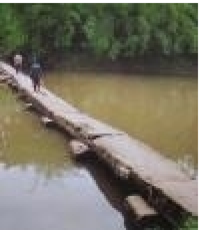
结 构 动 力 学

Dynamics of Structures

结构动力学

第3章自由振动反应

Chapter3 Analysis of Free Vibrations





本章提要

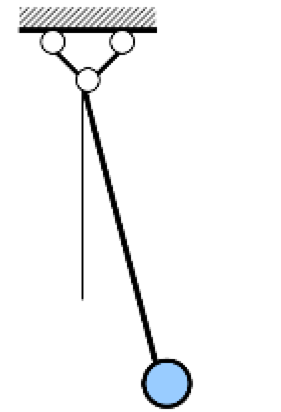
- §2-1 运动方程的解
- §2-2 无阻尼自由振动
- §2-3 有阻尼自由振动

单自由度体系(SDOF)：

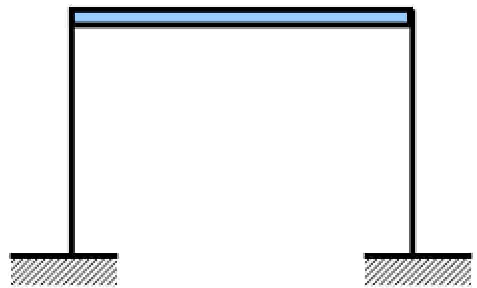
单自由度体系，就是只有1个自由度的结构动力系统，是最简单也是最重要的结构振动系统。其重要性体现在:

- 工程实际中许多结构体系简化为单自由度体系，得到的结果具有相当高的精度，完全满足工程误差要求，而对单自由度体系的研究比对多自由度体系的研究简便得多;
- 单自由度体系振动的研究和结论是研究多自由度体系和无限自由度体系的基础。

