

压杆稳定

压杆的稳定概念

细长压杆临界压力的欧拉公式

欧拉公式的使用范围 临界应力总图

压杆的稳定计算

提高压杆稳定性的措施

压杆的稳定概念

一、概述

构件和结构的安全性大部分取决于构件的**强度和刚度**。

构件失效： { 强度不足而发生脆断或屈服破坏
刚度不够而发生过大弹性变形导致无法正常工作
丧失稳定性（失稳）而失去承载能力

工程中有些构件并非因强度、刚度不足而破坏——另一种失效形式

构件失稳常导致静定结构突变成可变机构，从而发生灾难性的坍塌事故。足够的稳定性是保证构件正常工作的必要条件。

——本章主要讨论压杆的稳定性问题

二、压杆的失稳现象

取一枚铁钉与一根直径相同的长铁丝做实验

——铁钉能承受手的压力，但长铁丝稍压即弯，无法承受手的压力。

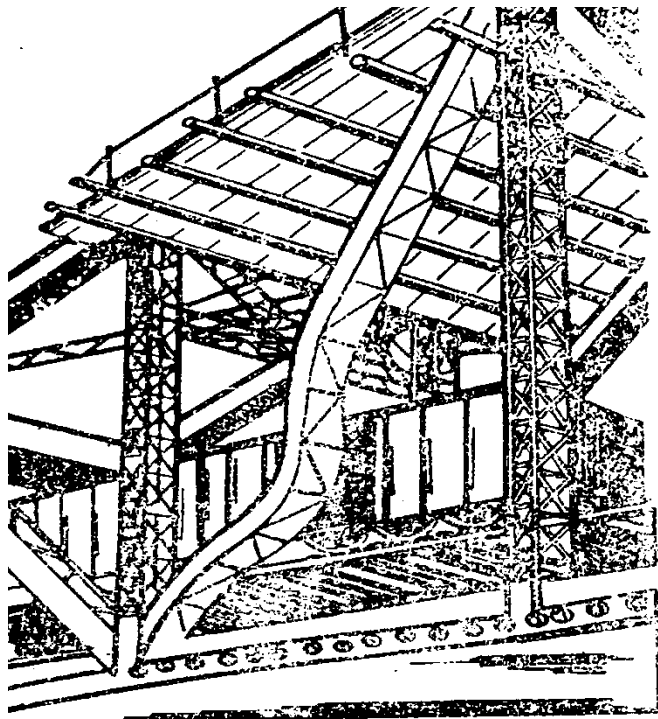
细长压杆（受压直杆）表现出的这种与强度、刚度问题完全不同的性质，就是**稳定性问题**。

这类压杆的破坏并非强度不足引起，而是由于**压杆丧失初始直线平衡构形**，即**压杆丧失稳定**（简称**失稳**）引起的。

失稳时压杆横截面上的应力远小于材料的弹性极限，并不发生材料破坏



压杆失稳带有突发性，是造成结构物破坏倒塌的重要原因



1925年苏联莫兹尔桥在试车时因桥梁桁架压杆失稳导致破坏

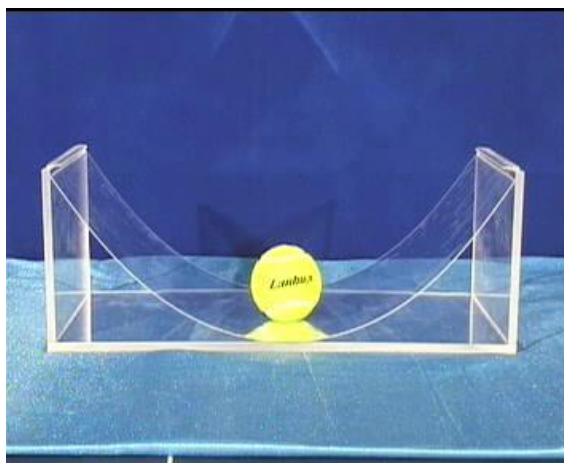


脚手架结构存在缺陷，造成失稳坍塌事故

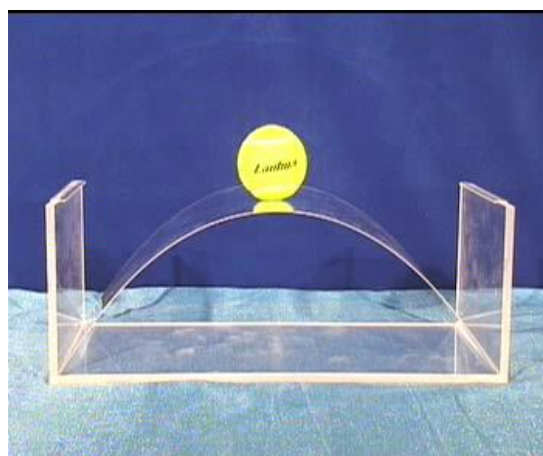
稳定性研究是材料力学的重要任务之一

三、平衡稳定性的概念

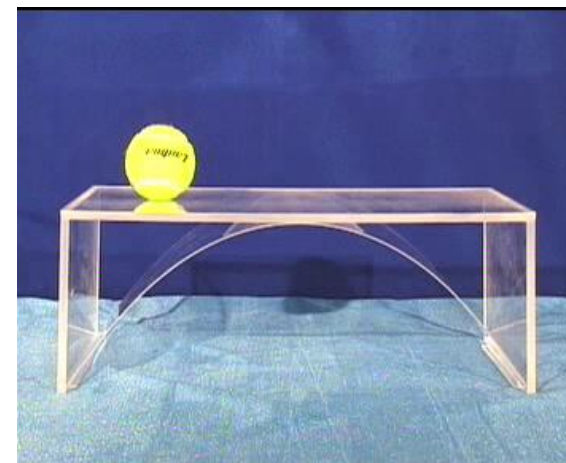
以放置在光滑表面上的小球为例，说明平衡稳定性的概念



稳定平衡



不稳定平衡



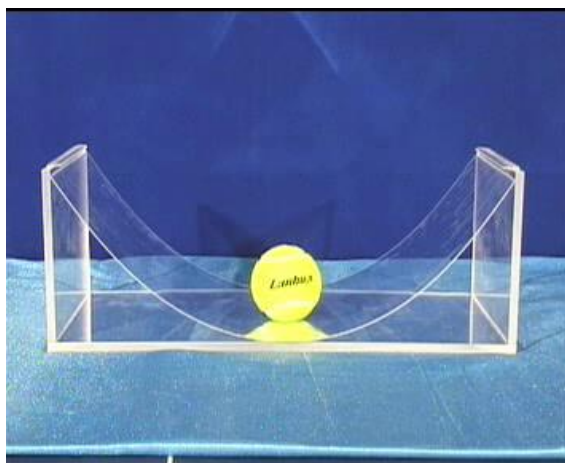
随遇平衡（临界状态）

三种情况下小球在重力和约束力下处于平衡。当小球受到到轻微扰动时

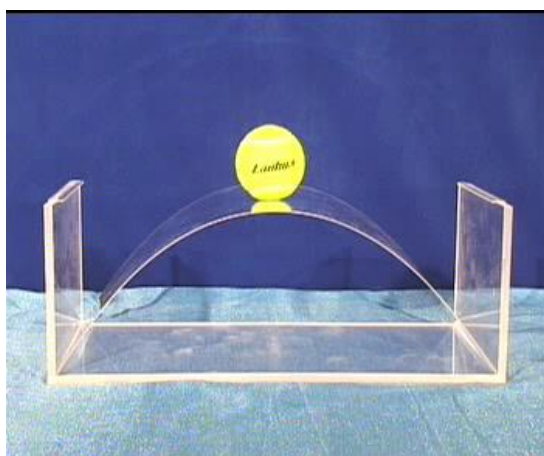
- 1、重力和约束力的合力指向初始平衡位置，小球加速回复初始平衡位置
- 2、重力和约束力的合力背离初始平衡位置，小球加速远离初始平衡位置
- 3、重力和约束力的合力为零，小球再次处于平衡，不回复也不远离

