第六章　平面向量初步

6.2　向量基本定理与向量的坐标

6.2.3　平面向量的坐标及其运算

学习任务	核心素养
1．掌握平面向量的正交分解及其坐标表示．**(重点)** 2．会用坐标表示平面向量的加、减与数乘向量运算．**(重点)** 3．会用坐标表示平面向量共线的条件，能用向量共线的条件来解决有关向量共线、直线平行及点共线等问题．**(重点、难点)**	1．通过学习向量的正交分解，培养数学抽象的核心素养． 2．通过向量的直角坐标运算，提升数学运算的核心素养．

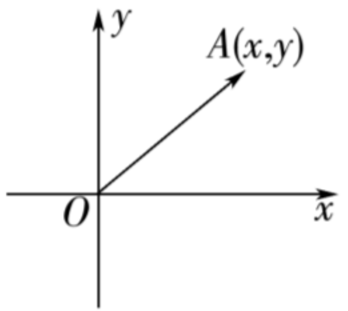
01

必备知识·情境导学探新知

情境与问题

通过上节学习我们知道，以单位向量 $\boldsymbol{e}$ 为基底建立数轴，如果把向量的始点平移到原点 O，则数轴上的向量坐标等于它的终点坐标，类似地，请思考：

问题：(1)平面直角坐标系的基底应满足什么条件？



(2)在直角坐标系中(如图)，向量$\overrightarrow{OA}$应怎样用基底表示？

(3)若点 A 的坐标为$(x，y)$，则向量$\overrightarrow{OA}$的坐标与$(x，y)$有什么关系？

[提示]　(1)基底$\{\boldsymbol{e}_1，\boldsymbol{e}_2\}$中，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 为单位向量且相互垂直.

(2)$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$．(3)$\overrightarrow{OA}$的坐标也是$(x，y)$.

知识点 1　平面向量的坐标

1．向量的正交分解

向量的正交分解	两个向量互相垂直	如果平面上两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所在的直线互相垂直，则称这两个向量互相垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$
	正交基底	如果平面向量的基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 中，$\boldsymbol{e}_1\perp\boldsymbol{e}_2$，就称这组基底为正交基底
	正交分解	在正交基底下向量的分解称为正交分解

提醒 为了方便起见，规定零向量与任意向量垂直.

2．向量的坐标

(1)定义：

一般地，给定平面内两个<u>相互垂直</u>的单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，对于平面内的向量 $\boldsymbol{a}$，如果 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$，则称$(x，y)$为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，记作 $\boldsymbol{a}$ $=$<u>(x,y)</u>.

(2)意义：

设点 A 的坐标为$(x，y)$，则$\overrightarrow{OA}=$__(x,y)__．坐标$(x，y)$在直角坐标系中有双重意义，它既可以表示一个固定的点，又可以表示一个向量．

知识点 2　平面上向量的运算与坐标的关系

向量的加、减法	若 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=$ $\underline{(x_1+x_2,y_1+y_2)}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=$ $\underline{(x_1-x_2,y_1-y_2)}$，即两个向量和与差的坐标等于两个向量相应坐标的和与差
实数与向量的积	若 $\boldsymbol{a}=(x, y)$，$\lambda\in\mathbf{R}$，则 $\lambda\boldsymbol{a}=$ $\underline{(\lambda x,\lambda y)}$，即数乘向量的积的坐标等于数乘以向量相应坐标的积

向量的数乘、加、减混合运算	若 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$，$u$，$v\in\mathbf{R}$，则 $u\boldsymbol{a}\pm v\boldsymbol{b}=(ux_1\pm vx_2, uy_1\pm vy_2)$
向量的模	若 $\boldsymbol{a}=(x, y)$，则 $\lvert\boldsymbol{a}\rvert=\sqrt{x^2+y^2}$

注：平面上两个向量相等的充要条件是它们的坐标对应相等.

思考 在平面坐标系中，已知 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，如何求$\overrightarrow{AB}$的坐标？

[提示] 已知 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2, y_2)-(x_1, y_1)=(x_2-x_1, y_2-y_1)$．即一个向量的坐标等于向量终点的坐标减去始点的坐标．

体验 1．已知点 $A(1，-3)$，$\overrightarrow{AB}$的坐标为$(3，7)$，则点 B 的坐标为(　　)

A．$(4，4)$　　B．$(-2，4)$

C．$(2，10)$　　D．$(-2，-10)$

A　[设点 B 的坐标为$(x，y)$，由$\overrightarrow{AB}=(3，7)=(x，y)-(1，-3)=(x-1，y+3)=(3，7)$，得 $B(4，4)$．]

体验 2．已知 $\boldsymbol{a}=(1，-1)$，$\boldsymbol{b}=(3，0)$，则 $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 等于(　　)

A．(5，3)　　B．(4，－1)

C．(－2，－1)　　D．(－3，－3)

D　[$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=3(1，-1)-2(3，0)=(3，-3)-(6，0)=(-3，-3)$．]

知识点 3　平面直角坐标系内两点之间的距离公式与中点坐标公式

(1)平面上两点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$间的距离公式$|\overrightarrow{AB}|=$ $\underline{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$.