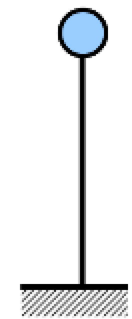
常见的单自由度体系力学模型



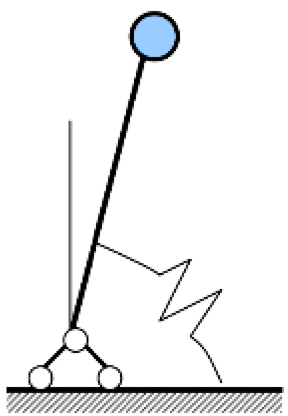
（a）重力摆



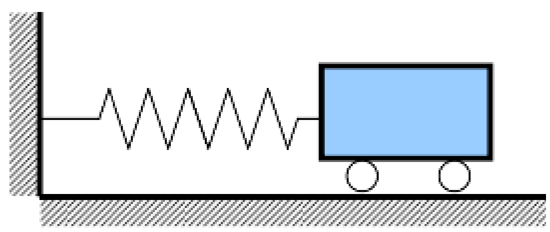
（b）单层框架



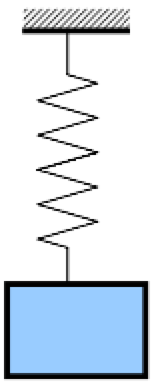
（c）悬臂力柱



（d）倒立摆

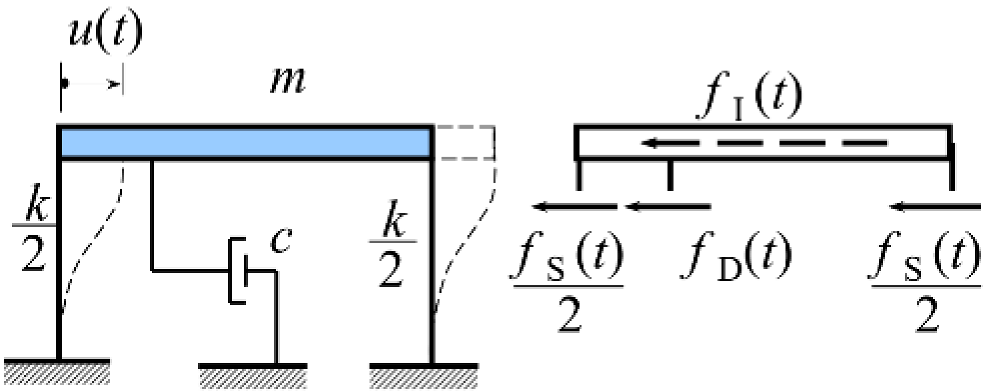


（e）弹簧—质点体系

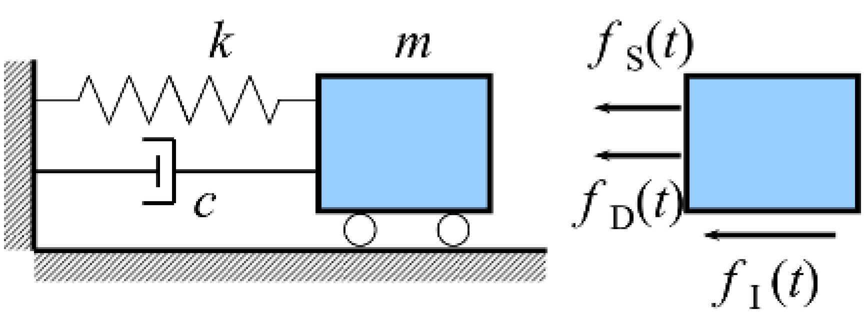


（f）悬挂弹簧—质点体系

两个典型的单自由度体系