三、平衡稳定性的概念

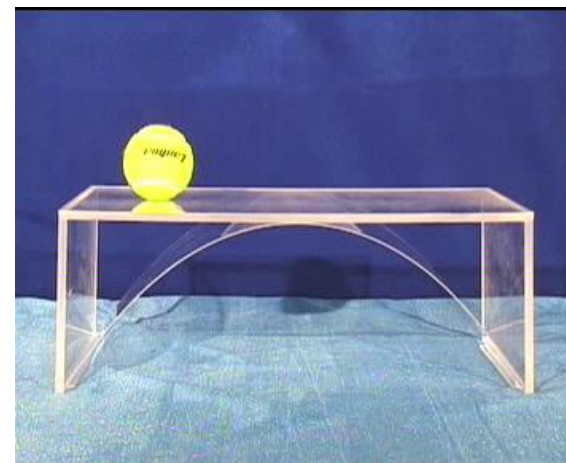
以放置在光滑表面上的小球为例，说明平衡稳定性的概念



稳定平衡



不稳定平衡



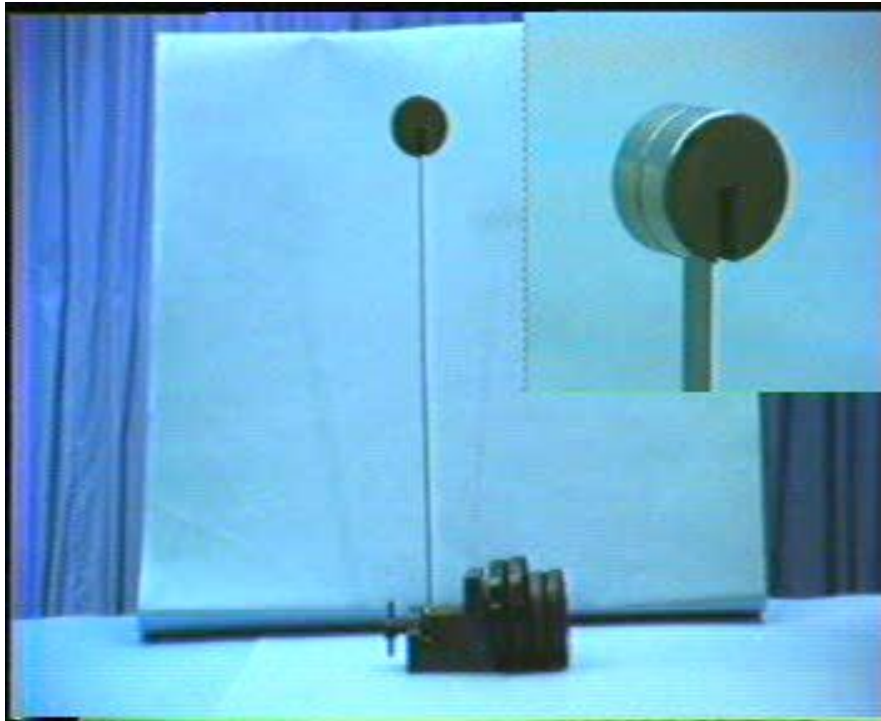
随遇平衡（临界平衡）

随遇平衡也是一种不稳定的平衡状态。只有当小球处于稳定平衡状态时，才能在小扰动下保持其初始平衡状态的稳定性

稳定性——平衡物体在其原来平衡状态下抵抗干扰的能力。

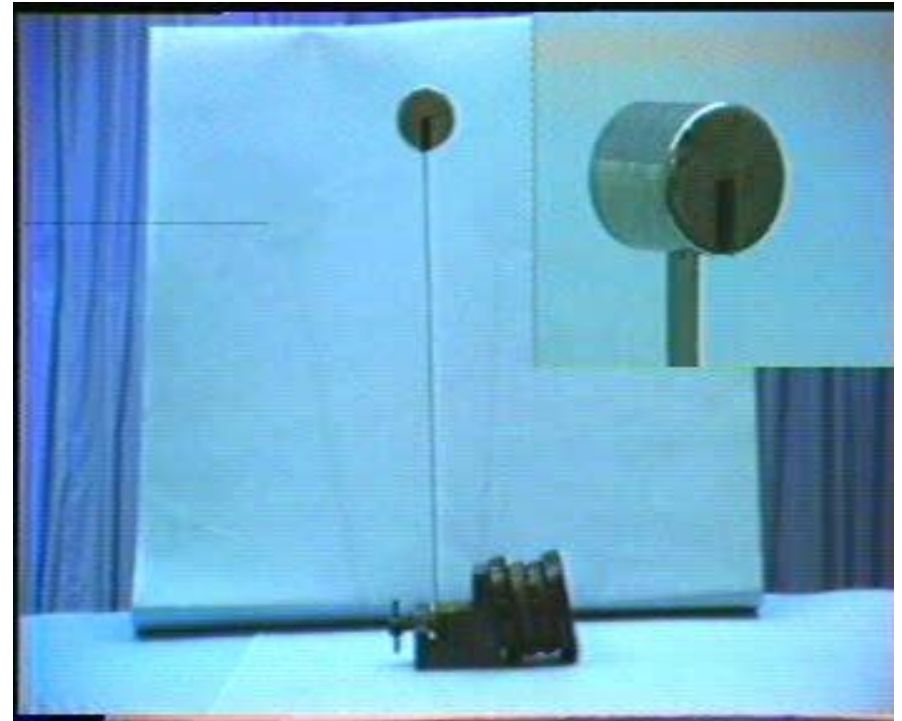
失稳——不稳定的平衡物体在任意微小的外界干扰下的变化或破坏过程。

受压直杆平衡的三种状态



稳定平衡

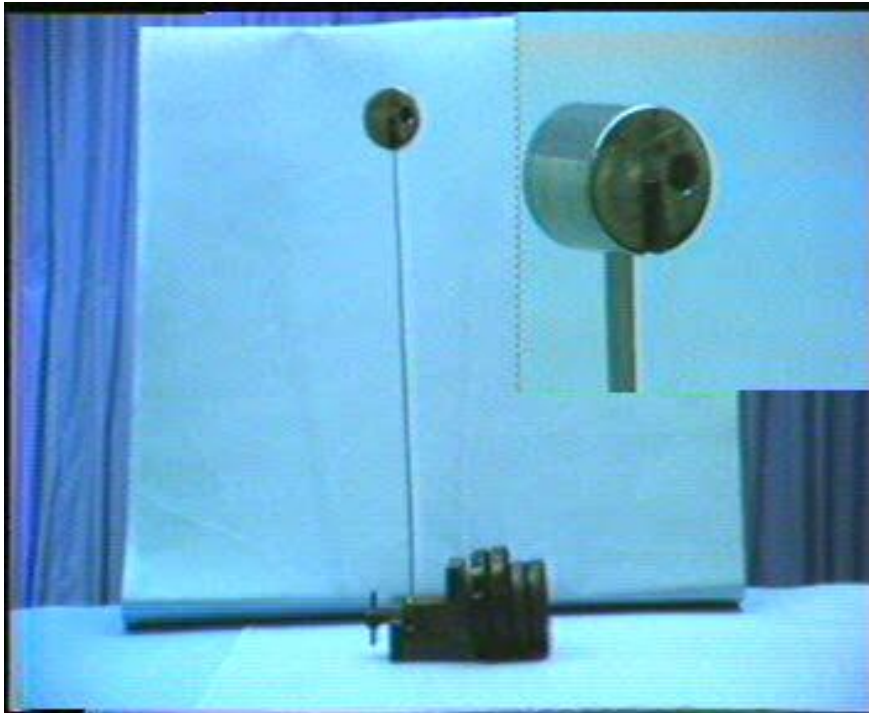
当轴向压力小于某个界限值时——干扰解除后，左右摆动若干次后，恢复原有直线平衡状态