(2)AB 的中点坐标公式$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2}, \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2}. \end{cases}$

[拓展]　平面直角坐标系中，$\triangle ABC$的顶点坐标分别为$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$，则$\triangle ABC$的重心G的坐标为$G\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

体验 3．已知平面直角坐标系内的两点 $A(-1, 2)$，$B(2, 6)$，则 $AB=$__________；若 AB 的中点为 M，则 M 的坐标为__________．

5　$\left(\frac{1}{2}, 4\right)$　[$AB=\sqrt{(-1-2)^2+(2-6)^2}=5$．设 $M(x, y)$，则 $x=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}$，$y=\frac{2+6}{2}=4$．]

知识点 4　向量平行的坐标表示

(1)设 $\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2)$，则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$ $\underline{x_2y_1=x_1y_2}$.

(2)设 $\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2)$，如果向量 $\boldsymbol{b}$ 不平行于坐标轴，即 $x_2\neq0$，$y_2\neq0$，则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$ $\underline{\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}}$.

体验 4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，其中 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 不共线，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}=6\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$ 的关系是(　　)

A. 不共线　　B. 共线

C. 相等　　D. 不确定

B　[$\because \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，$\therefore \boldsymbol{c}=2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，$\therefore \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线．]

体验 5．已知 $\boldsymbol{a}=(-6, 2)$，$\boldsymbol{b}=(m, -3)$，且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $m=$(　　)

A．-9　　B．9　　C．3　　D．-3

B　[由 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，得 $-6\times(-3)=2m$，$\therefore m=9$．]

02

关键能力·合作探究释疑难

▶ 类型 1　平面向量的坐标表示

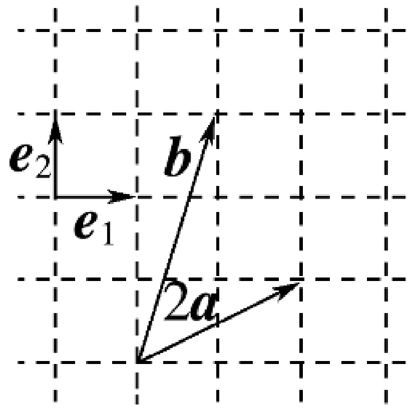
【例 1】　(1)如图所示，若向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是一组单位正交向量，则向量 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在平面直角坐标系中的坐标为(　　)

A．(3，4)

B．(2，4)

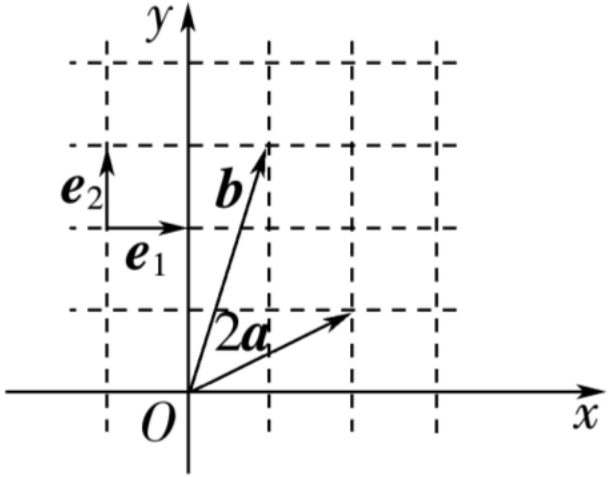
C．(3，4)或(4，3)

D．(4，2)或(2，4)



[思路探究]　借助平面向量的正交分解直接求解．

A [以向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 公共的起点为坐标原点，建立如图坐标系，因为 $\boldsymbol{e}_1=(1,\ 0)$，$\boldsymbol{e}_2=(0,\ 1)$，



