圆锥曲线选填练习

一．选择题（共 8 小题）

1．已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_2 的直线与椭圆交于 A、B 两点，若△F_1AB是以 A 为直角顶点的等腰直角三角形，则离心率为 （　　）

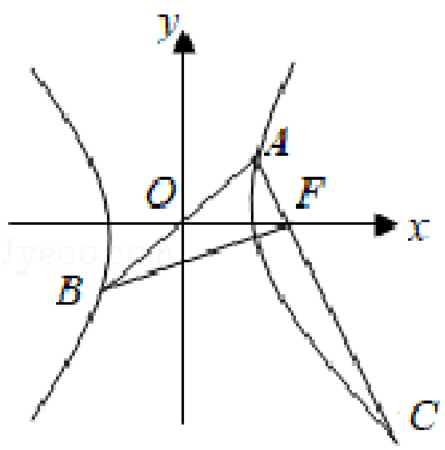
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $2-\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{5}-2$　　D. $\sqrt{6}-\sqrt{3}$

2．已知椭圆 $x^2+\frac{1}{2}y^2=a^2$（a＞0）与 A（2，1），B（4，3）为端点的线段没有公共点，则 a 的取值范围是（　　）

A. $0<a<\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　B. $0<a<\frac{3\sqrt{2}}{2}$或$a>\frac{\sqrt{82}}{2}$

C. $a<\frac{3\sqrt{2}}{2}$或$a>\frac{\sqrt{82}}{2}$　　D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}<a<\frac{\sqrt{82}}{2}$

3．如图所示， A，B，C 是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）上的三个点，AB 经过原点 O，AC经过右焦点 F，若 BF⊥AC且|BF|=|CF|，则该双曲线的离心率是（　　）



A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$　　B. $\sqrt{10}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 3

4．已知双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$，F 为其右焦点，$A_1$，$A_2$ 是实轴的两端点，设 P 为双曲线上不同于 A_1，A_2 的任意一点，直线 A_1P，A_2P 与直线 x=a 分别交于两点 M，N，若$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0$，则 a 的值为（　　）

A. $\frac{16}{9}$　　B. $\frac{9}{5}$　　C. $\frac{25}{9}$　　D. $\frac{16}{5}$

5．若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的一个焦点到一条渐近线的距离等于焦距的$\frac{1}{4}$，则该双曲线的离心率为（　　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\frac{4\sqrt{15}}{15}$

6．已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$上的一点到其左、右焦点的距离之差为4，若已知抛物线$y=ax^2$上的两点A（x_1，y_1），B（x_2，y_2）关于直线$y=x+m$对称，且$x_1x_2=-\frac{1}{2}$，则m的值为（　　）

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{5}{4}$　　D. $\frac{5}{2}$

7．设F是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$的右焦点，双曲线两条渐近线分别为$l_1$，$l_2$，过F作直线$l_1$的垂线，分别交$l_1$，$l_2$于A、B两点，且向量$\overrightarrow{BF}$与$\overrightarrow{FA}$同向．若|OA|，|AB|，|OB|成等差数列，则双曲线离心率e的大小为（　　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{7}}{2}$　　D. 2

8．已知F_1、F_2是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的左、右焦点，若在双曲线上的点P满足$\angle F_1PF_2=60°$，且$|OP|=\sqrt{7}a$（O为坐标原点），则该双曲线的离心率是（　　）

A. 2　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

二．填空题（共7小题）

9．已知Q为椭圆C：$\frac{x^2}{3}+y^2=1$上一动点，且Q在y轴的右侧，点M（2，0），线段QM的垂直平分线交y轴于点N，则当四边形OQMN的面积取最小值时，点Q的横坐标为_______．

10．已知点F（1，0）是抛物线C：$y^2=mx$的焦点，经过点A（－1，0）的直线l与抛物线C交于两点M，N，若∠MFN是锐角，且直线l与双曲线$4x^2+ny^2=1$只有一个公共点，则双曲线离心率的取值范围是_______．

11．过双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左焦点F（$-c$，0）作圆 $x^2+y^2=a^2$ 的切线，切点为E，延长FE交抛物线 $y^2=4cx$ 于点P，若E为线段FP的中点，则双曲线的离心率为_______.