不稳定平衡

当轴向压力大于这个界限值时——一旦受到横向干扰，压杆就会发生显著的弯曲变形甚至折断

受压直杆平衡的三种状态



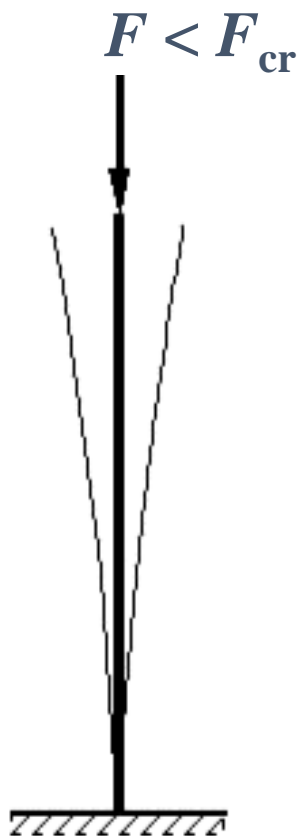
当轴向压力等于上述界限值时——受横向干扰发生微小弯曲变形，即使干扰解除后，压杆也不能恢复原有直线平衡状态，而是在微弯的状态下保持平衡

随遇平衡

(介于稳定和不稳定之间的临界平衡)

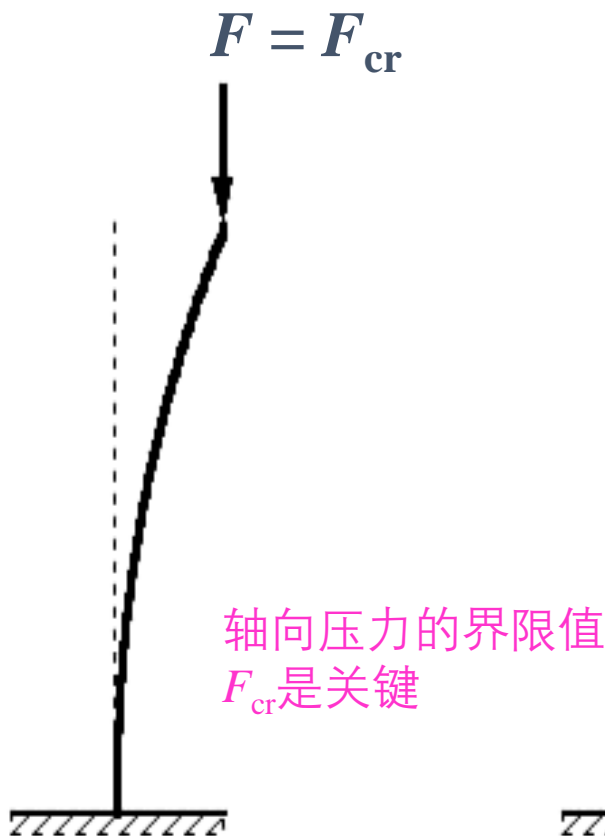
压杆由直线平衡状态突变到弯曲的曲线平衡状态这一过程，称为**失稳**，也称为**屈曲**

受压直杆平衡的三种状态



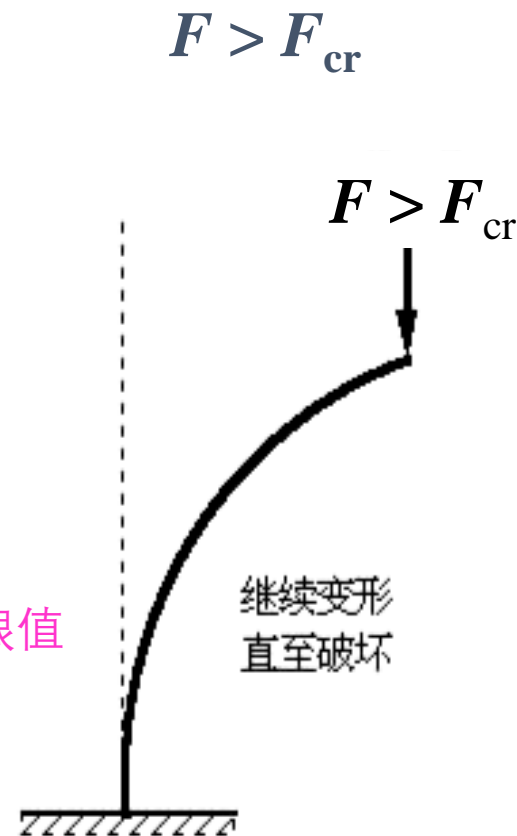
稳定平衡

直线平衡构形



临界平衡

微弯构形下处于平衡

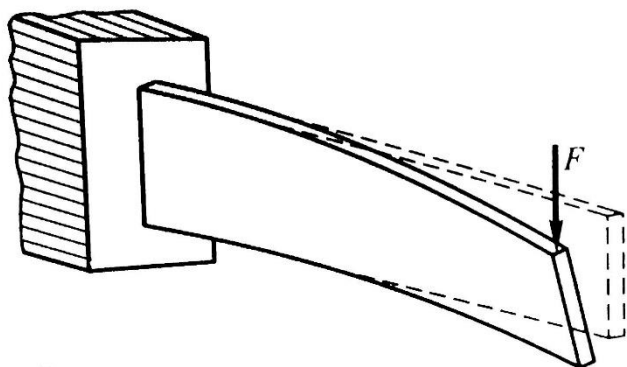


不稳定平衡

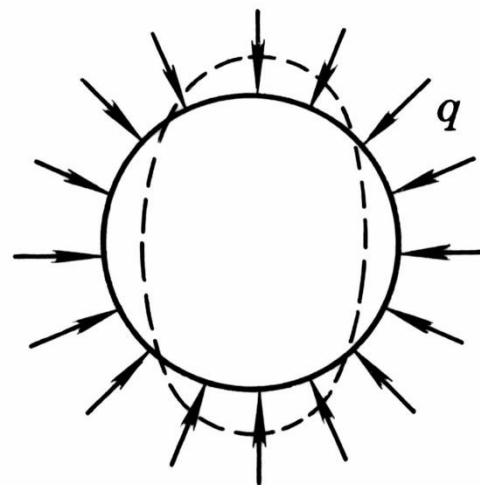
上述轴向压力的界限值（在临界平衡状态所受的轴向压力）

F_{cr} ——临界压力

四、其它工程结构的失稳现象



板条在最大弯曲刚度平面内横力弯曲时会产生侧弯失稳



承受径向外压的圆筒形薄壁容器，当外压力 q 达到或超过临界值时，圆筒形截面将突然变成椭圆形

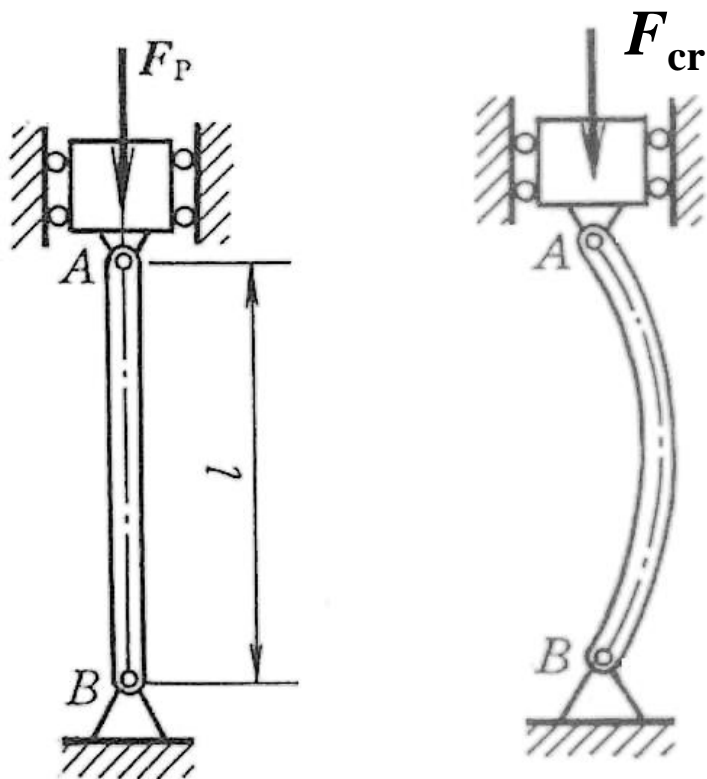


薄壁圆筒在轴向压力或扭矩作用下也会失稳，在表面形成波纹状皱折。

细长压杆临界压力的欧拉公式

研究压杆稳定时，常将压杆抽象为材料均匀、轴线为直线且外加压力与轴线重合的理想压杆——“中心受压直杆模型”

