空间向量与立体几何-清北答案解析

模块1：向量法证明空间位置关系

考点：向量法证明空间位置关系

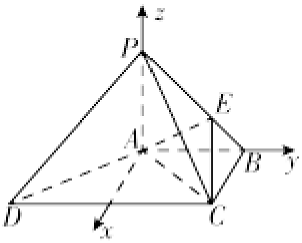
例题1

1

【答案】见解析

【解析】证明：证法一：

以A为原点、AB、AP所在直线分别为y轴、z轴，建立如图所示的空间直角坐标系．



设$PA=AB=BC=a$，则$A\left(0,0,0\right)$，$B\left(0,a,0\right)$，$C\left(a,a,0\right)$，$P\left(0,0,a\right)$，$E\left(0,\dfrac{2a}{3},\dfrac{a}{3}\right)$．

设$D\left(a,y,0\right)$，则$\overrightarrow{PC}=\left(a,a,-a\right)$，$\overrightarrow{AD}=\left(a,y,0\right)$，

$\because PC\perp AD$，

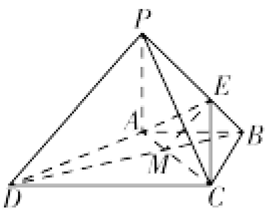
$\therefore \overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AD}=a^2+ay=0$，解得$y=-a$；

则有$D\left(a,-a,0\right)$，$\overrightarrow{PD}=\left(a,-a,-a\right)$，

$\overrightarrow{EA}=\left(0,-\dfrac{2a}{3},-\dfrac{a}{3}\right)$，$\overrightarrow{EC}=\left(a,\dfrac{a}{3},-\dfrac{a}{3}\right)$，

$\because \overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC}$，$PD\not\subset$平面$EAC$，$\therefore PD//$平面$EAC$．

证法二：



$\because AB=BC$，$AB\perp BC$，$\therefore\triangle ABC$是等腰直角三角形，

$PA\perp$平面$ABCD\Rightarrow PA\perp AD$，又$AD\perp PC$，$\therefore AD\perp$平面$PAC$，

$\therefore AD\perp AC$．又$AB//DC$，$\therefore\triangle DAC$也是等腰直角三角形，

$\therefore DC=\sqrt{2}AC=2AB$．如图，连接$BD$，交$AC$于点$M$，

则$\dfrac{DM}{MB}=\dfrac{DC}{AB}=2$．

在$\triangle BPD$中，$\dfrac{PE}{EB}=\dfrac{DM}{MB}=2$，

$\therefore PD//EM$．又$PD\not\subset$平面EAC，$EM\subset$平面EAC，

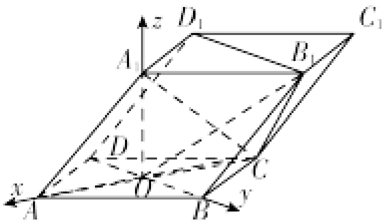
$\therefore PD//$平面EAC．

例题2

1

【答案】见解析

【解析】由题设易知OA，OB，OA_1两两垂直，以O为原点建立空间直角坐标系，如图．



$\because AB=AA_1=\sqrt{2}$，$\therefore OA=OB=OA_1=1$，

$\therefore$ $A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(-1,0,0)$，$D(0,-1,0)$，$A_1(0,0,1)$；　$\because \overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}$，$\therefore$ $B_1(-1,1,1)$，

$\because \overrightarrow{A_1C}=(-1,0,-1)$，$\overrightarrow{BD}=(0,-2,0)$，$\overrightarrow{BB_1}=(-1,0,1)$，　$\therefore \overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{BD}=0$　，$\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0$；

$\therefore A_1C\perp BD$，$A_1C\perp BB_1$，$BD\cap BB_1=B$，　$\therefore A_1C\perp$ 平面BB_1D_1D．

模块2：向量法求角度

H 考点：向量法求空间角

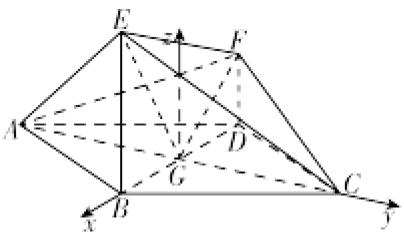
例题3

1

【答案】$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】解：连接BD，设BD与AC交于点G，连接EG，FG，EF．

如图，以G为坐标原点，分别以$\overrightarrow{GB}$，$\overrightarrow{GC}$，垂直于平面$ABCD$向上的方向为x轴，y轴，z轴的正方向，建立空间直角坐标系$G-xyz$．



在菱形$ABCD$中，不妨设$GB=1$．

由$\angle ABC=120^\circ$，可得$AG=GC=\sqrt{3}$．

可得$A\left(0,-\sqrt{3},0\right)$，$C\left(0,\sqrt{3},0\right)$，

由$BE\perp$平面$ABCD$，$AB=BC$，可知$AE=EC$.

又$AE\perp EC$，所以$EG=\sqrt{3}$，且$EG\perp AC$.