12．设直线l过点P（0，3），和椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$交于A、B两点（A在B上方），试求$\frac{|AP|}{|PB|}$的取值范围_______.

13．直线l过椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$的左焦点F，且与椭圆相交于P、Q两点，M为PQ的中点，O为原点．若△FMO是以OF为底边的等腰三角形，则直线l的方程为_______.

14．椭圆Γ：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左右焦点分别为$F_1$，$F_2$，焦距为2c，若直线$y=\sqrt{3}(x+c)$与椭圆Γ的一个交点M满足$\angle MF_1F_2=2\angle MF_2F_1$，则该椭圆的离心率等于_______.

15．椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{5}=1$（a为定值，且$a>\sqrt{5}$）的左焦点为F，直线$x=m$与椭圆交于点A，B，△FAB的周长的最大值是12，则该椭圆的离心率是_______.

一．选择题（共 8 小题）

1．已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_2 的直线与椭圆交于 A、B 两点，若△F_1AB是以 A 为直角顶点的等腰直角三角形，则离心率为（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $2-\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{5}-2$　　D. $\sqrt{6}-\sqrt{3}$

【分析】设$|F_1F_2|=2c$，$|AF_1|=m$，若△ABF_1构成以 A 为直角顶点的等腰直角三角形，则$|AB|=|AF_1|=m$，$|BF_1|=\sqrt{2}m$，再由椭圆的定义和周长的求法，可得 m，再由勾股定理，可得 a，c 的方程，求得$\frac{c^2}{a^2}$，开方得答案．

【解答】解：如图，设$|F_1F_2|=2c$，$|AF_1|=m$，

若△ABF_1构成以 A 为直角顶点的等腰直角三角形，

则$|AB|=|AF_1|=m$，$|BF_1|=\sqrt{2}m$，

由椭圆的定义可得△ABF_1的周长为 4a，

即有 $4a=2m+\sqrt{2}m$，即 $m=2(2-\sqrt{2})a$，

则$|AF_2|=2a-m=(2\sqrt{2}-2)a$，

在直角三角形 AF_1F_2 中，

$|F_1F_2|^2=|AF_1|^2+|AF_2|^2$，

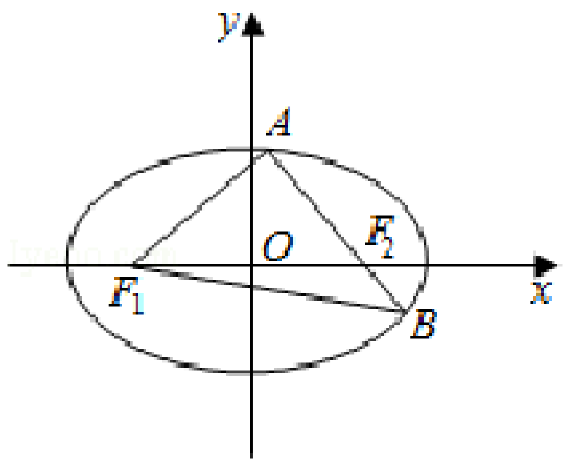
即 $4c^2=4(2-\sqrt{2})^2a^2+4(\sqrt{2}-1)^2a^2$，

$\therefore c^2=(9-6\sqrt{2})a^2$，

则 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=9-6\sqrt{2}=9-2\sqrt{18}$，

$\therefore e=\sqrt{6}-\sqrt{3}$．

故选：D．



【点评】本题考查椭圆的定义、方程和性质，主要考查离心率的求法，同时考查勾股定理的运用，灵活运用椭圆的定义是解题的关键，是中档题.

2．已知椭圆 $x^2+\frac{1}{2}y^2=a^2$（a＞0）与 A（2，1），B（4，3）为端点的线段没有公共点，则 a 的取值范围是（　　）

A. $0<a<\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　B. $0<a<\frac{3\sqrt{2}}{2}$或$a>\frac{\sqrt{82}}{2}$

C. $a<\frac{3\sqrt{2}}{2}$或$a>\frac{\sqrt{82}}{2}$　　D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}<a<\frac{\sqrt{82}}{2}$

【分析】因为椭圆与线段无公共点，所以线段 AB在椭圆的内部或在椭圆的外部，即由“A，B 两点同在椭圆内或椭圆外”求解.