解决压杆稳定问题的关键，在于确定压杆的临界压力 F_{cr}



当轴向压力达到临界值 F_{cr} 时，压杆将由直线平衡状态转变为微弯平衡状态

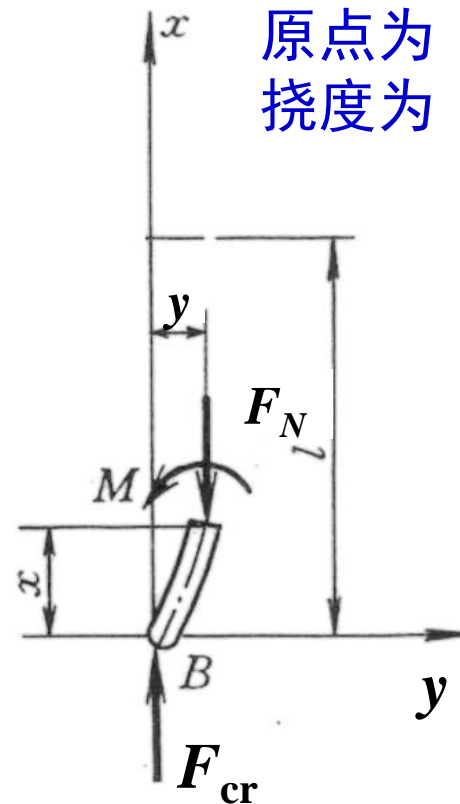
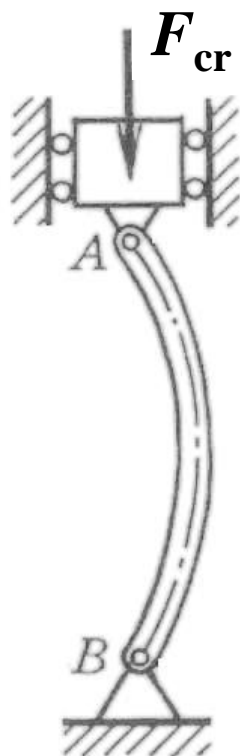
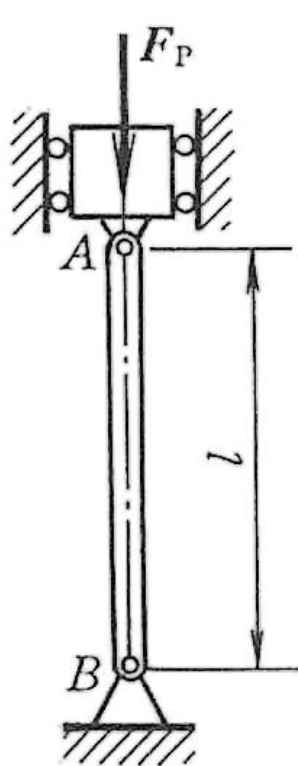
——使压杆在微弯状态下保持平衡的压力即为临界压力

从压杆处于微弯的平衡状态着手，应用杆件弯曲理论推导细长压杆临界压力的计算公式

（规定材料处于理想的线弹性范围，讨论线弹性稳定问题）

细长压杆临界压力的欧拉公式

一、两端铰支细长压杆的临界压力



考察局部压杆的平衡。设距原点为 x 的截面挠度为 y

在临界压力作用下，压杆处于微弯构形下的平衡

两端铰支细长压杆的临界压力

考察微弯状态下局部压杆的平衡：

$$M(x) = F_{cr} y(x)$$

对微小的弯曲变形，挠曲线近似微分方程

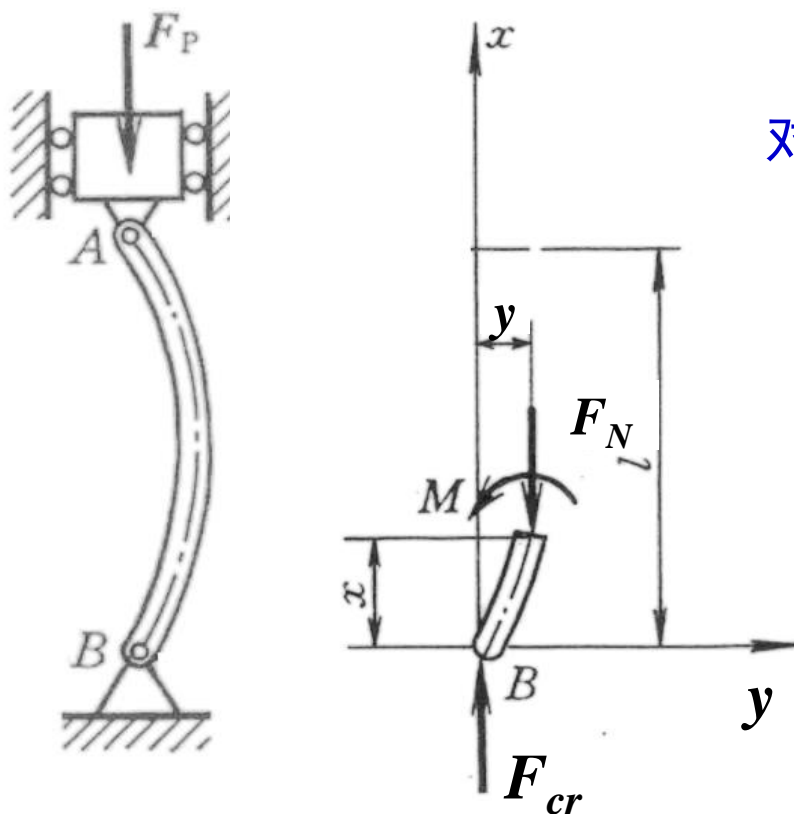
$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M(x)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{F_{cr}}{EI} y = 0$$

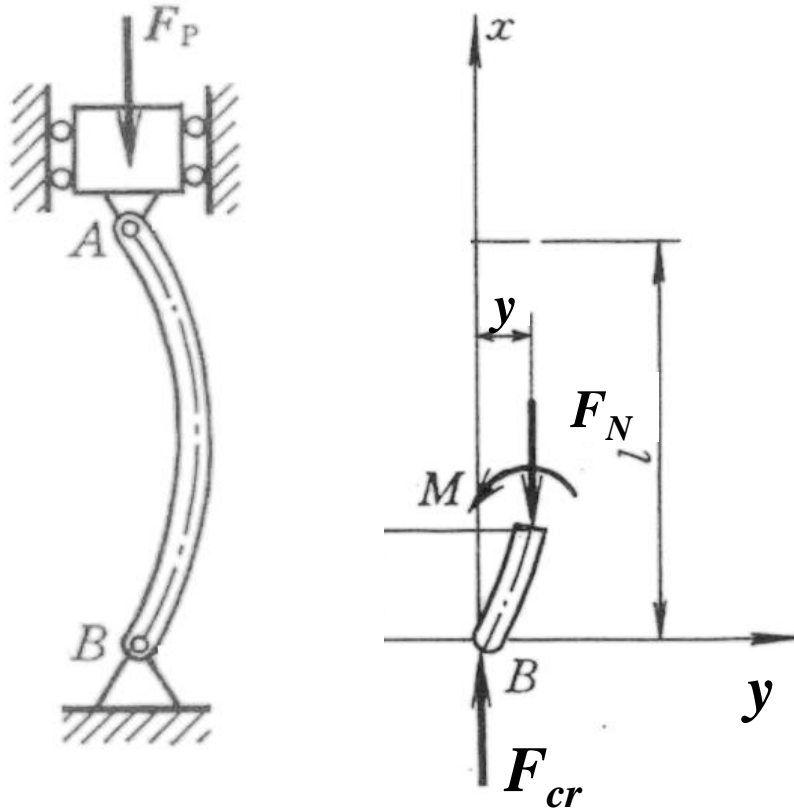
$$\text{令 } k^2 = \frac{F_{cr}}{EI}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0$$

