A_2^2A_2^2=4$ 种，

所以，最终丙和丁获得前两名的情况有 $4+4=8$ 种，

所以，最终丙和丁获得前两名的概率为 $P=\frac{8}{54}=\frac{4}{27}$

故选：A

变式 5.（2023·全国·成都七中高三开学考试（理））已知某校高三年级共 1400 人，按照顺序从 1 到 1400

编学号.为了如实了解学生“是否有带智能手机进入校园的行为”，设计如下调查方案：先从装有 2 个黑球和 3 个白球的不透明盒子中随机取出 1 个球，如果是白球，回答问题一；否则回答问题二.问题如下：一、你的学号的末位数字是奇数吗？二、你是否有带智能手机进入校园的行为？现在高三年级 1400 人全部参与调查，经统计：有 972 人回答“否”，其余人回答“是”.则该校高三年级“带智能手机进入校园”的人数大概为（　）

A．8　　B．20　　C．148　　D．247

答案：B

【解析】根据题意，1400 人分为 $1400\times\frac{3}{5}=840$（人）和 $1400\times\frac{2}{5}=560$（人），

840 人中将有 420 人回答“否”，则 560 人中有 $972-420=552$(人)回答“否”，8 人回答“是”，

则问是否带手机的回答是人数约占 $\frac{1}{70}$，

该校高三年级“带智能手机进入校园”的人数约为 $1400\times\frac{1}{70}=20$（人）.

故选：B

题型二：古典概型与向量的交汇问题

例 4.（2023·全国·高三专题练习）已知 $a,b\in\{-2,-1,1,2\}$，若向量 $\vec{m}=(a,b)$，$\vec{n}=(1,1)$，则向量 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 所成的角为锐角的概率是（　）

A．$\frac{3}{16}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{3}{8}$　　D．$\frac{7}{16}$

答案：B

【解析】向量 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 所成的角为锐角等价于 $\vec{m}\cdot\vec{n}>0$，且 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 的方向不同，

即 $\vec{m}\cdot\vec{n}=(a,b)\cdot(1,1)=a+b>0$，

则满足条件的向量 $\vec{m}$ 有 $(-1,2),(1,1),(1,2),(2,-1),(2,1),(2,2)$，

其中 $\vec{m}=(1,1)$ 或 $\vec{m}=(2,2)$ 时，与 $\vec{n}$ 同向，故舍去，故共有 4 种情况满足条件，

又 $\vec{m}$ 的取法共有 $4\times4=16$ 种，

则向量 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 所成的角为锐角的概率是 $\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

故选：B.

例 5.（2023·全国·高三专题练习（理））从集合 $\{1,2,4\}$ 中随机抽取一个数 a，从集合 $\{2,4,5\}$ 中随机抽取一个数 b，则向量 $\vec{m}=(a,b)$ 与向量 $\vec{n}=(2,-1)$ 垂直的概率为（　）

A．$\frac{1}{9}$　　B．$\frac{2}{9}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{2}{3}$

答案：B

【解析】从集合 $\{1,2,4\}$ 中随机抽取一个数 a，从集合 $\{2,4,5\}$ 中随机抽取一个数 b，

可以组成向量$\vec{m}=(a,b)$的个数是$3\times3=9$（个）；

其中与向量$\vec{n}=(2,-1)$垂直的向量是$\vec{m}=(1,2)$和$\vec{m}=(2,4)$，共2个；

故所求的概率为$P=\frac{2}{9}$.

故选：B.

例6.（2023·全国·高三专题练习）设$m,n\in\{0,1,2,3,4\}$，向量$\vec{a}=(-1,-2),\vec{b}=(m,n)$，则$\vec{a}//\vec{b}$的概率为（　）

A．$\frac{2}{25}$　　B．$\frac{3}{25}$　　C．$\frac{3}{20}$　　D．$\frac{1}{5}$

答案：B

【解析】$\vec{a}//\vec{b}\Rightarrow -2m=-n\Rightarrow 2m=n$，

所以$\begin{cases}m=0\\n=0\end{cases}$或$\begin{cases}m=1\\n=2\end{cases}$或$\begin{cases}m=2\\n=4\end{cases}$，

因此概率为$\frac{3}{5\times5}=\frac{3}{25}$.

故选：B.

变式6.（2023·全国·高三专题练习）已知向量$\vec{a}=(-2,1),\vec{b}=(x,y)$.若$x,y$分别表示将一枚质地均匀的正方体骰子先后抛掷两次时第一次、第二次出现的点数，求满足$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$的概率.

【解析】x,y分别表示将一枚质地均匀的正方体骰子先后抛掷两次时第一次、第二次出现的点数，有序数对(x,y)可能情况有36种，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$即$-2x+y=-1$，包含的情况有$(1,1),(2,3),(3,5)$三种，

所以满足$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$的概率为$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

故答案为：$\frac{1}{12}$.