【解答】解：根据题意有：A，B 两点同在椭圆内或椭圆外

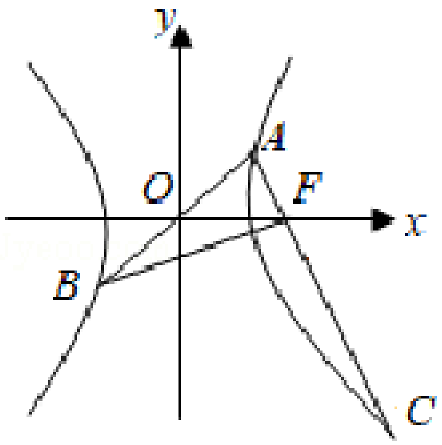
$$\therefore\begin{cases}4+\frac{1}{2}-a^2>0\\16+\frac{9}{2}-a^2>0\end{cases}或\begin{cases}4+\frac{1}{2}-a^2<0\\16+\frac{9}{2}-a^2<0\end{cases}$$

$$\therefore 0<a<\frac{3\sqrt{2}}{2}或a>\frac{\sqrt{82}}{2}$$

故选：B.

【点评】本题主要通过直线与椭圆的位置关系，来考查点与椭圆的位置关系．当点(x_0,y_0)在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$内，则有$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}<1$，点$(x_0,y_0)$在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$外，则有$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}>1$

3．如图所示，A，B，C 是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）上的三个点，AB 经过原点 O，AC经过右焦点 F，若 BF⊥AC且|BF|=|CF|，则该双曲线的离心率是（　　）



A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$　　B. $\sqrt{10}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 3

【分析】运用直角三角形斜边上中线等于斜边的一半，求得 A的坐标，由对称得 B的坐标，由于 BF⊥AC且|BF|=|CF|，

求得 C的坐标，代入双曲线方程，结合 a，b，c 的关系和离心率公式，化简整理成离心率 e 的方程，代入选项即可得到答案．

【解答】解：由题意可得在直角三角形 ABF中，

OF 为斜边 AB上的中线，即有|AB|=2|OA|=2|OF|=2c，

设 A（m，n），则 $m^2+n^2=c^2$，

又$\frac{m^2}{a^2}-\frac{n^2}{b^2}=1$，

解得 $m=\frac{a\sqrt{c^2+b^2}}{c}$，$n=\frac{b^2}{c}$，

即有 A（$\frac{a\sqrt{c^2+b^2}}{c}$，$\frac{b^2}{c}$），B（$-\frac{a\sqrt{c^2+b^2}}{c}$，$-\frac{b^2}{c}$），