(a) 单层框架结构



(b) 弹簧—质点体系

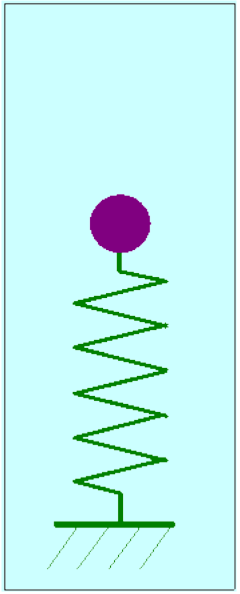
物理元件

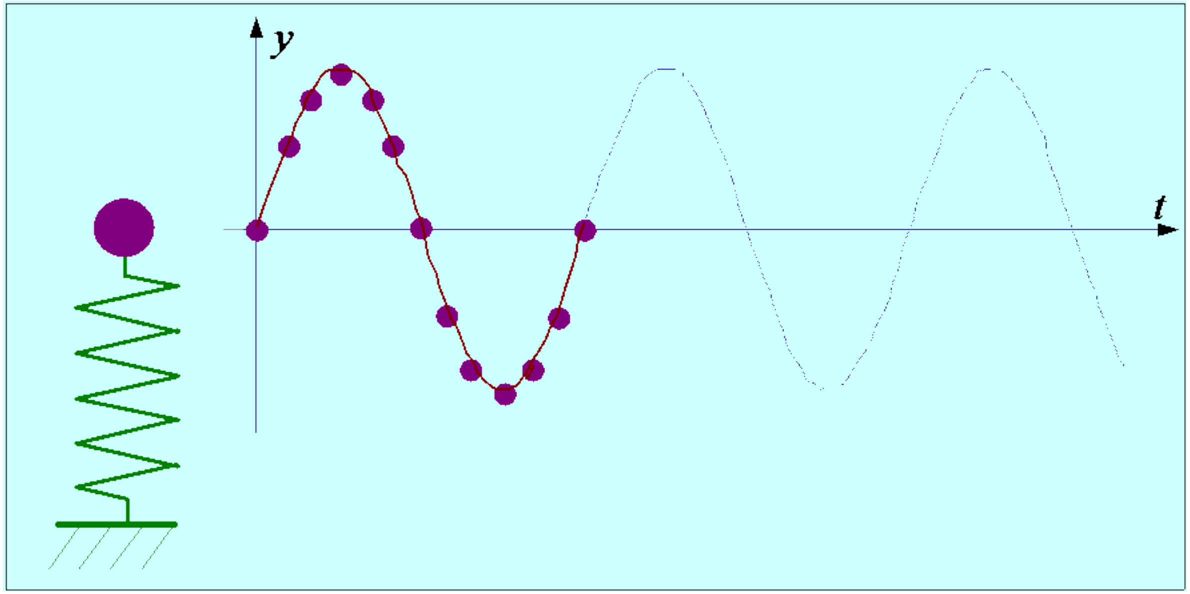
质量	集中质量	m
阻尼器	阻尼系数	c
弹簧	弹簧刚度	k

两个力学模型完全等效

因为两个体系的运动方程相同

结构的振动反应



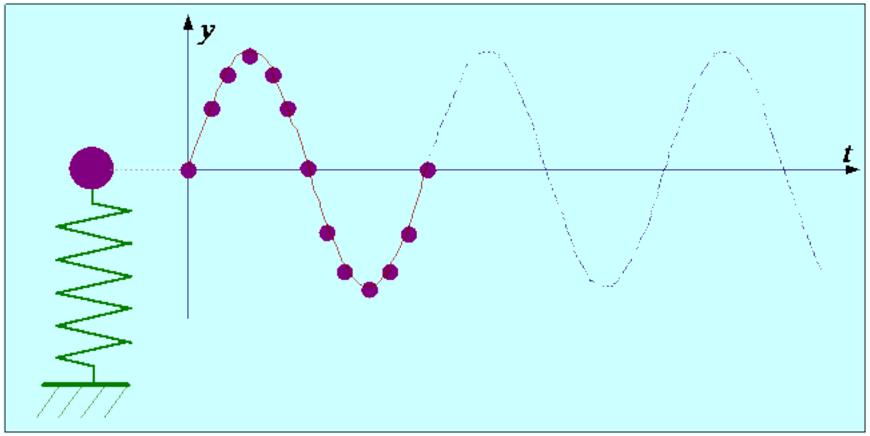


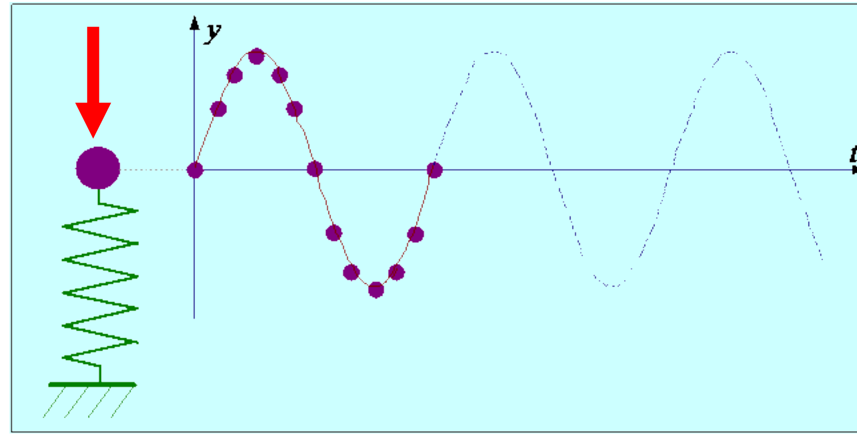
定义

表征结构动力响应特性的一些固有量称为结构的动力特性，又称自振特性。

- 结构的动力特性与结构的质量、刚度、阻尼及其分布有关。

结构的自由振动与受迫振动