变式7.（2023·福建省福州外国语学校高三阶段练习）将一颗骰子掷两次，观察出现的点数，并记第一次出现的点数为m，第二次出现的点数为n，向量$\vec{p}=(m,n)$，$\vec{q}=(2,6)$，则向量$\vec{p}$与$\vec{q}$共线的概率为___________

答案：$\frac{1}{18}$

【解析】$\because$试验发生包含的事件是一颗骰子掷两次,共有$6\times6=36$种结果,

满足条件事件是向量$\vec{p}=(m,n)$与$\vec{q}=(2,6)$共线,

即$6m-2n=0$，$\therefore n=3m$，

满足这种条件的有$(1,3),(2,6)$,共有2种结果,

$\therefore$向量$\vec{p}$与$\vec{q}$共线的概率$P=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$,

故答案为：$\frac{1}{18}$.

题型三：古典概型与几何的交汇问题

例 7.（2023·安徽马鞍山·二模（文））在边长为 1 的正方形四个顶点中任取两个点，则这两点之间距离大于 1 的概率为______.

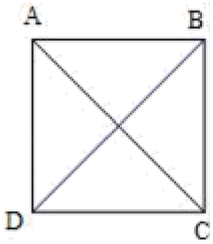
答案：$\frac{1}{3}$

【解析】由题意，从正方形 $ABCD$ 四个顶点中任取 2 个点，有 AB，BC，CD，DA，AC，BD，共有 6 种结果，

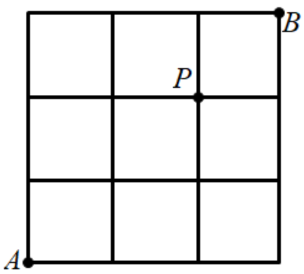
若这 2 个点间的距离大于该正方形边长，则为 AC，BD，共有 2 个结果，

所以对应的概率 $P=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，

故答案为：$\frac{1}{3}$



例 8.（2023·云南·一模（理））河图洛书是中国古代流传下来的神秘图案，被誉为"宇宙魔方"，九宫格源于河图洛书.如图是由 9 个单位正方形（边长为 1 个单位的正方形）组成的九宫格，一个质点从A 点沿单位正方形的边以最短路径运动到 B 点，共有 C_6^3 种不同的路线，则在这些路线中，该质点经过 P 点的概率为______.



答案：$\frac{3}{5}$

【解析】一个质点从 A 点沿单位正方形的边以最短路径运动到 B 点，

共有 $n=C_6^3=20$ 种不同的路线，

则在这些路线中，该质点经过 p 点包含的基本事件有 $m=6\times2=12$ 种，

该质点经过 p 点的概率为 $P=\frac{m}{n}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$.

故答案为：$\frac{3}{5}$.

例 9．（2023·安徽·安庆一中高三期末（理））连续掷骰子两次得到的点数分别记为 a 和 b，则使直线 $x-2y=0$ 与圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=5$ 相交的概率为____________.

答案：$\frac{7}{12}$

【解析】连掷骰子两次试验结果共有 36 种，要使直线 $x-2y=0$ 与圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=5$ 相交，

则 $\frac{|a-2b|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5}$，即满足 $|a-2b|<5$．符合题意的 (a,b) 有

$(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)$，

$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)$ 共 21 种，

由古典概型的概率计算公式可得所求概率为 $P=\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$.

故答案为：$\frac{7}{12}$

变式 8．（2023·四川·高考真题（文））在集合 $\{1,2,3,4,5\}$ 中任取一个偶数 a 和一个奇数 b 构成以原点为起点的向量 $\vec{\alpha}=(a,b)$，从所有得到的以原点为起点的向量中任取两个向量为邻边作平行四边形，记所有作成的平行四边形的个数为 n，其中面积等于 2 的平行四边形的个数为 m，则 $\frac{m}{n}=$（　）

A．$\frac{2}{15}$　　　　B．$\frac{1}{5}$　　　　C．$\frac{4}{15}$　　　　D．$\frac{1}{3}$

答案：B

【解析】设 $\overrightarrow{OP}=(a_1,b_1)$，$\overrightarrow{OQ}=(a_2,b_2)$，则以 OP、OQ 为邻边的平行四边形的面积为

$S=|\overrightarrow{OP}|\cdot|\overrightarrow{OQ}|\sin\angle POQ=\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2\cdot|\overrightarrow{OQ}|^2\sin^2\angle POQ}=\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2\cdot|\overrightarrow{OQ}|^2\cdot(1-\cos^2\angle POQ)}$

$=\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2\cdot|\overrightarrow{OQ}|^2-\left(|\overrightarrow{OP}|\cdot|\overrightarrow{OQ}|\cos\angle POQ\right)^2}=\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2\cdot|\overrightarrow{OQ}|^2-\left(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\right)^2}$

$=\sqrt{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)-(a_1a_2+b_1b_2)^2}=|a_1b_2-a_2b_1|=2$，

其中以原点为起点的向量 $\vec{\alpha}$ 有 $(2,1)$、$(2,3)$、$(2,5)$、$(4,1)$、$(4,3)$、$(4,5)$，共 6 个，

其中满足 $S=2$ 的向量 $\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}$ 可以为 $\{\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}\}=\{(2,1),(4,1)\}$、$\{\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}\}=\{(2,1),(4,3)\}$、$\{\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}\}=\{(2,3),(4,5)\}$，

则满足面积为 2 的平行四边形的个数为 3，即 $m=3$，

其中能构成平行四边形的向量组 $\{\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}\}$ 有：$\{(2,1),(2,3)\}$、$\{(2,1),(2,5)\}$、