又 F（c，0），

由于 BF⊥AC且|BF|=|CF|，

可设 C（x，y），即有$\frac{y}{x-c}$□$\frac{b^2}{c^2+a\sqrt{c^2+b^2}}=-1$，

又 $(c+\frac{a\sqrt{c^2+b^2}}{c})^2+(\frac{b^2}{c})^2=(x-c)^2+y^2$，

可得 $x=\frac{b^2+c^2}{c}$，$y=-\frac{a\sqrt{c^2+b^2}+c^2}{c}$，

将 C（$\frac{b^2+c^2}{c}$，$-\frac{a\sqrt{c^2+b^2}+c^2}{c}$）代入双曲线方程，可得

$\frac{(b^2+c^2)^2}{c^2a^2}-\frac{(a\sqrt{c^2+b^2}+c^2)^2}{c^2b^2}=1$，

化简可得 $\sqrt{c^2+b^2}(b^2-a^2)=a^3$，

由 $b^2=c^2-a^2$，$e=\frac{c}{a}$，

可得 $(2e^2-1)(e^2-2)^2=1$，

对照选项，代入检验可得 $e=\frac{\sqrt{10}}{2}$成立．

另解：设双曲线的另一个焦点为 E，

令 $|BF|=|CF|=|AE|=m$，$|AF|=n$，

由双曲线的定义有，$|CE|-|CF|=|AE|-|AF|=2a$，

在直角三角形 EAC中，$m^2+(m+n)^2=(m+2a)^2$，

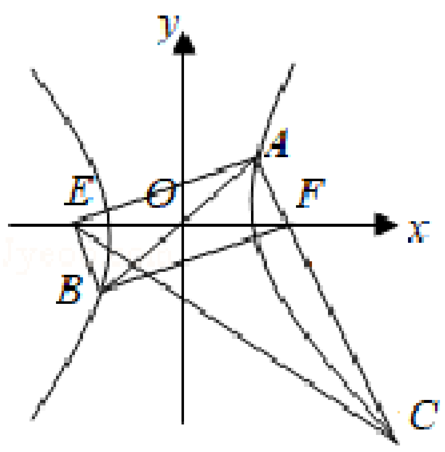
代入 $2a=m-n$，化简可得 $m=3n$，

又 $m-n=2a$ 得 $n=a$，$m=3a$，

在直角三角形 EAF中，$m^2+n^2=(2c)^2$，

即为 $9a^2+a^2=4c^2$，可得 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

故选：A.



【点评】本题考查双曲线的方程和性质，主要考查双曲线的 a，b，c 的关系和离心率的求法，注意运用点在双曲线上满足方程，同时注意选择题的解法：代

入检验，属于难题．

4．已知双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$，F为其右焦点，$A_1$，$A_2$是实轴的两端点，设P为双曲线上不同于$A_1$，$A_2$的任意一点，直线$A_1P$，$A_2P$与直线x=a分别交于两点M，N，若$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0$，则a的值为（　　）

A．$\frac{16}{9}$　　B．$\frac{9}{5}$　　C．$\frac{25}{9}$　　D．$\frac{16}{5}$

【分析】双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$，右焦点F（5.0），$A_1$（﹣3，0），$A_2$（3，0），设P（x，y），M（a，m），N（a，n），由P，A_1，M三点共线，知$\frac{m}{a+3}=\frac{y}{x+3}$，故$m=\frac{y(a+3)}{x+3}$，由P，$A_2$，N三点共线，知$\frac{n}{a-3}=\frac{y}{x-3}$，故$n=\frac{y(a-3)}{x-3}$，由$\overrightarrow{FM}=(a-5,\ \frac{y(a+3)}{x+3})$，$\overrightarrow{FN}=(a-5,\ \frac{y(a-3)}{x-3})$和$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0$，能求出a的值．

【解答】解：∵双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$，右焦点F（5，0），$A_1$（﹣3，0），$A_2$（3，0），

设P（x，y），M（a，m），N（a，n），

∵P，A_1，M三点共线

$\frac{m}{a+3}=\frac{y}{x+3}$，

∴$m=\frac{y(a+3)}{x+3}$，

∵P，A_2，N三点共线，

∴$\frac{n}{a-3}=\frac{y}{x-3}$，

∴$n=\frac{y(a-3)}{x-3}$，

∵$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$，

∴$\frac{(x^2-9)}{9}=\frac{y^2}{16}$，

$\therefore \frac{y^2}{(x^2-9)}=\frac{16}{9}$,

$\overrightarrow{FM}=(a-5, \frac{y(a+3)}{x+3})$，$\overrightarrow{FN}=(a-5, \frac{y(a-3)}{x-3})$,

$\therefore \overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=(a-5)^2+\frac{y^2(a^2-9)}{x^2-9}=(a-5)^2+\frac{16(a^2-9)}{9}$,

$\because \overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0$,

$\therefore (a-5)^2+\frac{16(a^2-9)}{9}=0$,

$\therefore 25a^2-90a+81=0$,

$\therefore a=\frac{9}{5}$.

故选：B.

