第三章 排列、组合与二项式定理小结

高二年级 数学

概念复习

1．分类加法计数原理：完成一件事，如果有n类办法，在第一类办法中有m_1种不同的方法，在第二类办法中有m_2种不同的方法，……，在第n类办法中有m_n种不同的方法，那么完成这件事共有$N=m_1+m_2+\cdots+m_n$种不同的方法.

概念复习

2．分步乘法计数原理：完成一件事，如果需要分成n个步骤，且：做第一个步骤有m_1种不同的方法，做第二个步骤有m_2种不同的方法，……，做第n个步骤有m_n种不同的方法，那么完成这件事共有$N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$种不同的方法.

概念复习

3.1.排列：一般地，从n个不同对象中，任取$m(m\leq n)$个对象，按照一定的顺序排成一列，称为从n个不同对象中取出m个对象的一个排列．$m=n$的排列称为全排列．

3.2.排列数：从n个不同对象中取出$m(m\leq n)$个对象的所有排列的个数，称为从n个不同对象中取出m个对象的排列数，用符号A_n^m表示．$m=n$的排列数用符号$n!$表示．

概念复习

4. 1. 组合：一般地，从n个不同对象中，取出$m\ (m\leq n)$个对象并成一组，称为从n个不同对象中取出m个对象的一个组合.

4. 2. 组合数：n个不同对象中，取出$m(m\leq n)$个对象的所有组合的个数，称为从n个不同对象中取出m个对象的组合数，用符号C_n^m表示.

概念复习

5. 二项式定理：一般地，当n是正整数时，有

T_{k+1}

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + \underline{C_n^k a^{n-k} b^k} + \cdots + C_n^n b^n$$

概念复习

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n$$

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 \cdots = 2^{n-1}$$

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^n b^n$$

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\cdots[n-(m-1)]}{m\times(m-1)\times\cdots\times 2\times 1} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$A_n^m = \underbrace{n\times(n-1)\times(n-2)\cdots\times(n-m+1)}_{m\text{个数}} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

$$N = m_1 \times m_2 \times \cdots m_n$$

夯实基础

例1.从0,2中选出一个数字，从1,3,5中选出两个数字，组成无重复数字的三位数，其中奇数的个数为________个.

解：解决这个问题分两类：

第一类：先从0，2中选0，0只能排在中间位置，有一种方法；

再从1，3，5中任选2个数排剩下的两个位置，有　　种A_3^2方法，

分步用乘法，共有　　$1\times A_3^2$种6方法；

夯实基础

第二类：再从0，2中选2，可以排在首位和第二位，有2种方法；再从1，3，5中任选2个数排剩下的两个位置，有 A_3^2 种方法；分步用乘法，共有$2\times A_3^2=12$ 种方法.

分类用加法，所以完成这件事总共有 $1\times A_3^2+2\times A_3^2=18$种方法，满足条件的奇数是18 个.

夯实基础

总结:解决排列问题的基本方法:

1. 理清完成这件事的策略

2. 特殊元素、特殊位置优先排列

夯实基础

例2. 张李两位老师和甲乙丙丁四位同学排成一排准备照相：

（1）若老师必须相邻，则共有多少种不同的排法；

解：把两位老师看成一个元素，加上4名同学共5个元素去排序，且两位老师之间可以交换顺序，共有$A_2^2 \times A_5^5 = 240$种不同排法.

夯实基础

例2. 张李两位老师和甲乙丙丁四位同学排成一排准备照相：

（2）若两位老师不相邻，共有多少种不同的排法；

解：先排好4位学生，共有A_4^4 种可能，4位学生共形成5个空，再把两位老师排在5个空里，就可以保证老师不相邻，因此共有$A_4^4A_5^2$ =480种不同的排法.

夯实基础

例2. 张李两位老师和甲乙丙丁四位同学排成一排准备照相：

（3）又来了两个同学加入，如果保持原来6人的相对顺序不变，则不同的加入方法有多少种？

解：原来6人的相对顺序保持不变，相当于8个人排序，其中6人定序.

夯实基础

方法1：共8个位置，可以让后来的同学先选，共有 A_8^2 种方法，剩下6个位置，让原来的6个人保持顺序排进去，所以总共是 $A_8^2\times 1$=56种不同的加入方法.

方法2：因为要保持之前的顺序，可以让之前的6人只选不排，所以是 C_8^6 种情况，接下来让后来的两人占剩下的两个位置有 A_2^2 种情况，共有 $C_8^6 A_2^2=56$ 种不同的方法.

夯实基础

总结:排列中的常见问题及解决策略:

1. 相邻问题——捆绑

2. 不相邻问题——插空

3. 定序问题——只选不排

夯实基础

例3. 从3名男生4名女生中，选出3人参加某课外小组.

（1）A必须当选的选法种数；

解：A必须当选，实际上只需要从剩下的6人中还选出2人，因为是只选不排，所以是$C_6^2=15$种.

夯实基础

例3. 从3名男生4名女生中，选出3人参加某课外小组.

（2）A、B都不当选的选法种数；

解：A、B都不当选，需要从剩下的5人中选出3人，所以是$C_5^3=10$种.

夯实基础

例3．从3名男生4名女生中，选出3人参加某课外小组.

（3）男、女生至少各1人的选法种数.

分析：先选出一个男生C_3^1，再选出一个女生C_4^1，最后随便选出一个，总共是$C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_5^1 = 60$种 .

典型错误解法

$C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_5^1$			$C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_5^1$		
男甲	某女	男乙	男乙	某女	男甲

夯实基础

例3．从3名男生4名女生中，选出3人参加某课外小组.

（3）男、女生至少各1人的选法种数.

解法1：男、女生至少各1人，即1男2女，2男1女共两种情况，

所以一共有 $C_3^1 \cdot C_4^2 + C_3^2 \cdot C_4^1 = 30$ 种.

解法2：用不带限制条件的组合减去全是男生和全是女生的情况即 $C_7^3 - C_3^3 - C_4^3 = 30$ 种 .

夯实基础

总结：带限制条件的组合问题：

1. 必含有

2. 必不含

3. 至多……，至少……