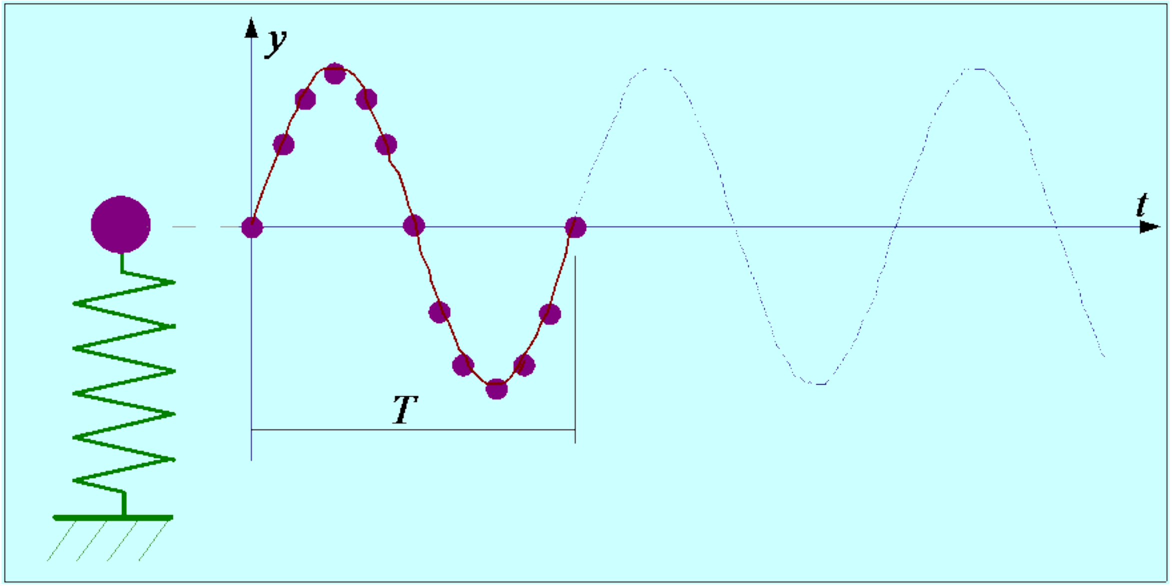




定义

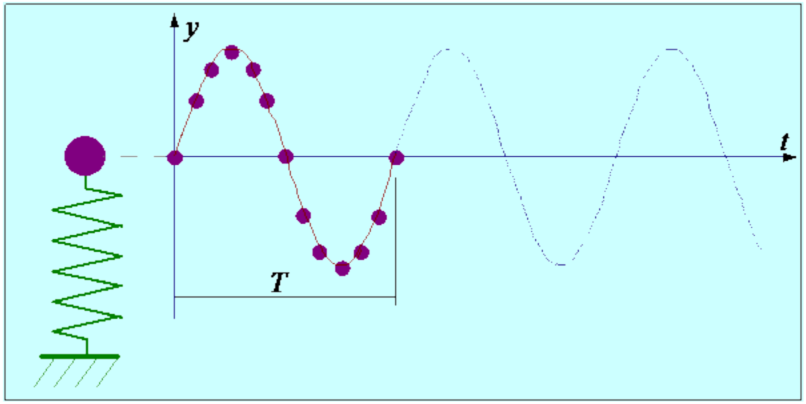
- 结构受外部干扰后发生振动，而在干扰消失后继续振动，这种振动称为结构的自由振动。
- 如果结构在振动过程中不断地受到外部干扰力作用，这种振动称为结构的强迫振动，又称受迫振动 。

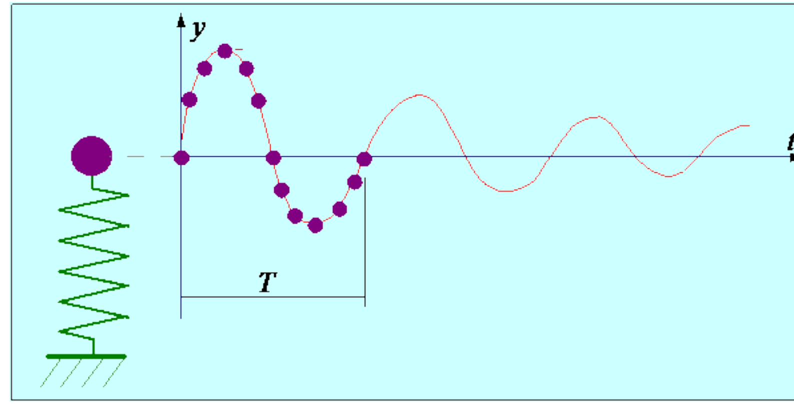
固有频率



- 质点在运动过程中完成一个完整的循环所需要的时间称为周期，单位时间内完成的循环次数称为频率。
- 结构在自由振动时的频率称为结构的自振频率或固有频率。
- 对大部分工程结构，结构的自振频率的个数与结构的动力自由度数相等。
- 结构的自振频率与结构的质量和刚度有关。