二阶常系数线性奇次微分方程



两端铰支细长压杆的临界压力



$$\frac{d^2 y}{d x^2} + k^2 y = 0 \quad (k^2 = \frac{F_{cr}}{EI})$$

二阶常系数线性齐次微分方程

微分方程的解: $y = A \sin kx + B \cos kx$

支承条件: $y(0) = 0$, $y(l) = 0$

$$0 \cdot A + 1 \cdot B = 0$$

$$\sin kl \cdot A + \cos kl \cdot B = 0$$

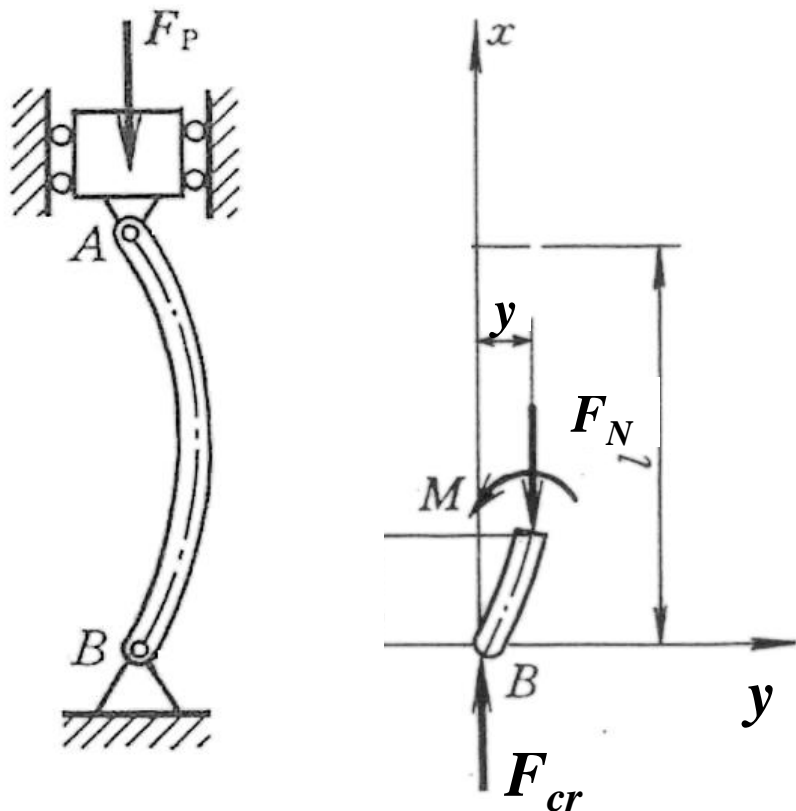
$$B = 0$$

$$\sin kl \cdot A = 0$$

若 $A = 0$, 则与压杆处于微弯状态的假设不符, 因此可得:

$$\sin kl = 0$$

两端铰支细长压杆的临界压力



$$y = A \sin kx + B \cos kx$$

$$B = 0$$

$$\sin kl \cdot A = 0 \quad \sin kl = 0$$

$$kl = n\pi \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$\text{由 } k^2 = \frac{F_{cr}}{EI} \text{ 可得}$$

$$F_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}$$

两端铰支细长压杆的临界载荷

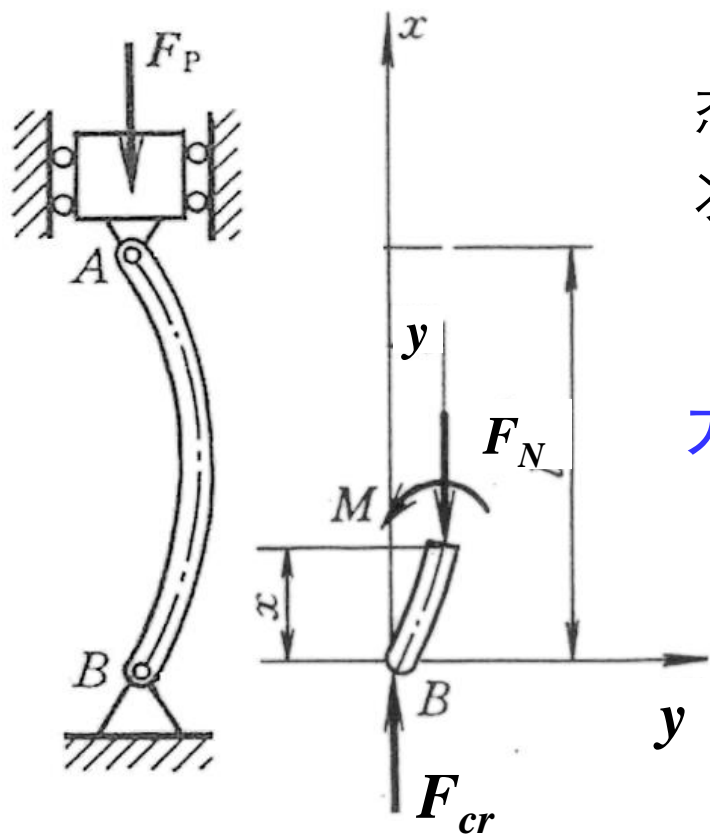
两端铰支细长压杆的临界压力 $F_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}$

上式表明，使杆件处于微弯曲线平衡状态的压力在理论上是多值的（对应压杆的多次失稳），工程上取其最小值为临界压力

临界压力 F_{cr} 是使压杆失稳的最小压力，故临界压力对应 $n = 1$ ，称为

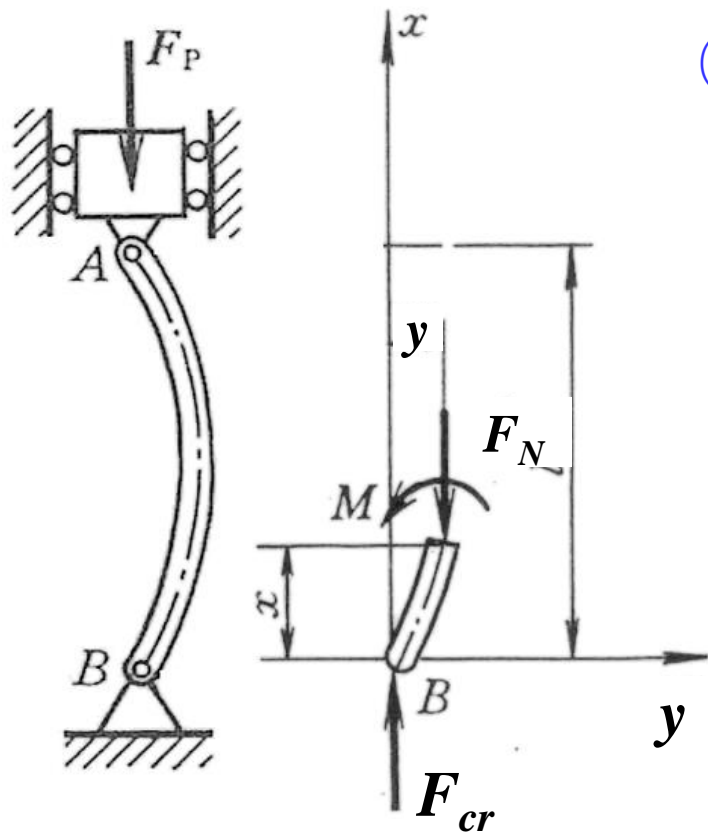
欧拉临界压力： $F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$