在$\mathrm{Rt}\triangle EBG$中，可得$BE=\sqrt{2}$，故$DF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

所以$E\left(1,0,\sqrt{2}\right)$，$F\left(-1,0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

所以$\overrightarrow{AE}=\left(1,\sqrt{3},\sqrt{2}\right)$，$\overrightarrow{CF}=\left(-1,-\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

故$\cos\left\langle\overrightarrow{AE},\overrightarrow{CF}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CF}}{\left|\overrightarrow{AE}\right|\left|\overrightarrow{CF}\right|}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

所以直线AE与直线CF所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

例题4

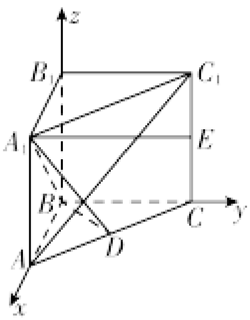
1

【答案】$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】在矩形ACC_1A_1中，$\because AC_1\perp$平面A_1BD，$\therefore AC_1\perp A_1D$，可知$\triangle A_1AD\sim\triangle ACC_1$，

则$\dfrac{AC}{AA_1}=\dfrac{CC_1}{AD}=\dfrac{CC_1}{\frac{1}{2}AC}$，故$AC=\sqrt{2}AA_1$，从而$AB=BC$.

以点B为坐标原点，BA为x轴，BC为y轴，BB_1为z轴，建立如图所示的空间直角坐标系，不妨设$AB=2$，



则$A\left(2,0,0\right)$，$A_1\left(2,0,2\right)$，$C_1\left(0,2,2\right)$，$E\left(0,2,1\right)$，

可得$\overrightarrow{AC_1}=\left(-2,2,2\right)$，$\overrightarrow{A_1E}=\left(-2,2,-1\right)$.

由题意可知$\overrightarrow{AC_1}$即为平面A_1BD的一个法向量，

设A_1E与平面A_1BD所成的角为θ，

则$\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{A_1E}\rangle\right|=\dfrac{\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{A_1E}}{\left|\overrightarrow{AC_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_1E}\right|}=\dfrac{6}{2\sqrt{3}\times3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

达标检测1

1

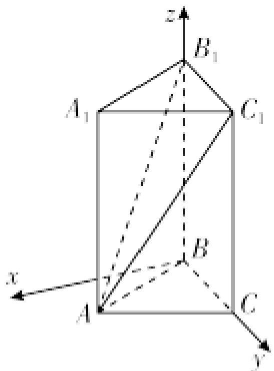
【答案】A

【解析】如图，以B为坐标原点，以与BC垂直的直线为x轴，BC所在直线为y轴，BB_1所在直线为z轴建立空间直角坐标系，则$A(\sqrt{3},1,0),B\left(0,0,0\right),B_1\left(0,0,3\right),C_1\left(0,2,3\right)$，

$\overrightarrow{AB_1}=(-\sqrt{3},-1,3),\overrightarrow{B_1C_1}=(0,2,0),\overrightarrow{BB_1}=(0,0,3)$． 设平面$AB_1C_1$的一个法向量为$\overrightarrow{n}=(x,y,z)$

，则$\begin{cases}\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{n}=0\\\overrightarrow{B_1C_1}\cdot\overrightarrow{n}=0\end{cases}$即$\begin{cases}-\sqrt{3}x-y+3z=0\\2y=0\end{cases}$， 取$z=1$，则$x=\sqrt{3}$，得$\overrightarrow{n}=\left(\sqrt{3},0,1\right)$，

$\because\cos\langle\overrightarrow{BB_1},\overrightarrow{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{BB_1}\right|\left|\overrightarrow{n}\right|}=\dfrac{3}{3\times2}=\dfrac{1}{2}$， $\therefore BB_1$与平面AB_1C_1所成的角的正弦值为$\dfrac{1}{2}$， $\therefore BB_1$与平面AB_1C_1所成的角为$\dfrac{\pi}{6}$， 故选A.



例题5

1

【答案】$-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

【解析】取CB的中点D，连接OD，

如图，分别以OE，OD，OA为x，y，z轴建立空间直角坐标系，

则$A\left(0,0,\sqrt{3}a\right)$，$E\left(a,0,0\right)$，$B\left(2,2\sqrt{3}-\sqrt{3}a,0\right)$，

$\overrightarrow{AE}=\left(a,0,-\sqrt{3}a\right)$，$\overrightarrow{EB}=\left(2-a,2\sqrt{3}-\sqrt{3}a,0\right)$，

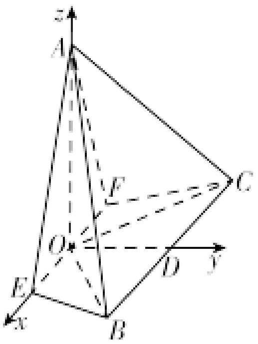
平面AEF的法向量为$\overrightarrow{n}_1=(0,1,0)$，

设平面AEB的法向量$\overrightarrow{n}_2=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}ax-\sqrt{3}az=0\\(2-a)\,x+\sqrt{3}\,(2-a)\,y=0\end{cases}$，

所以$\overrightarrow{n}_2=\left(\sqrt{3},-1,1\right)$，

所以二面角$F-AE-B$的余弦值$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{n}_1\cdot\overrightarrow{n}_2}{\left|\overrightarrow{n}_1\right|\left|\overrightarrow{n}_2\right|}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.



例题6

1

【答案】$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

【解析】解法一：如图1，取D_1为A_1B_1的中点，连接DD_1，则$DD_1//AA_1//CC_1$.

