专题08 一次函数与反比例函数的实际应用（原卷版）

类型一 一次函数的实际应用

（1）方案选择问题

1．（2023•内蒙古）某商店决定购进 A、B 两种北京冬奥会纪念品．若购进 A 种纪念品10件，B 种纪念品5件，需要1000元；若购进 A 种纪念品5件，B 种纪念品3件，需要550元．

（1）求购进 A、B 两种纪念品的单价；

（2）若该商店决定拿出1万元全部用来购进这两种纪念品，考虑市场需求，要求购进 A 种纪念品的数量不少于 B 种纪念品数量的6倍，且购进 B 种纪念品数量不少于20件，那么该商店共有几种进货方案？

（3）若销售每件 A 种纪念品可获利润20元，每件 B 种纪念品可获利润30元，在第（2）问的各种进货方案中，哪一种方案获利最大？求出最大利润．

2．（2023•东莞市校级二模）某移动通讯公司推出两种移动电话计费方式：

方式一：月租费60元，主叫150分钟内不再收费，超过限定时间的部分 a 元/分钟；被叫免费．

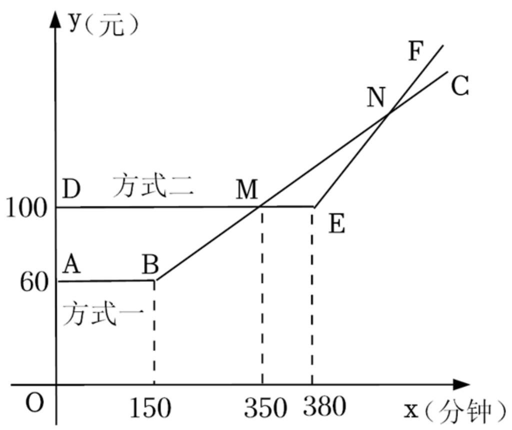
方式二：月租费100元，主叫380分钟内不再收费，超过限定时间的部分0.25元/分钟；被叫免费．

两种方式的月计费 y（单位：元）关于主叫时间 t（单位：分钟）的函数图象如图．

（1）求 a 的值；

（2）结合题意和函数图象，分别求出函数图象中，射线 BC 和射线 EF 对应的月计费 y（单位：元）关于主叫时间 t（单位：分钟）的函数关系式，并写出对应的 t 的取值范围；

（3）通过计算，写出当月主叫通话时间 y（单位：分钟）满足什么条件时，选择方式一省钱．



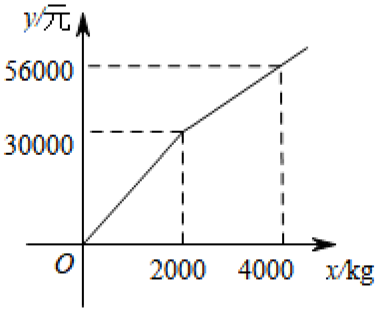
（2）最大利润问题

3．（2023•襄阳）为了振兴乡村经济，我市某镇鼓励广大农户种植山药，并精加工成甲、乙两种产品、某经销商购进甲、乙两种产品，甲种产品进价为 8 元/kg；乙种产品的进货总金额 y（单位：元）与乙种产品进货量 x（单位：kg）之间的关系如图所示．已知甲、乙两种产品的售价分别为 12 元/kg 和 18 元/kg．

（1）求出 $0\leqslant x\leqslant 2000$ 和 $x>2000$ 时，y 与 x 之间的函数关系式；

（2）若该经销商购进甲、乙两种产品共 6000kg，并能全部售出．其中乙种产品的进货量不低于 1600kg，且不高于 4000kg，设销售完甲、乙两种产品所获总利润为 w 元（利润＝销售额－成本），请求出 w（单位：元）与乙种产品进货量 x（单位：kg）之间的函数关系式，并为该经销商设计出获得最大利润的进货方案；

（3）为回馈广大客户，该经销商决定对两种产品进行让利销售．在（2）中获得最大利润的进货方案下，甲、乙两种产品售价分别降低 a 元/kg 和 $2a$ 元/kg，全部售出后所获总利润不低于 15000 元，求 a 的最大值．



4．某农场的一个家电商场为了响应国家家电下乡的号召，准备用不超过 10.57 万元购进 40 台电脑，其中 A 型电脑每台进价 2500 元，B 型电脑每台进价 2800 元，A 型每台售价 3000 元，B 型每台售价 3200 元，预计销售额不低于 12.32 万元．设 A 型电脑购进 x 台、商场的总利润为 y（元）．