——两端铰支细长压杆的临界压力的欧拉公式



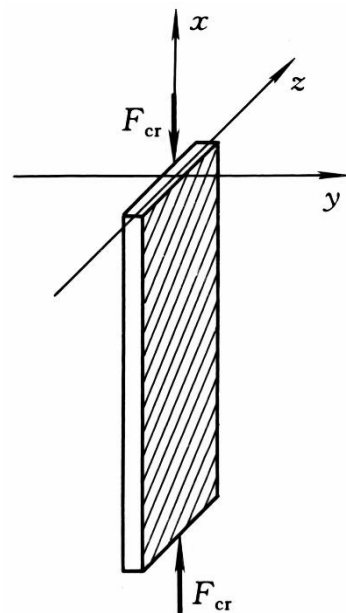
两端铰支细长压杆的临界载荷的欧拉公式 $F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$

I ——压杆失稳时弯曲平面内截面对中性轴的惯性矩



(1) 压杆失稳时弯曲平面的判别

若压杆两端为球铰支座，则压杆总是先在抗弯能力最弱的纵向平面内失稳，因此，式中取 I_{\min}



(2) 压杆失稳时的挠曲线

挠曲线方程 ($y = A \sin kx + B \cos kx$)

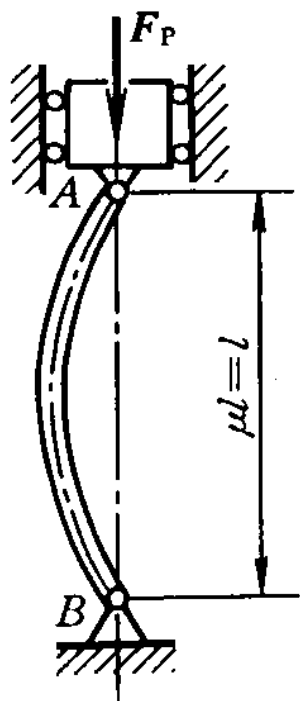
$$y(x) = A \sin \frac{n\pi x}{l}$$

是一个半波正弦曲线

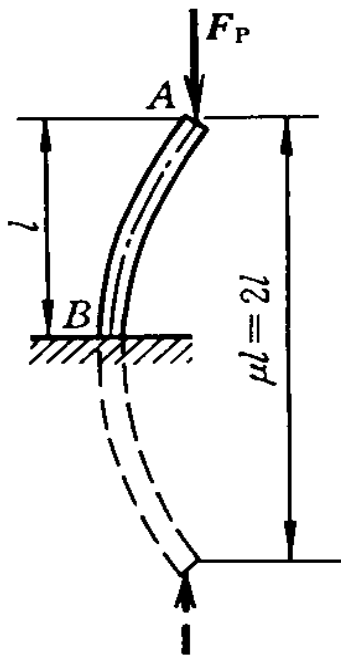
二、其它支承条件下细长压杆的临界压力

压杆两端约束条件改变时，弯矩方程和支承条件改变， F_{cr} 必然发生改变。杆端约束越强，稳定性越好， F_{cr} 越大。

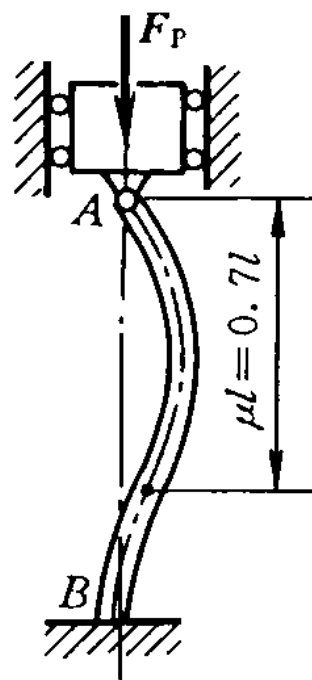
用同样的方法可得到不同支承条件下理想压杆的 F_{cr} 及其挠曲线形状



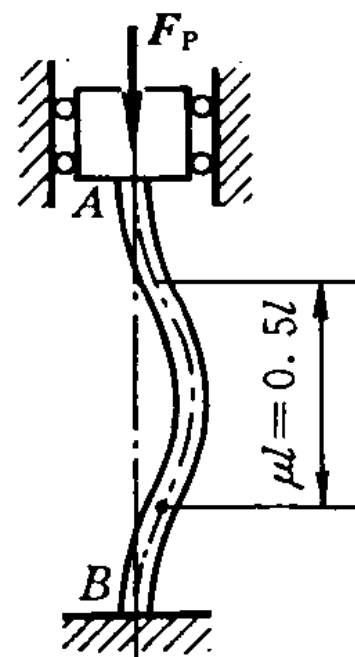
$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$



$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}$$

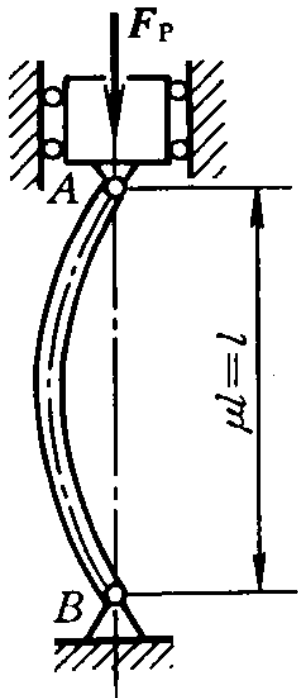


$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2}$$

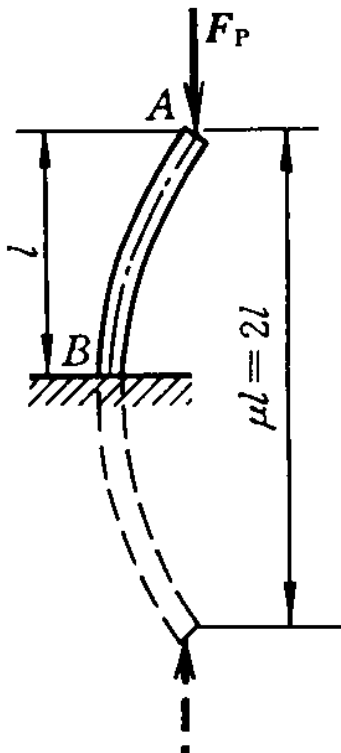


$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.5l)^2}$$

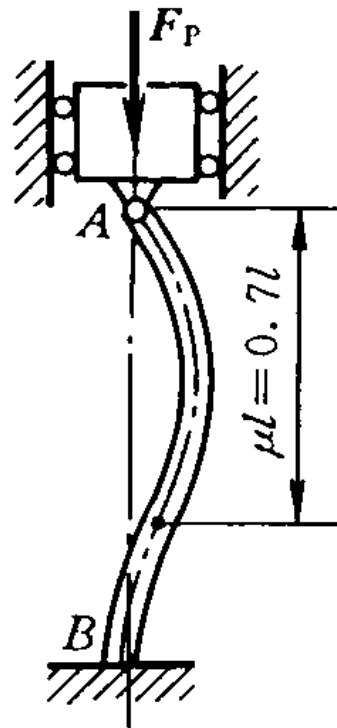
四种不同杆端约束条件下理想压杆的 F_{cr} 及其挠曲线形状



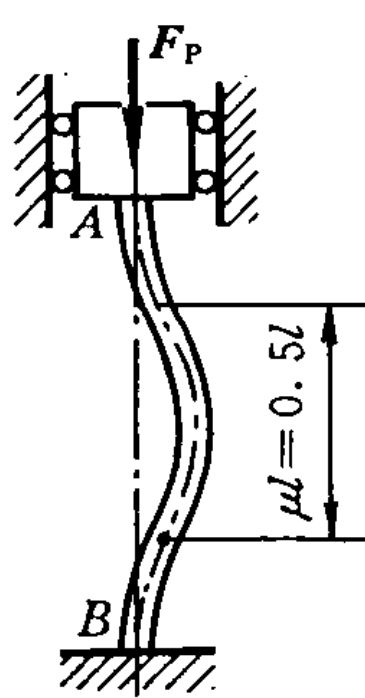
$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$