又由(I)知$CD\perp$平面A_1ABB_1．故$CD\perp A_1D,CD\perp D_1D$，所以$\angle A_1DD_1$为所求的二面角$A_1-CD-C_1$的平面角．因$A_1D$为$A_1C$在面$A_1ABB_1$中的射影，又已知$AB_1\perp A_1C$由三垂线定理的逆定理得$AB_1\perp A_1D$．从而$\angle A_1AB_1$、$\angle A_1DA$都与$\angle B_1AB$互余．因此$\angle A_1AB_1=\angle A_1DA$，所以$\mathrm{Rt}\triangle A_1AD\sim\mathrm{Rt}\triangle B_1A_1A$．因此$AA_1:AD=A_1B_1:AA_1$，即$AA_1{}^2=AD\cdot A_1B_1=8$，得$AA_1=2\sqrt{2}$，从而$A_1D=\sqrt{AA_1{}^2+AD^2}=2\sqrt{3}$．所以$\mathrm{Rt}\triangle A_1D_1D$中，

$\cos\angle A_1DD_1=\dfrac{DD_1}{A_1D}=\dfrac{AA_1}{A_1D}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

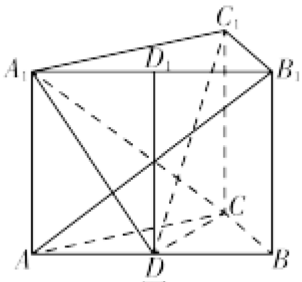


图1

解法二：如图2，过D作$DD_1//AA_1$交A_1B_1于D_1，在直三棱柱中，有DB,DC,DD_1两两垂直，以D为原点，射线DB,DC,DD_1分别为x轴、y轴、z轴的正半轴建立空间直角坐标系$D-xyz$.

设直三棱柱的高为h，则$A(-2,0,0),A_1(-2,0,h),B_1(2,0,h),C\left(0,\sqrt{5},0\right),C_1\left(0,\sqrt{5},h\right)$，从而

$\overrightarrow{AB_1}=(4,0,h)$，$\overrightarrow{A_1C}=\left(2,\sqrt{5},-h\right)$

由$AB_1\perp A_1C$，可得$8-h^2=0,h=2\sqrt{2}$，故$\overrightarrow{DA_1}=\left(-2,0,2\sqrt{2}\right)$，$\overrightarrow{CC_1}=\left(0,0,2\sqrt{2}\right)$，

$\overrightarrow{DC}=\left(0,\sqrt{5},0\right)$

设平面A_1CD的法向量为$\overrightarrow{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则有$\overrightarrow{m}\perp\overrightarrow{DC},\overrightarrow{m}\perp\overrightarrow{DA_1}$

所以$\vec{m}\cdot\overrightarrow{DC}=0$且$\vec{m}\cdot\overrightarrow{DA_1}=0$，即$\begin{cases}\sqrt{5}y_1=0\\-2x_1+2\sqrt{2}x_1=0\end{cases}$，取$z_1=1$，则$\vec{m}=\left(\sqrt{2},0,1\right)$

设平面C_1CD的法向量为$\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则$\vec{n}\perp\overrightarrow{DC},\vec{n}\perp\overrightarrow{CC_1}$，即$\sqrt{5}y_2=0$且$2\sqrt{2}z_2=0$，取$x_2=1$，得$\vec{n}=(1,0,0)$，

所以$\cos\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+1}\times1}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，所以二面角$A_1-CD-C_1$的平面角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

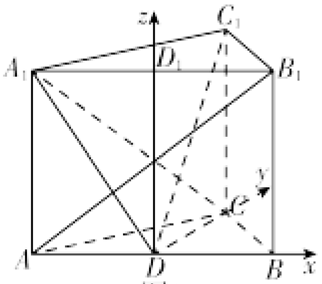


图2

模块3：向量法求距离

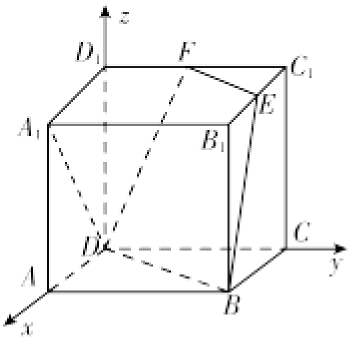
考点：向量法求点面距离

例题7

1

【答案】1

【解析】如图，建立空间直角坐标系，则$\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{DF}=(0,\dfrac{1}{2},1)$，$\overrightarrow{DA_1}=(1,0,1)$. 设平面$DBEF$的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，则有$\vec{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0$，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{DF}=0$，即$x+y=0$，$\dfrac{1}{2}y+z=0$，令$x=1$，得$y=-1$，$z=\dfrac{1}{2}$，所以$\vec{n}=\left(1,-1,\dfrac{1}{2}\right)$，则$A_1$到平面$DBEF$的距离$h=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{DA_1}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=1$.



例题8

1

【答案】点N到平面MBD的距离$d=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

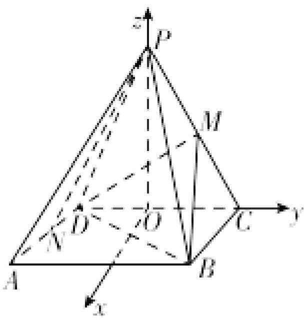
【解析】解：因为$\overrightarrow{BD}=(-2,-2,0)$，$\overrightarrow{BM}=\left(-2,-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

设平面MBD的一个法向量为$\overrightarrow{m}=(x,y,z)$，

由$\begin{cases}\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{BD}=0\\ \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{BM}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}-2x-2y=0\\ -2x-\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\end{cases}$，取$y=-1$，得$x=1$，$z=\sqrt{3}$.

所以$\overrightarrow{m}=\left(1,-1,\sqrt{3}\right)$，又$\overrightarrow{DN}=(1,0,0)$，

所以点N到平面MBD的距离$d=\dfrac{\left|\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{DN}\right|}{\left|\overrightarrow{m}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.