（1）请你设计出进货方案；

（2）求出总利润 y（元）与购进 A 型电脑 x（台）的函数关系式，并利用关系式说明哪种方案的利润最大，最大利润是多少元？

（3）行程问题

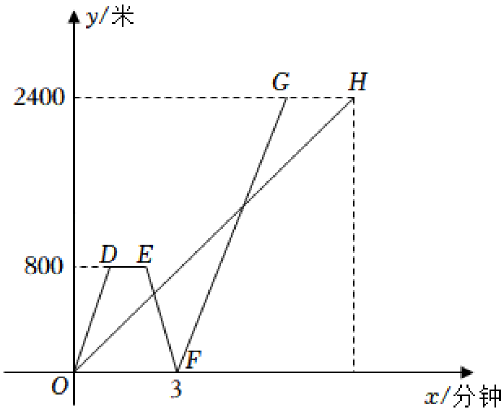
5．（2023•牡丹江）在一条平坦笔直的道路上依次有 A，B，C 三地，甲从 B 地骑电瓶车到 C 地，同时乙从 B 地骑摩托车到 A 地，到达 A 地后因故停留 1 分钟，然后立即掉头（掉头时间忽略不计）按原路原速前往 C 地，结果乙比甲早 2 分钟到达 C 地，两人均匀速运动，如图是两人距 B 地路程 y（米）与时间 x（分钟）之间的函数图象．

请解答下列问题：

（1）填空：甲的速度为 _____米/分钟，乙的速度为 _____米/分钟；

（2）求图象中线段 FG 所在直线表示的 y（米）与时间 x（分钟）之间的函数解析式，并写出自变量 x 的取值范围；

（3）出发多少分钟后，甲乙两人之间的路程相距 600 米？请直接写出答案．

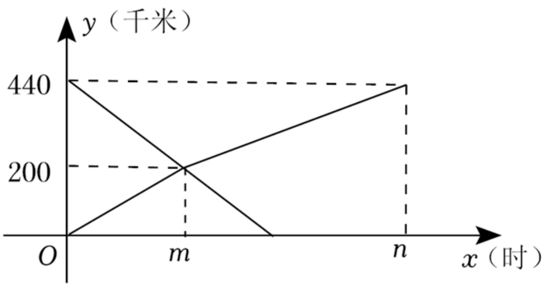


6．（2023•长春）已知 A、B 两地之间有一条长 440 千米的高速公路．甲、乙两车分别从 A、B 两地同时出发，沿此公路相向而行，甲车先以 100 千米/时的速度匀速行驶 200 千米后与乙车相遇，再以另一速度继续匀速行驶 4 小时到达 B 地；乙车匀速行驶至 A 地，两车到达各自的目的地后停止，两车距 A 地的路程 y（千米）与各自的行驶时间 x（时）之间的函数关系如图所示．

（1）m＝_____，n＝_____；

（2）求两车相遇后，甲车距 A 地的路程 y 与 x 之间的函数关系式；

（3）当乙车到达 A 地时，求甲车距 A 地的路程．

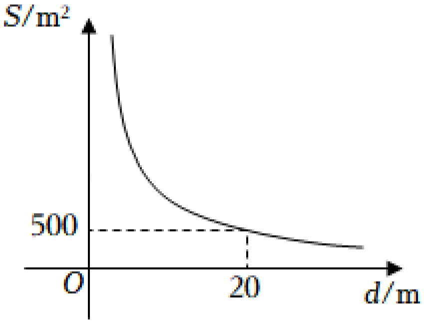


类型二 反比例函数的实际应用

7．（2023•广州）某燃气公司计划在地下修建一个容积为 V（V 为定值，单位：m^3）的圆柱形天然气储存室，储存室的底面积 S（单位：m^2）与其深度 d（单位：m）是反比例函数关系，它的图象如图所示．

（1）求储存室的容积 V 的值；

（2）受地形条件限制，储存室的深度 d 需要满足 $16\leqslant d\leqslant 25$，求储存室的底面积 S 的取值范围．



8．（2023•台州）如图，根据小孔成像的科学原理，当像距（小孔到像的距离）和物高（蜡烛火焰高度）不变时，火焰的像高 y（单位：cm）是物距（小孔到蜡烛的距离）x（单位：cm）的反比例函数，当 $x=6$ 时，$y=2$．