$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}$$



$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2}$$

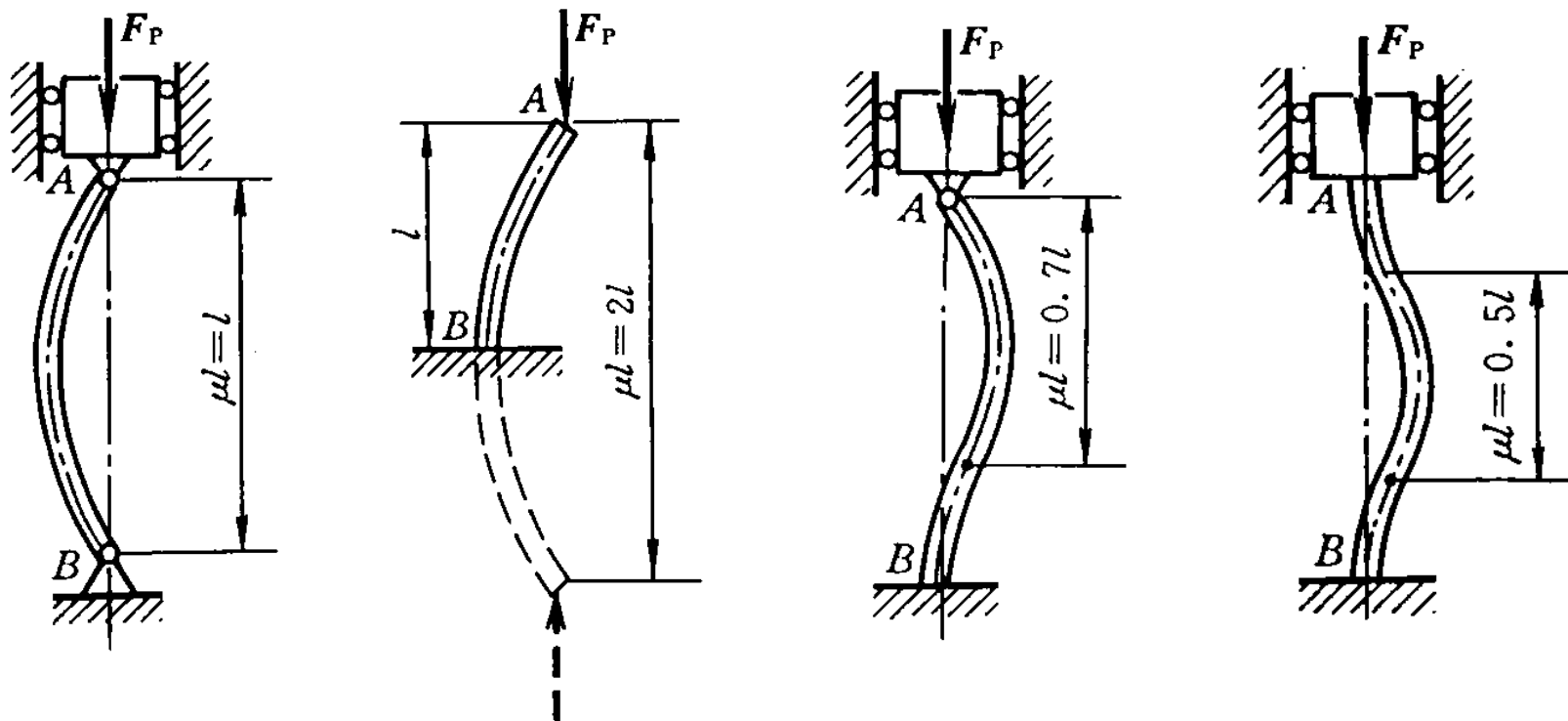


$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.5l)^2}$$

写成统一的形式：

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

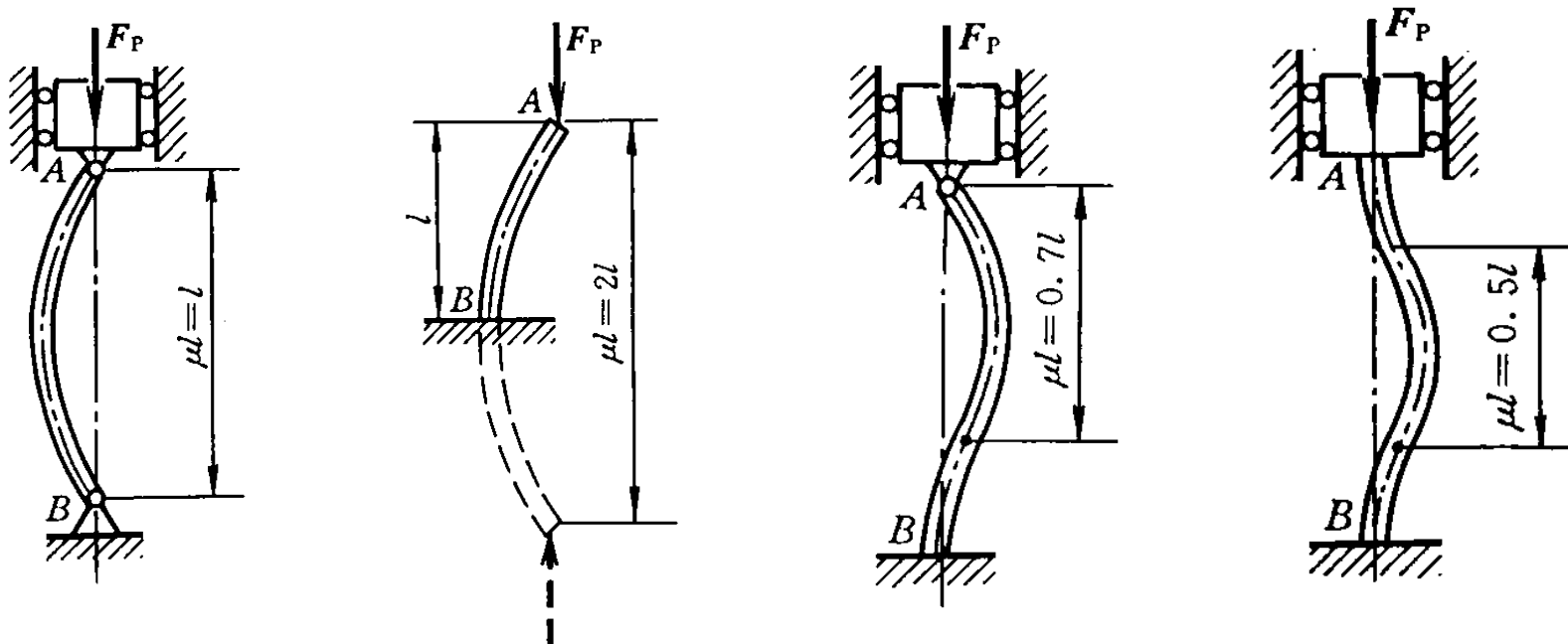
四种不同杆端约束条件下理想压杆的 F_{cr} 及其挠曲线形状



临界压力欧拉公式的一般形式：
$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

μl ——相当长度
 μ ——长度系数

其他约束条件下压杆临界压力的计算式也可以利用两端铰支压杆的欧拉公式，通过比较失稳时的挠曲线形状，采用类比方法导出。



临界压力欧拉公式的一般形式：

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

- 一端自由，一端固定： $\mu = 2.0$
- 一端铰支，一端固定： $\mu = 0.7$
- 两端固定： $\mu = 0.5$
- 两端铰支： $\mu = 1.0$