例题9

1

【答案】见解析

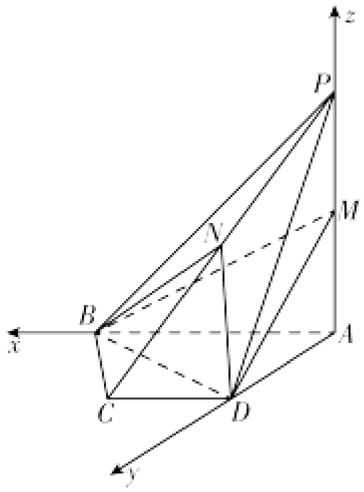
【解析】解：设点N在平面BDM内的射影为点$H(a,b,c)$，则$\overrightarrow{NH}=\left(a-\dfrac{1}{2},b-1,c-1\right)$，

N到平面BDM的距离$d=\dfrac{\left|\overrightarrow{DN}\cdot\overrightarrow{p}\right|}{\left|\overrightarrow{p}\right|}=\dfrac{|\frac{1}{2}-1+2|}{\sqrt{6}}=\dfrac{3}{2\sqrt{6}}$，

$\begin{cases}\overrightarrow{NH}\cdot\overrightarrow{DM}=-2b+2+c-1=0\\ \overrightarrow{NH}\cdot\overrightarrow{DB}=2a-1-2b+2=0\\ \left|\overrightarrow{NH}\right|=\sqrt{(a-\frac{1}{2})^2+(b-1)^2+(c-1)^2}=\frac{3}{2\sqrt{6}}\end{cases}$，解得$a=\dfrac{1}{4}$，$b=\dfrac{3}{4}$，$c=\dfrac{1}{2}$，或$a=\dfrac{3}{4}$，$b=\dfrac{5}{4}$，

$c=\dfrac{3}{2}$（舍），

$\therefore$线段HA的长为$\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{14}}{4}$.



达标检测2

1

【答案】D

【解析】解：$\because$三棱锥$P-ABC$中，PA，PB，PC两两垂直，

$\therefore$以P为原点，PA所在直线为x轴，PB所在直线为y轴，PC所在直线为z轴，建立空间直角坐标系，

$\because PA=1$，$PB=2$，$PC=3$，

$\therefore P(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C(0,0,3)$，

$\overrightarrow{CP}=(0,0,-3)$，$\overrightarrow{CA}=(1,0,-3)$，$\overrightarrow{CB}=(0,2,-3)$，

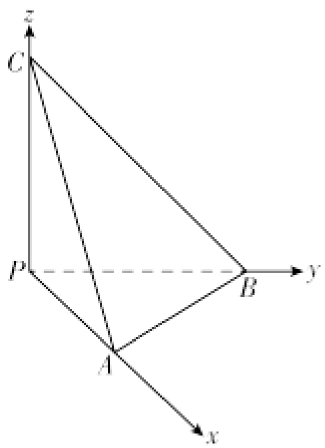
设平面ABC的法向量$\vec{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CA}=x-3z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CB}=2y-3z=0\end{cases}$，取$z=2$，得$\vec{n}=(6,3,2)$，

$\therefore$点P到平面ABC的距离为：

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{CP}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}=\frac{6}{\sqrt{36+9+4}}=\frac{6}{7}.$$

故选：D.



模块4：课堂总结

模块5：直击高考

H 2019全国Ⅰ理18

例题10

1

【答案】见解析

【解析】证明：如图，过点N作$NH\perp AD$交AD于点H，则$NH//AA_1$，且$NH=\dfrac{1}{2}AA_1$，

又$MB//AA_1$，$MB=\dfrac{1}{2}AA_1$，$\therefore$四边形$NMBH$为平行四边形，则$NM//BH$，

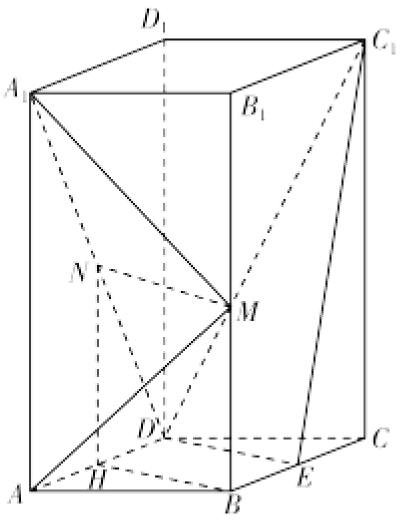
由$NH//AA_1$，N为A_1D中点，得H为AD中点，而E为BC中点，

$\therefore BE//DH$，$BE=DH$，则四边形$BEDH$为平行四边形，则$BH//DE$，

$\therefore NM//DE$，

$\because NM\not\subset$平面C_1DE，$DE\subset$平面C_1DE，

$\therefore MN//$平面C_1DE.