阻尼



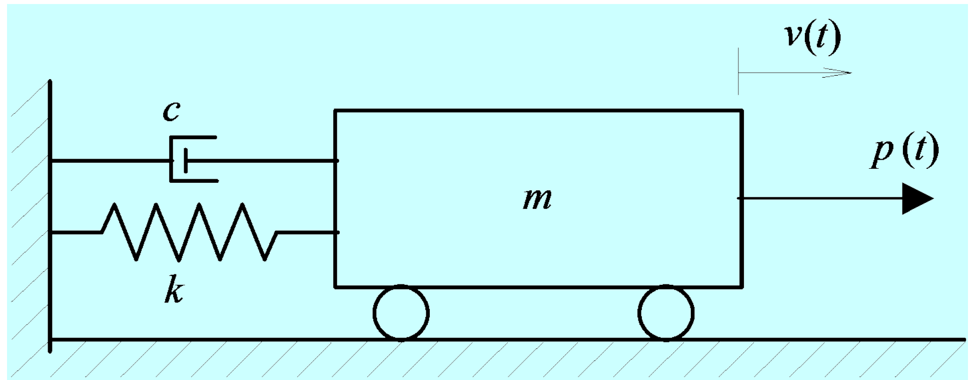


- 结构在振动过程中的能量耗散作用称为阻尼。
- 结构的自由振动会因为阻尼作用而随时间衰减并最终停止。
- 由于阻尼而使振动衰减的结构系统称为有阻尼系统。
- 阻尼原因复杂：内摩擦、连接摩擦、周围介质阻力等。
- 等效粘滞阻尼：以阻尼器表示结构阻尼作用：

$$F_D = -c\dot{y}$$

c 为阻尼系数， $\dot{y}$ 为质量的速度。

§2-1 运动方程的解

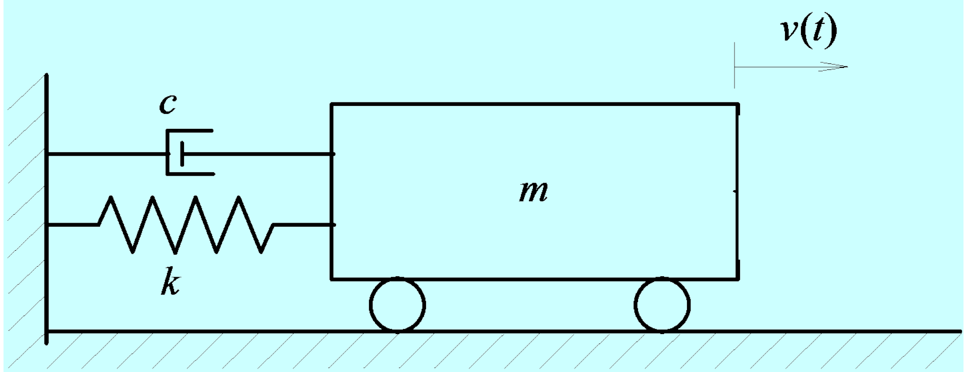


- 最简单的由刚体、弹簧和阻尼器组成的单自由度体系.

  已经得到单自由度体系的运动方程：

$$\boxed{m\ddot{v}+c\dot{v}+kv=p(t)} \qquad (2\text{-}1)$$

- 这个运动方程也适用于可转换为单自由度体系的任何复杂结构体系的广义坐标反应。



去掉外荷载

$p(t)=0!$

定义

等效动荷载为零的情况下的振动称为自由振动。

- 结构受外部干扰后发生振动，而在干扰消失后继续振动，这种振动称为结构的自由振动。

- 运动方程：

$$\boxed{m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = 0}$$

- 自由振动产生的原因：初始时刻的干扰！

  初始位移；初始速度；初始位移+初始速度

- 上式称为（二阶线性常系数）齐次方程；

- 齐次方程的求解： $$\boxed{m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = 0}$$ （2-2）
- （2-2）称为（二阶线性常系数）齐次方程(Homogeneous equation)
- 可设齐次方程解的形式为： $$v(t) = Ge^{st}$$

$$\dot{v}(t) = Gse^{st} \qquad \ddot{v}(t) = Gs^2e^{st}$$

- 代入（2-2）可得： $$(ms^2 + cs + k)Ge^{st} = 0$$ （2-3）
- 其特征方程为： $$(ms^2 + cs + k) = 0$$ （2-4）