（1）求 y 关于 x 的函数解析式．

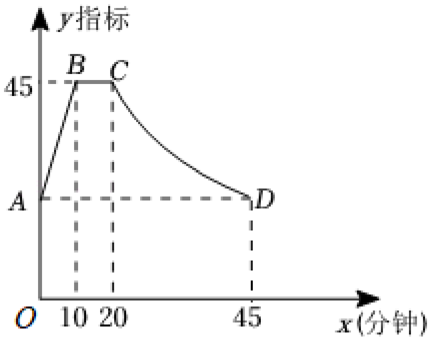
（2）若火焰的像高为 $3cm$，求小孔到蜡烛的距离．

类型三 一次函数与反比例函数的综合运用

9．（2023•卧龙区模拟）通过心理专家实验研究发现：初中生在数学课上听课注意力指标指标）随上课时间的变化而变化，指标达到 36 为认真听讲，学生注意力指标 y 随时间 x（分钟）变化的函数图象如图所示．当 $0\leqslant x<10$ 和 $10\leqslant x<20$ 时，图象是线段，当 $20\leqslant x\leqslant 45$ 时是反比例函数的一部分．

（1）求点 A 对应的指标值．

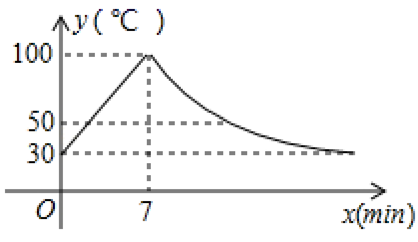
（2）李老师在一节课上讲一道数学综合题需 17 分钟，他能否经过适当安排．使学生在认真听讲时，进行讲解，请说明理由．



10．（2023 秋•东平县校级月考）教室里的饮水机接通电源就进入自动程序，开机加热时每分钟上升 10℃，加热到 100℃停止加热，水温开始下降，此时水温 y（℃）与开机后用时 x（min）成反比例关系，直至水温降至 30℃，饮水机关机，饮水机关机后即刻自动开机，重复上述自动程序．若在水温为 30℃时接通电源，水温 y（℃）与时间 x（min）的关系如图所示：

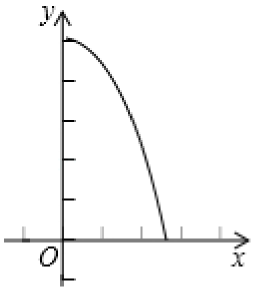
（1）分别写出水温上升和下降阶段 y 与 x 之间的函数关系式并注明自变量的取值范围；

（2）怡萱同学想喝高于 50℃的水，请问她最多需要等待 ____min？

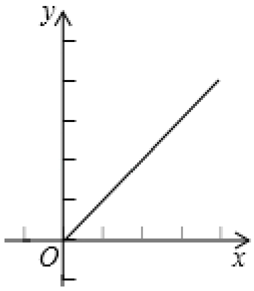


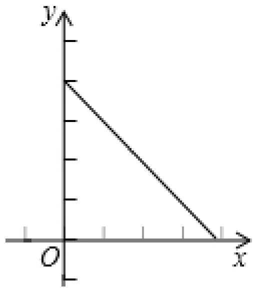
第二部分 专题提优训练

1．（2023•淮安）当矩形面积一定时，下列图象中能表示它的长 y 和宽 x 之间函数关系的是（　　）

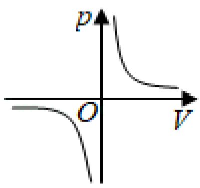
A．

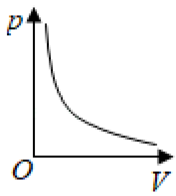
B．

C．

D．

2．（2023•宜昌）某气球内充满了一定质量 m 的气体，当温度不变时，气球内气体的气压 p（单位：kPa）是气体体积 V（单位：m^3）的反比例函数：$p=\frac{m}{V}$，能够反映两个变量 p 和 V 函数关系的图象是（　　）

A．

B．

C．

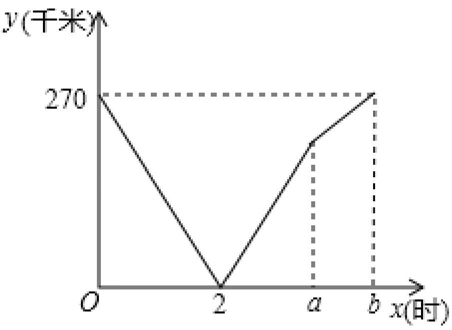
D．

4．（2023•鄂州一模）已知 A、B 两地之间有一条 270 千米的公路，甲、乙两车同时出发，甲车以 60 千米/时的速度沿此公路从 A 地匀速开往 B 地，乙车从 B 地沿此公路匀速开往 A 地，两车分别到达目的地后停止．甲、乙两车相距的路程 y（千米）与甲车的行驶时间 x（时）之间的函数关系如图所示．