2

【答案】见解析

【解析】解：以D为坐标原点，以垂直于DC的直线为x轴，DC所在的直线为y轴，DD_1所在的直线为z轴建立空间直角坐标系，

则$N\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},2\right)$，$M\left(\sqrt{3},1,2\right)$，$A_1\left(\sqrt{3},-1,4\right)$，

$\overrightarrow{NM}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2},0\right)$，$\overrightarrow{NA_1}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},2\right)$，

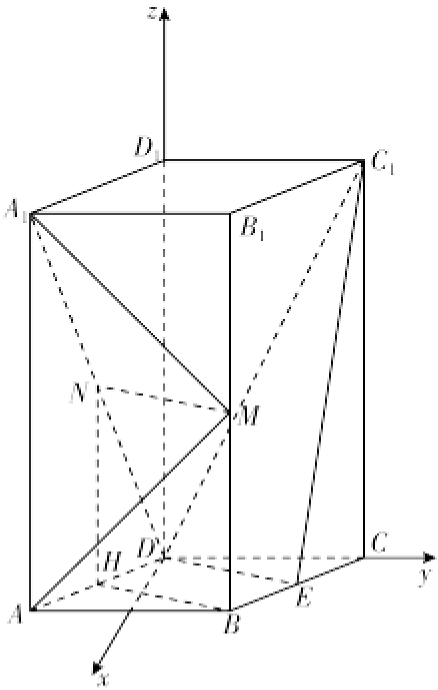
设平面A_1MN的一个法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，

由$\begin{cases}\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{NM}=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}y=0\\ \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{NA_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y+2z=0\end{cases}$，取$x=\sqrt{3}$，得$\overrightarrow{m}=\left(\sqrt{3},-1,-1\right)$，

又平面MAA_1的一个法向量为$\overrightarrow{n}=(1,0,0)$，

$\therefore\cos\langle\overrightarrow{m},\overrightarrow{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{m}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n}\right|}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

$\therefore$二面角$A-MA_1-N$的正弦值为$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.



模块6：随堂测

随堂测

随堂题1

1

【答案】A

【解析】解：方法一提示：$\sin\theta=\dfrac{d(O-PCD)}{OD}$，

等体积法求出$d(O-PCD)$，即$\frac{1}{3}S_{\triangle PCD}\cdot d(O-PCD)=\frac{1}{3}S_{\triangle OCD}\cdot d(P-OCD)$，

再证明$PO\perp$平面$ABCD$，则$d(P-OCD)=PO$，求出$\sin\theta=\dfrac{d(O-PCD)}{OD}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$即可.

方法二：设CD中点为E，连接OE，则$OE//BC$，所以$OE\perp$平面PAB，

所以OB，OP，OE两两互相垂直，

以O为原点，分别以$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OE}$为x轴、y轴、z轴的正方向，建立空间直角坐标系$O-xyz$，如图.

则$O(0,0,0)$，$D\left(-\sqrt{2},0,1\right)$，$C\left(\sqrt{2},0,2\right)$，$P\left(0,\sqrt{2},0\right)$，

$\overrightarrow{OD}=\left(-\sqrt{2},0,1\right)$，$\overrightarrow{DC}=\left(2\sqrt{2},0,1\right)$，$\overrightarrow{DP}=\left(\sqrt{2},\sqrt{2},-1\right)$，

设平面CDP的一个法向量为$\overrightarrow{n}=(x,y,z)$，

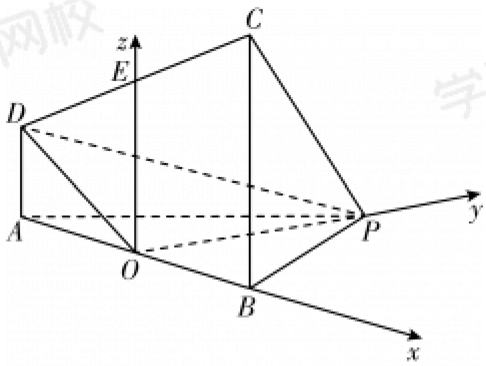
则$\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{DC}=2\sqrt{2}x+z=0\\\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{DP}=\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-z=0\end{cases}$，令$x=1$，得$z=-2\sqrt{2}$，$y=-3$，

即$\overrightarrow{n}=\left(1,-3,-2\sqrt{2}\right)$.

设直线OD与平面DCP所成角为θ，

则$\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{OD},\overrightarrow{n}\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{n}\right|}{\left|\overrightarrow{OD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n}\right|}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以直线OD与平面CDP所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故选A.



随堂题2

1

【答案】$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】解：以C为坐标原点，CD，CB，CC_1所在的直线分别为x，y，z轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

设$AE=A_1E=1$，$\because BE\perp$平面EB_1C_1，$\therefore BE\perp EB_1$，$\therefore AB=1$，

则$E(1,1,1)$，$A(1,1,0)$，$B_1(0,1,2)$，$C_1(0,0,2)$，$C(0,0,0)$，$\therefore\overrightarrow{CC_1}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{CE}=(1,1,1)$，

$\because BC\perp EB_1$，$\therefore$易知$EB_1\perp$平面EBC，

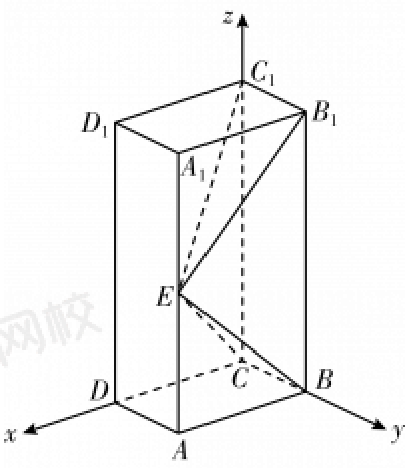
故取平面EBC的法向量为$\overrightarrow{m}=\overrightarrow{EB_1}=(-1,0,1)$，

设平面ECC_1的法向量为$\overrightarrow{n}=(x,y,z)$，

由$\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{CC_1}=0\\\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}z=0\\x+y+z=0\end{cases}$，取$x=1$，得$\overrightarrow{n}=(1,-1,0)$，