或： $$s^2 + \frac{c}{m}s + \omega^2 = 0$$

- 式中 $\omega^2 = k/m$，ω 是体系振动的圆频率。
- 根据阻尼系数 c 值的不同，解出的特征参数 s 值将具有不同的特性。

特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的两个根 r_1, r_2	微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解
两个不[illegible]	$y=$[illegible]
两个相等的实根 $r_1=r_2$	$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$
一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

§2-2 无阻尼自由振动

- 自由振动方程： $$\boxed{m\ddot{v}+c\dot{v}+kv=0}$$ （2-2）
- 特征方程： $$s^2+\frac{c}{m}s+\omega^2=0$$
- If c=0： $$s=\pm i\omega$$ （2-7）
- 代入(2-2)得： $$v(t)=G_1e^{i\omega t}+G_2e^{-i\omega t}$$
- 引入Euler方程： $$e^{\pm i\omega t}=\cos\omega t\pm i\sin\omega t$$ （2-9）

得无阻尼自由振动的位移反应：

$$v(t)=A\sin\omega t+B\cos\omega t$$ （2-10）

- *A*和*B*是由初始条件决定的常数。

- 位移反应： $v(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$ （2-10）
- 设 t=0 时： $v(0) = v_0$　　$\dot{v}(0) = \dot{v}_0$
- 代入： $v(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$ → $B = v_0$

  v_0　　0　　B
- 代入： $\dot{v}(t) = A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t$ → $A = \dfrac{\dot{v}_0}{\omega}$

  $\dot{v}_0$　　$A\omega$　　0
- 单自由度无阻尼体系运动方程的解：

$$\boxed{v(t) = \frac{\dot{v}_0}{\omega}\sin\omega t + v_0\cos\omega t} \quad （2-11）$$

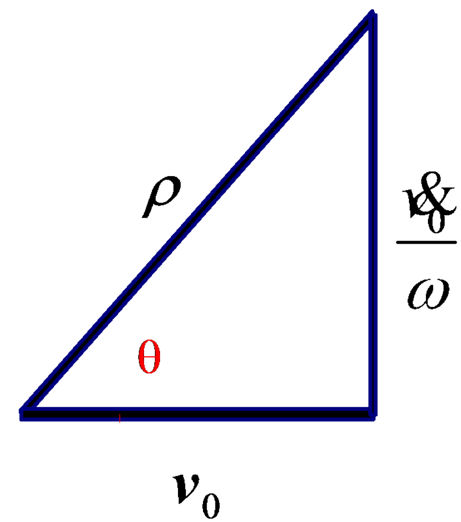
- 或写成： $\boxed{v(t) = \rho\cos(\omega t - \theta)}$ （2-14）

$$v(t)=\frac{\dot{v}_0}{\omega}\sin\omega t+v_0\cos\omega t \qquad (2\text{-}11)$$

- 三角关系：$\rho[\cos(\omega-\theta)]=\rho[\cos\omega\cos\theta+\sin\omega\sin\theta]$
- 对比(2-11)，显然有：

$$v_0=\rho\cos\theta \qquad \frac{\dot{v}_0}{\omega}=\rho\sin\theta$$

$$\rho=\sqrt{\left(\frac{\dot{v}_0}{\omega}\right)^2+v_0^2} \qquad \theta=\arctan\frac{\dot{v}_0}{\omega v_0}$$