（1）$a=$_____，$b=$_____．

（2）求甲、乙两车相遇后 y 与 x 之间的函数关系式．

（3）当甲车到达距 B 地 90 千米处时，求甲、乙两车之间的路程．



4．（2023春•孝感期末）民生超市计划购进甲、乙两种商品共90件进行销售，有关信息如表，

商品	甲	乙
进价（元/件）	60	50
售价（元/件）	100	100（其中一次性销售超过20件时，超出部分每件再让利20元）

设乙种商品有x（件），销售完两种商品的总销售额为y（元）.

（1）求y与x的函数关系式；

（2）若购进乙种商品不超过45件，且该超市购进这两种商品的总进货费用不超过5000元.

①问共有多少种购进方案？

②直接写出总利润的最大值（总利润＝总销售额﹣总进货费用）.

专题 08 一次函数与反比例函数的实际应用（解析版）

类型一 一次函数的实际应用

（1）方案选择问题

1．（2023•内蒙古）某商店决定购进 A、B 两种北京冬奥会纪念品．若购进 A 种纪念品 10 件，B 种纪念品 5 件，需要 1000 元；若购进 A 种纪念品 5 件，B 种纪念品 3 件，需要 550 元．

（1）求购进 A、B 两种纪念品的单价；

（2）若该商店决定拿出 1 万元全部用来购进这两种纪念品，考虑市场需求，要求购进 A 种纪念品的数量不少于 B 种纪念品数量的 6 倍，且购进 B 种纪念品数量不少于 20 件，那么该商店共有几种进货方案？

（3）若销售每件 A 种纪念品可获利润 20 元，每件 B 种纪念品可获利润 30 元，在第（2）问的各种进货方案中，哪一种方案获利最大？求出最大利润．

思路引领：（1）设某商店购进 A 种纪念品每件需 a 元，购进 B 种纪念品每件需 b 元，根据条件建立二元一次方程组求出其解即可；

（2）设某商店购进 A 种纪念品 x 个，购进 B 种纪念品 y 个，根据条件的数量关系建立不等式组求出其解即可；

（3）设总利润为 W 元，根据总利润＝两种商品的利润之和列出函数解析式，再根据函数的性质求值即可．

解：（1）设该商店购进 A 种纪念品每件需 a 元，购进 B 种纪念品每件需 b 元，

由题意，得$\begin{cases}10a+5b=1000\\5a+3b=550\end{cases}$，

解得$\begin{cases}a=50\\b=100\end{cases}$，

∴该商店购进 A 种纪念品每件需 50 元，购进 B 种纪念品每件需 100 元；

（2）设该商店购进 A 种纪念品 x 个，购进 B 种纪念品 y 个，

根据题意，得 $50x+100y=10000$，

由 $50x+100y=10000$ 得 $x=200-2y$，

把 $x=200-2y$ 代入 $x\geqslant 6y$，解得 $y\leqslant 25$，

∵$y\geqslant 20$，

∴$20\leqslant y\leqslant 25$ 且为正整数，

∴y 可取得的正整数值是 20，21，22，23，24，25，

与 y 相对应的 x 可取得的正整数值是 160，158，156，154，152，150，

∴共有 6 种进货方案；

（3）设总利润为 W 元，

则 $W=20x+30y=-10y+4000$，

∵ $-10<0$，

∴W 随 y 的增大而减小，

∴当 $y=20$ 时，W 有最大值，W 最大$=-10\times20+4000=3800$（元），

∴当购进 A 种纪念品 160 件，B 种纪念品 20 件时，可获得最大利润，最大利润是 3800 元.

总结提升：本题考查了一次函数、一元一次不等式解实际问题的运用，解答时求出 A，B 两种纪念品的单价是关键.

2.（2023•东莞市校级二模）某移动通讯公司推出两种移动电话计费方式：

方式一：月租费 60 元，主叫 150 分钟内不再收费，超过限定时间的部分 a 元/分钟；被叫免费.