【点评】本题考查双曲线的性质和应用，考查运算求解能力，推理论证能力；考查化归与转化思想．对数学思维的要求比较高，有一定的探索性．解题时要认真审题，注意向量知识的合理运用．

5．若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的一个焦点到一条渐近线的距离等于焦距的$\frac{1}{4}$，则该双曲线的离心率为（　　）

A．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C．$\sqrt{5}$　　D．$\frac{4\sqrt{15}}{15}$

【分析】因为双曲线即关于两条坐标轴对称，又关于原点对称，所以任意一个焦点到两条渐近线的距离都相等，所以不妨利用点到直线的距离公式求（c，0）到 $y=\frac{b}{a}x$ 的距离，再令该距离等于焦距的$\frac{1}{4}$，就可得到含 b，c 的齐次式，再把 b 用 a，c 表示，利用 $e=\frac{c}{a}$即可求出离心率．

【解答】解：双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$的焦点坐标为（c，0）（﹣c，0），

渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$

求（c，0）到 $y=\frac{b}{a}x$ 的距离，$d=\frac{|bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{bc}{\sqrt{c^2}}=b$，

又∵焦点到一条渐近线的距离等于焦距的$\frac{1}{4}$，

∴$b=\frac{1}{4}\times 2c$，两边平方，得 $4b^2=c^2$，即 4（c^2-a^2）$=c^2$，

∴$3c^2=4a^2$，$\frac{c^2}{a^2}=\frac{4}{3}$，即 $e^2=\frac{4}{3}$，$e=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

故选：B.

【点评】本题主要考查点到直线的距离公式的应用，以和双曲线离心率的求法，求离心率关键是找到 a，c 的齐次式．

6．已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$上的一点到其左、右焦点的距离之差为 4，若已知抛物线 $y=ax^2$ 上的两点 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2）关于直线 $y=x+m$ 对称，且 $x_1x_2=-\frac{1}{2}$，则 m 的值为（　　）

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{5}{4}$　　D. $\frac{5}{2}$

【分析】$y_1=2x_1^2$，$y_2=2x_2^2$，A 点坐标是（x_1，$2x_1^2$），B 点坐标是（x_2，$2x_2^2$）　A，B 的中点坐标是（$\frac{x_1+x_2}{2}$，$\frac{2x_1^2+2x_2^2}{2}$）　因为 A，B 关于直线 $y=x+m$ 对称，所以 A，B 的中点在直线上，且 AB 与直线垂直 $\frac{2x_1^2+2x_2^2}{2}=\frac{x_1+x_2}{2}+m$，由此能求得 m．

【解答】解：$y_1=2x_1^2$，$y_2=2x_2^2$，

A 点坐标是（x_1，$2x_1^2$），B 点坐标是（x_2，$2x_2^2$），

A，B 的中点坐标是（$\frac{x_1+x_2}{2}$，$\frac{2x_1^2+2x_2^2}{2}$），

因为 A，B 关于直线 $y=x+m$ 对称，

A，B的中点在直线上，

且AB与直线垂直 $\frac{2x_1^2+2x_2^2}{2}=\frac{x_1+x_2}{2}+m$，$\frac{2x_2^2-2x_1^2}{x_2-x_1}=-1$，

$x_1^2+x_2^2=\frac{x_1+x_2}{2}+m$，$x_2+x_1=-\frac{1}{2}$，

因为 $x_1x_2=-\frac{1}{2}$，

所以 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{5}{4}$，

代入得 $\frac{5}{4}=-\frac{1}{4}+m$，求得 $m=\frac{3}{2}$.

故选：B.

【点评】本题主要考查直线与圆锥曲线的综合应用能力，具体涉和到轨迹方程的求法和直线与椭圆的相关知识，解题时要注意合理地进行等价转化.

7．设F是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$($a>0$，$b>0$)的右焦点，双曲线两条渐近线分别为$l_1$，$l_2$，过F作直线 l_1 的垂线，分别交l_1，l_2于A、B两点，且向量$\overrightarrow{BF}$与$\overrightarrow{FA}$同向．若|OA|，|AB|，|OB|成等差数列，则双曲线离心率e的大小为（　　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{7}}{2}$　　D. 2

【分析】由勾股定理得出直角三角形的2个直角边的长度比，联想到渐近线的夹角，求出渐近线的斜率，进而求出离心率．

【解答】解：不妨设OA的倾斜角为锐角

∵向量$\overrightarrow{BF}$与$\overrightarrow{FA}$同向，

∴渐近线 l_1 的倾斜角为（0，$\frac{\pi}{4}$），

∴渐近线 l_1 斜率为：$k=\frac{b}{a}<1$，

∴$\frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2-a^2}{a^2}=e^2-1<1$，

∴$1<e^2<2$