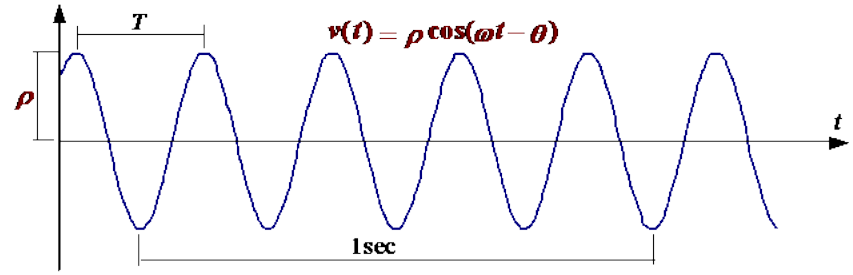
- (2-13)成为：

$$v(t)=\rho\cos\theta\sin\omega t+\rho\sin\theta\cos\omega t$$

- 即：

$$v(t)=\rho\cos(\omega t-\theta) \qquad (2\text{-}14)$$

定义



- 对于无阻尼体系，运动完全是反复进行的。运动的最大位移称为振幅。
- 运动的角速度称为自振圆频率：

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\qquad \text{（弧度/秒；rad/s）}$$

- 运动完成一个完整循环所需时间称为自振周期，由于对应每个角增量 2π 便发生一个完整循环，自振周期就是：

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\qquad \text{（秒; sec）}$$

- 单位时间内的循环次数称为自振频率：

$$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}\qquad \text{（次/秒；Hz）}$$

单摆运动

例题

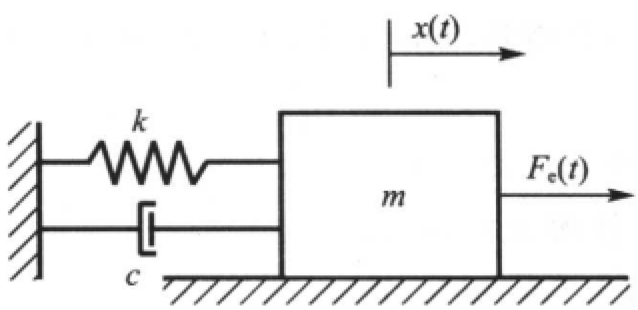
【例 2-1】 在图 2-1(a)中，假定质量块的质量 $m=1$ kg，如果用 $F=49$ N 的力沿 x 轴正向作用于物体上，弹簧获得静伸长 $\Delta=1$ cm。当 $t=0$ 时，将拉力卸掉。试计算 $t>0$ 时质量块的运动规律。

解 $t>0$ 时质量块的运动规律是无阻尼自由振动。不难判断质量块的初始位移为 $x_0=\Delta=1\ \text{cm}=0.01$ m，初始速度为 $\dot{x}_0=0$。由式(2-17)得到

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{F}{m\Delta}}=\sqrt{\frac{49}{0.01}}=70\ \text{s}^{-1} \qquad ①$$

从而，由式(2-15)可知质量块的运动规律为

$$x=x_0\cos\omega t=0.01\cos 70t \quad (\text{m}) \qquad ②$$



(a) 弹簧-质量系统

$$\boxed{v(t)=\frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t+v_0\cos\omega t}$$

§2-3 有阻尼自由振动

- 对于有阻尼的单自由度体系
- 自由振动方程：$\boxed{m\ddot{v}+c\dot{v}+kv=0}$ （2-2）
- 特征方程：$s^2+\dfrac{c}{m}s+\omega^2=0$
- $\because$ $c\neq 0$ 则：$s=-\dfrac{c}{2m}\pm\sqrt{\left(\dfrac{c}{2m}\right)^2-\omega^2}$
- 随着根号中值的符号的不同，这个表达式可以描述临界阻尼、低阻尼和超阻尼三种体系的运动型式。
- 本课程只讲临界阻尼和低阻尼两种情况。

1）临界阻尼

- 自由振动方程：$\boxed{m\ddot{v}+c\dot{v}+kv=0}$ （2-2）

- 特征方程的根

：$$s=-\frac{c}{2m}\pm\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2-\omega^2}$$

- 当根式中的值为零时，对应的阻尼值称为临界阻尼，记作c_c。显然，应有$c_c/2m=w$，即：

$$c_c=2m\omega$$

- 这时，对应的s 值为 ：$s_1=s_2=-c_c/2m=-\omega$ （2-19）

- 临界阻尼自由振动方程的解为：

$$v(t)=(G_1+G_2t)e^{-\omega t}$$ （2-20）