注意：上述 μ 值是在理想的杆端约束下得出的

实际压杆较复杂——杆端与其他弹性构件固接，压杆受到弹性介质的阻抗力，压力沿轴线分布等，可用不同长度系数 μ 来反映。

临界载荷欧拉公式的一般形式：

$$F_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

一端自由，一端固定：	$\mu = 2.0$
一端铰支，一端固定：	$\mu = 0.7$
两端固定：	$\mu = 0.5$
两端铰支：	$\mu = 1.0$

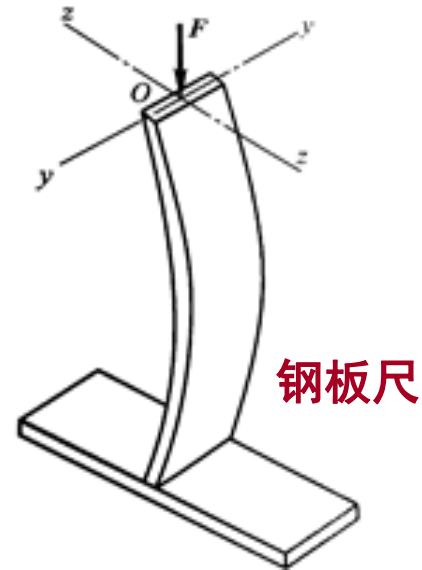
失稳时弯曲平面的判别

1、当压杆杆端的约束情况在最大和最小抗弯刚度平面内相同时，公式中的 I 应取压杆横截面的最小形心主惯性矩 I_{\min} 。

注意

$$F_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}$$

2、当压杆在最大和最小抗弯刚度平面内的约束情况不同时，则应分别计算在两个形心主惯性平面内失稳时的临界力，然后再确定该压杆的临界力。

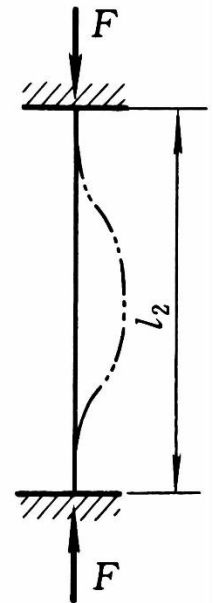
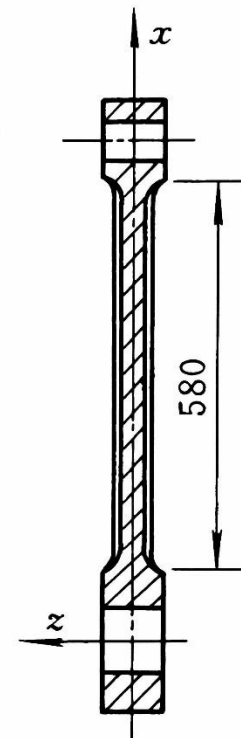
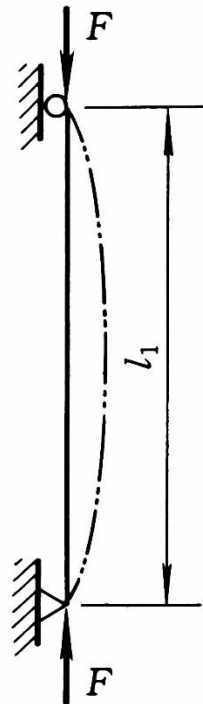
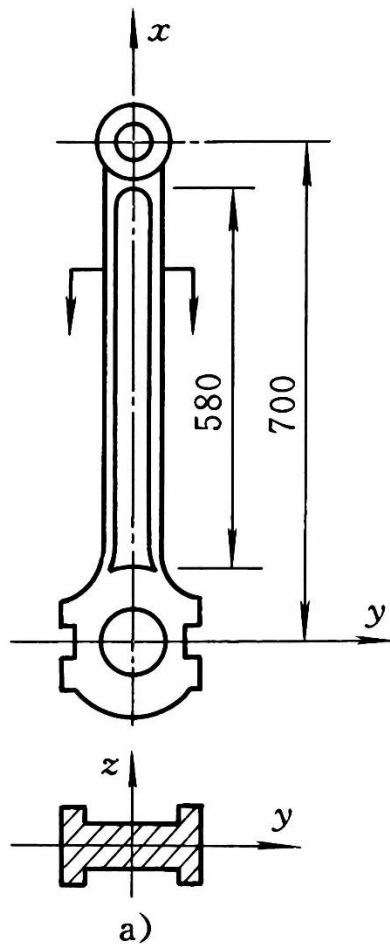


在 xy 平面失稳时，杆端约束情况接近于两端铰支

在 xz 平面失稳时，杆端约束情况接近于两端固定

$$F_{crz} = \frac{\pi^2 EI_z}{(\mu_z L_1)^2}$$

$$F_{cry} = \frac{\pi^2 EI_y}{(\mu_y L_2)^2}$$



两种情况下的杆长也不同

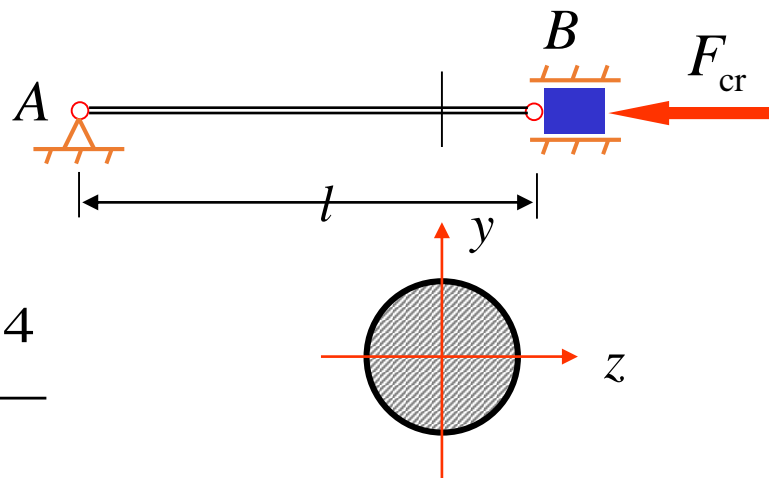
$$F_{cr} = \min(F_{cry}, F_{crz})$$

连杆

例：图示细长圆截面杆，长度 $l = 800 \text{ mm}$ ，直径 $d = 20 \text{ mm}$ ，材料为Q235钢， $E = 200 \text{ GPa}$. 试计算杆的临界载荷 F_{cr} .

解：1、细长压杆的临界载荷

$$\begin{aligned} F_{\text{cr}} &= \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 E \cdot \pi d^4}{l^2 \cdot 64} \\ &= \frac{\pi^3 \times 200 \times 10^9 \times 0.02^4}{0.8^2 \cdot 64} \\ &= 24.2 \text{ (kN)} \end{aligned}$$



2、从强度分析 $\sigma_s = 235 \text{ MPa}$

$$F_s = A \sigma_s = \frac{0.02^2 \pi}{4} \times 235 \times 10^6 = 73.8 \text{ (kN)}$$

欧拉公式的使用范围 临界应力总图

一、临界应力与柔度

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E}{(\frac{\mu l}{i})^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

——细长压杆临界应力的欧拉公式

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} \quad \text{——压杆的柔度（长细比）}$$

柔度是影响压杆承载能力的综合指标

综合反映杆长、支承方式与截面几何性质对临界应力的影响

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad \text{——惯性半径} \quad \begin{aligned} I_z &= A \cdot i_z^2, \\ I_y &= A \cdot i_y^2. \end{aligned}$$

λ 应为两个形心主惯性平面内柔度的最大值——压杆失稳时弯曲平面内的柔度

$\lambda \uparrow \quad \sigma_{cr} \downarrow \Rightarrow$ 杆越细长，压杆越容易失稳

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/028131020065006112>