$\therefore\cos\langle\overrightarrow{m},\overrightarrow{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{m}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n}\right|}=-\dfrac{1}{2}$，

$\therefore$二面角$B-EC-C_1$的正弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



随堂题3

1

【答案】见解析

【解析】由题意知$C_1\left(0,2\sqrt{11},\sqrt{5}\right)$，$B\left(2\sqrt{5},2\sqrt{11},0\right)$，

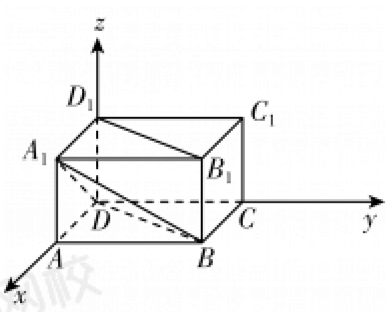
$\overrightarrow{DC_1}=\left(0,2\sqrt{11},\sqrt{5}\right)$，$\overrightarrow{DA_1}=\left(2\sqrt{5},0,\sqrt{5}\right)$，$\overrightarrow{DB}=\left(2\sqrt{5},2\sqrt{11},0\right)$，

设平面A_1BD的法向量$\overrightarrow{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{DA_1}=2\sqrt{5}x+\sqrt{5}z=0\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{DB}=2\sqrt{5}x+2\sqrt{11}y=0\end{cases}$，取$x=1$，得$\overrightarrow{n}=\left(1,-\sqrt{\dfrac{5}{11}},-2\right)$，

$\therefore$点C_1到平面A_1BD的距离：

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{DC_1}\cdot\overrightarrow{n}\right|}{\left|\overrightarrow{n}\right|}=\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{60}{11}}}=\frac{2\sqrt{33}}{3}.$$



立体几何中的动点问题-清北答案解析

模块1：存在性问题

考点：平行垂直的存在性问题

例题1

1

【答案】见解析

【解析】设$G(0,t,1)$，则$\overrightarrow{AG}=(-1,t,1)$，$F\left(\frac{1}{2},1,1\right)$，设平面$BEF$的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

$\because \overrightarrow{EF}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$，$\overrightarrow{BF}=\left(-\frac{1}{2},0,1\right)$，$\therefore \begin{cases}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=0\\-\frac{1}{2}x+z=0\end{cases}$，令$z=1$得$\vec{n}=(2,2,1)$，$\because AG//$平面$BEF$，$\therefore \overrightarrow{AG}\cdot\vec{n}=(-1,t,1)\cdot(2,2,1)=0$，解得$t=\frac{1}{2}$，$\therefore$当$G$是$D_1C_1$的中点时，$AG//$平面$BEF$

.

例题2

1

【答案】见解析

【解析】设M是棱PC上一点，则存在$\lambda\in[0,1]$使得$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}$.

因此点$M(0,\lambda,1-\lambda)$, $\overrightarrow{BM}=(-1,\lambda-1,1-\lambda)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,2,0)$.

由$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，得$1+2(\lambda-1)=0$，解得$\lambda=\frac{1}{2}$.

因为$\lambda=\frac{1}{2}\in[0,1]$ ，

所以在棱PC上存在点M，使得$BM\perp AC$.

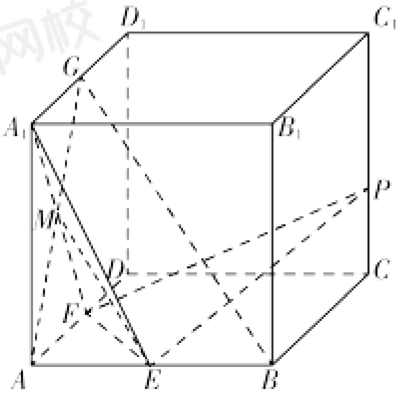
此时，$\frac{PM}{PC}=\frac{1}{2}$.

达标检测1

1

【答案】1

【解析】如图，连接AG，与A_1F交于点M，连接ME，要使得$BG//$平面A_1EF，则必须有$GB//ME$，所以$\frac{AM}{MG}=\frac{AE}{EB}=1$，进一步得出$\frac{D_1G}{A_1G}=1$.



考点：空间角的存在性问题

例题3

1

【答案】见解析

【解析】线段A_1C上存在点F符合题意.

建立如图所示的坐标系， 设$\overrightarrow{A_1F}=\lambda\overrightarrow{A_1C}$，其中$\lambda\in[0,1]$.

设$F(x_1,y_1,z_1)$，则有$(x_1,y_1,z_1-2)=(2\lambda,2\lambda,-2\lambda)$，

所以$x_1=2\lambda,y_1=2\lambda,z_1=2-2\lambda$，从而$F(2\lambda,2\lambda,2-2\lambda)$，

所以$\overrightarrow{DF}=(2\lambda,2\lambda+1,2-2\lambda)$，又$\overrightarrow{BC}=(0,4,0)$，

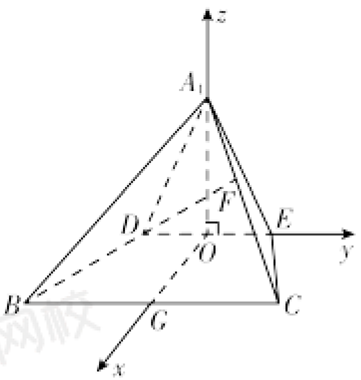
所以$\left|\cos\langle\overrightarrow{DF},\overrightarrow{BC}\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\overrightarrow{DF}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\dfrac{4|2\lambda+1|}{4\sqrt{(2\lambda)^2+(2\lambda+1)^2+(2-2\lambda)^2}}$，

令$\dfrac{|2\lambda+1|}{\sqrt{(2\lambda)^2+(2\lambda+1)^2+(2-2\lambda)^2}}=\dfrac{\sqrt5}{3}$，

整理得$3\lambda^2-7\lambda+2=0$.