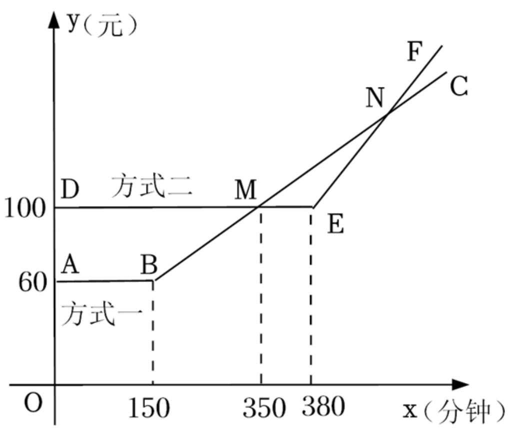
方式二：月租费 100 元，主叫 380 分钟内不再收费，超过限定时间的部分 0.25 元/分钟；被叫免费.

两种方式的月计费 y（单位：元）关于主叫时间 t（单位：分钟）的函数图象如图.

（1）求 a 的值；

（2）结合题意和函数图象，分别求出函数图象中，射线 BC 和射线 EF 对应的月计费 y（单位：元）关于主叫时间 t（单位：分钟）的函数关系式，并写出对应的 t 的取值范围；

（3）通过计算，写出当月主叫通话时间 y（单位：分钟）满足什么条件时，选择方式一省钱.



思路引领：（1）利用待定系数法可求出 BC 的解析式，再根据“方式一”的计费方式，也可求得 BC 的解析式，比较系数即可.

（2）根据两种计费方式可求出射线 BC 和射线 EF 对应的月计费 y（单位：元）关于主叫时间 t（单位：分钟）的函数关系式.

（3）根据（2）所求即可得出结论.

解：（1）由题图可知，M（350，100），

设 BC 所在直线为 $y=kt+b$，

把 B（150，60），M（350，100）代入，

得：$\begin{cases}150k+b=60\\350k+b=100\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}k=\dfrac{1}{5}\\b=30\end{cases}$．

∴$y=\dfrac{1}{5}t+30$（$t\geqslant150$）．

当 $t>150$ 时，$y=a(t-150)+60=at+60-150a$，

∴$a=0.2$．

（2）由（1）可知射线 BC 对应的月计费 y 关于主叫时间 t 的关系式为，

$y_1=0.2t+30$，$t\geqslant150min$，

又∵方式二中超过限定时间的部分 0.25 元/分钟，

∴$y_2=0.25(t-380)+100=0.25t+5$．

∴射线 EF 对应的月计费 y 关于主叫时间 t 的关系式为，

$y_2=0.25t+5$，$t\geqslant380min$．

（3）①$0\leqslant t\leqslant150min$ 时，$y_1=60<y_2=100$；

②$150\leqslant t\leqslant350min$ 时，$y_1=0.2t+30<y_2=100$；

③$t\geqslant500min$ 时，$y_1=0.2t+30<y_2=0.25t+5$．

综上所述，通话时间 $0\leqslant t\leqslant350min$ 或 $t\geqslant500min$ 时，方式一省钱．

总结提升：考查了一元一次不等式的应用，解题关键是要读懂题目的意思，根据题目给出的条件，找出合适的等量关系列出方程，再求解．

（2）最大利润问题

3．（2023•襄阳）为了振兴乡村经济，我市某镇鼓励广大农户种植山药，并精加工成甲、乙两种产品、某经销商购进甲、乙两种产品，甲种产品进价为 8 元/kg；乙种产品的进货总金额 y（单位：元）与乙种产品进货量 x（单位：kg）之间的关系如图所示．已知甲、乙两种产品的售价分别为 12 元/kg 和 18 元/kg．

（1）求出 $0\leqslant x\leqslant2000$ 和 $x>2000$ 时，y 与 x 之间的函数关系式；

（2）若该经销商购进甲、乙两种产品共 $6000kg$，并能全部售出．其中乙种产品的进货量不低于 $1600kg$，且不高于 $4000kg$，设销售完甲、乙两种产品所获总利润为 w 元（利润＝销售额－成本），请求出 w（单位：元）与乙种产品进货量 x（单位：kg）之间的函数关系式，并为该经销商设计出获得最大利润的进货方案；

（3）为回馈广大客户，该经销商决定对两种产品进行让利销售．在（2）中获得最大利润的进货方案下，甲、乙两种产品售价分别降低 a 元/kg 和 $2a$ 元/kg，全部售出后所获总利润不低于 15000 元，求 a 的最大值．