所以 $2\boldsymbol{a}=(2,\ 1)$，$\boldsymbol{b}=(1,\ 3)$，

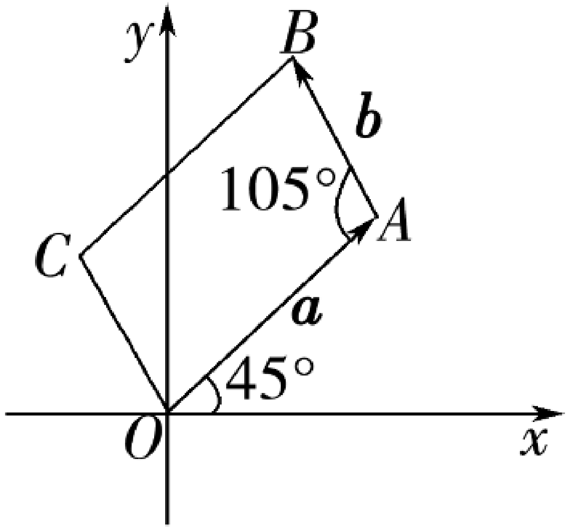
所以 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,\ 1)+(1,\ 3)=(3,\ 4)$，即 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在平面直角坐标系中的坐标为(3，4)，故选 A．]

(2)如图，在直角坐标系 xOy 中，$OA=4$，$AB=3$，$\angle AOx=45°$，$\angle OAB=105°$，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$．四边形 $OABC$ 为平行四边形．

①求向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的坐标；

②求向量$\overrightarrow{BA}$的坐标；

③求点 B 的坐标．



[思路探究]　①由 $OA=4$，$\angle AOx=45°$可求出点 A 的坐标，从而求出 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，再由$\angle OAB=105°$，得出$\angle COy$，进而得点 C 的坐标，根据$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$得出 $\boldsymbol{b}$ 的坐标.

②由①中 $\boldsymbol{b}$ 的坐标及 $\boldsymbol{b}$ 与$\overrightarrow{BA}$的关系得出$\overrightarrow{BA}$的坐标.

③可借助$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$求出点 B 的坐标.

[解] ①作 $AM\perp x$ 轴于点 M(图略)，

则 $OM=OA\cdot\cos 45°=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$，

$AM=OA\cdot\sin 45°=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$，

所以 $A(2\sqrt{2}，2\sqrt{2})$．故 $\boldsymbol{a}=(2\sqrt{2}，2\sqrt{2})$．

因为 $\angle AOC=180°-105°=75°$，$\angle AOy=45°$，

所以 $\angle COy=30°$．

又 $OC=AB=3$，所以 $C\left(-\frac{3}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，

所以$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}=\left(-\frac{3}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，即 $\boldsymbol{b}=\left(-\frac{3}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

②由①知$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}=-\boldsymbol{b}=\left(\frac{3}{2},\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

③$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})+\left(-\frac{3}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$=\left(2\sqrt{2}-\frac{3}{2},\ 2\sqrt{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，

所以点 B 的坐标为$\left(2\sqrt{2}-\frac{3}{2},\ 2\sqrt{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

反思领悟

求向量坐标的三个步骤

平移 → 将向量的始点移至坐标原点

↓

求角 → 找出以x轴正向为始边，向量所在射线为终边的角 θ

↓

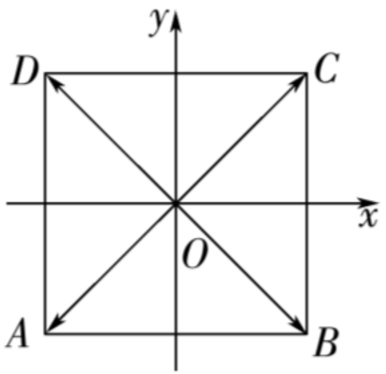
求坐标 → 根据$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$（r为向量的模）求终点坐标，即为向量坐标

[跟进训练]

1．(1)已知$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$为单位正交基底且 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{e}_1$，则 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的坐标分别为__________.

(3，4)，(－3，0)　由平面向量坐标的定义知 $\boldsymbol{a}=(3, 4)$，$\boldsymbol{b}=(-3, 0)$.

(2)如图，在正方形 $ABCD$ 中，O 为中心，且$\overrightarrow{OA}=(-1，-1)$，则$\overrightarrow{OB}=$________；$\overrightarrow{OC}=$__________；$\overrightarrow{OD}=$________.



(1，－1)　(1，1)　(－1，1)　由题意知，$\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}=-(-1，-1)=(1，1)$，由正方形的对称性可知，$B(1，-1)$，所以$\overrightarrow{OB}=(1，-1)$，同理$\overrightarrow{OD}=(-1，1)$.