解得$\lambda=\dfrac13$，舍去$\lambda=2$.

故线段A_1C上存在点F符合题意，且$\dfrac{A_1F}{A_1C}=\dfrac13$.



例题4

1

【答案】存在点N符合条件，且N是棱DC的中点．

【解析】解：以M为原点，$\overrightarrow{MB}$为x轴正方向，$\overrightarrow{MC}$为y轴正方向，垂直于AB且与DE相交的方向为z轴正方向，建立空间直角坐标系$M-xyz$．

所以$M(0,0,0)$，$C(0,\sqrt{2},0)$，$E(-\sqrt{2},0,1)$，$B(\sqrt{2},0,0)$，$D(\sqrt{2},0,2)$，

设平面EMC的法向量为$\overrightarrow{n}=(x',y',z')$，则$\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{n}=-\sqrt{2}x'+z'=0$，$\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{n}=\sqrt{2}y'=0$，

令$x'=1$，则$\overrightarrow{n}=(1,0,\sqrt{2})$．

在棱DC上存在一点N，设$N(x,y,z)$，

且$\overrightarrow{DN}=\lambda\overrightarrow{DC}\,(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，

$\therefore\left(x-\sqrt{2},y,z-2\right)=\lambda\left(-\sqrt{2},\sqrt{2},-2\right)$，

解得$x=\sqrt{2}-\sqrt{2}\lambda$，$y=\sqrt{2}\lambda$，$z=2-2\lambda$，

$\therefore\overrightarrow{MN}=\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\lambda,\sqrt{2}\lambda,2-2\lambda\right)$，

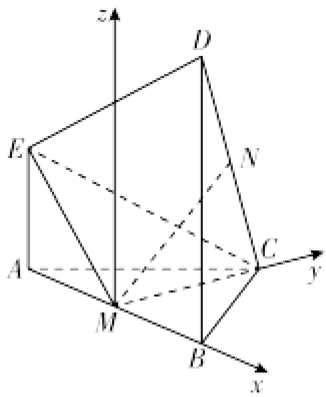
$\because$直线MN与平面EMC所成的角为60°，

$$\therefore\cos\langle\overrightarrow{MN},\overrightarrow{n}\rangle=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\lambda+\sqrt{2}\,(2-2\lambda)}{\sqrt{3}\times\sqrt{2\,(1-\lambda)^2+2\lambda^2+4\,(1-\lambda)^2}}$$

$$=\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

解得$\lambda=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore$存在点N符合条件，且N是棱DC的中点．



例题5

1

【答案】见解析

【解析】解：假设在棱CC_1上存在点$E(0,0,t)$，使得二面角$A-EB_1-B$的余弦值是$\dfrac{2\sqrt{17}}{17}$，

则$\overrightarrow{AE}=(-1,0,t)$，$\overrightarrow{AB_1}=(-1,2,4)$，

设$\overrightarrow{n}=(x,y,z)$为平面$AEB_1$的法向量，

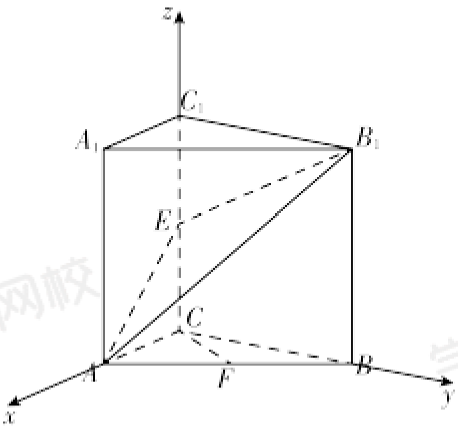
则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=-x+tz=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=-x+2y+4z=0\end{cases}$，取$z=1$，得$\vec{n}=\left(t,\dfrac{t-4}{2},1\right)$，

平面BEB_1的法向量$\vec{m}=(1,0,0)$，

$\therefore\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+\left(\frac{t-4}{2}\right)^2+1}}=\dfrac{2\sqrt{17}}{17}$，

由$t>0$，解得$t=1$.

$\therefore$在棱CC_1上存在点E，使得二面角$A-EB_1-B$的余弦值是$\dfrac{2\sqrt{17}}{17}$，$CE=1$.



达标检测2

1

【答案】C

【解析】解：存在，在棱BB'上取一点P，如图，

由题意可知，$BP\perp$平面ABC，

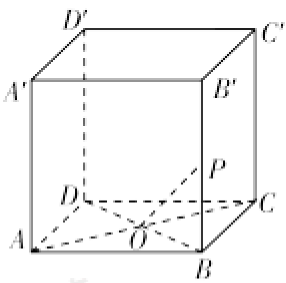
连接AC，BD交于点O，易知$BO\perp AC$，$BO=\sqrt{2}$，

连接PO，则$\angle POB$为二面角$P-AC-B$的平面角，

当$\angle POB=30^\circ$时，即$\tan\angle POB=\dfrac{PB}{BO}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

解得$BP=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

$\therefore$当$BP=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$时，二面角$P-AC-B$的大小为30°.



模块2：最值问题

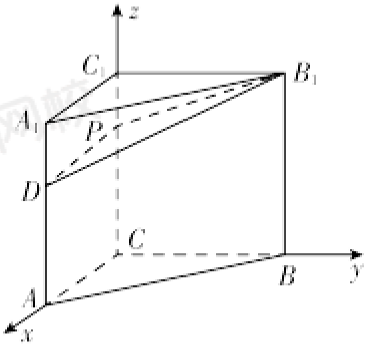
考点：最值问题

达标检测3

1

【答案】B

【解析】解：建立如图所示的空间直角坐标系，



则$D(1,0,2)$，$B_1(0,1,3)$，

设$P(0,0,z)$，

则$\overrightarrow{PD}=(1,0,2-z)$，$\overrightarrow{PB_1}=(0,1,3-z)$，

$\therefore \overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PB_1}=0+0+(2-z)(3-z)=\left(z-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，

故当$z=\frac{5}{2}$时，$\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PB_1}$取得最小值为$-\frac{1}{4}$，

故选：B.

例题6

1

【答案】B

【解析】由(1)知四边形$MNQP$为平行四边形，$\therefore MN=PQ$.

$\because DD_1=AD=DC=BC=1$，$\therefore AD_1=BD=\sqrt{2}$.

$\because D_1M=DN=a$，$\therefore \frac{D_1P}{1}=\frac{a}{\sqrt{2}}$，$\frac{DQ}{1}=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

即$D_1P=DQ=\frac{a}{\sqrt{2}}$，

$\therefore MN=PQ=\sqrt{(1-D_1P)^2+DQ^2}$

$=\sqrt{\left(1-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}$

$=\sqrt{\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\left(0<a<\sqrt{2}\right)$，

故当$a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，MN的长度有最小值，为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

即当M，N分别移动到AD_1，BD的中点时，MN的长度最小，此时MN的长度为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

例题7

1

【答案】D

【解析】解：以D为原点，建立如图所示空间直角坐标系，

则$P\left(4,0,2\right)$，$C\left(0,4,0\right)$，$D_1\left(0,0,4\right)$，$B\left(4,4,0\right)$，

设$M\left(4,a,b\right)$，$0\leqslant a\leqslant 4$，$0\leqslant b\leqslant 4$，则$\overrightarrow{D_1M}=\left(4,a,b-4\right)$，$\overrightarrow{CP}=\left(4,-4,2\right)$，

$\because D_1M\perp CP$，

$\therefore \overrightarrow{D_1M}\cdot\overrightarrow{CP}=16-4a+2b-8=0$，解得$2a-b=4$，

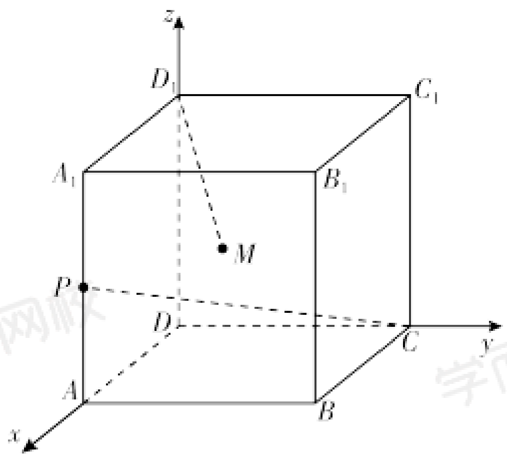
$\therefore M\left(4,a,2a-4\right)$，

$\therefore |BM|=\sqrt{(4-4)^2+(4-a)^2+(4-2a)^2}$

$=\sqrt{5a^2-24a+32}=\sqrt{5\left(a-\dfrac{12}{5}\right)^2+\dfrac{16}{5}}$.

$\therefore$当$a=\dfrac{12}{5}$时，$\triangle BCM$的面积取得最小值，为$S=2\times\dfrac{4}{\sqrt{5}}=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$.

故选：D.



例题8

1

【答案】A

【解析】解：以点C为原点，以CD，CB，CC'所在直线为坐标轴建立空间直角坐标系，如图所示：

则$C\left(0,0,0\right)$，$C'\left(0,0,2\sqrt{3}\right)$. 设$P\left(0,a,0\right)$，$Q\left(b,0,0\right)$，于是$0<a\leqslant 4$，$0<b\leqslant 3$.

$\overrightarrow{QC'}=\left(-b,0,2\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{PC'}=\left(0,-a,2\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{CC'}=\left(0,0,2\sqrt{3}\right)$，

设平面PQC'的一个法向量为$\overrightarrow{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{PC'}=-ay+2\sqrt{3}z=0\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{QC'}=-bx+2\sqrt{3}z=0\end{cases}$，

取$z=1$，得$\overrightarrow{n}=\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{b},\dfrac{2\sqrt{3}}{a},1\right)$，

$\because|\cos\langle\overrightarrow{n},\overrightarrow{CC'}\rangle|=\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$，

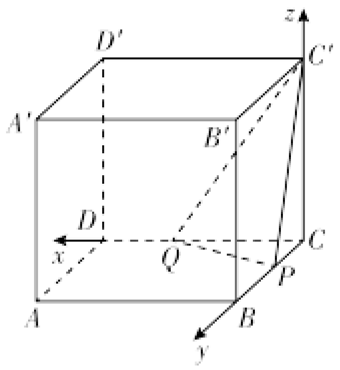
$\therefore|\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{CC'}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{CC'}|\cdot\left|\overrightarrow{n}\right|\Rightarrow\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}=1$，

解得$ab\geqslant 8$.

$\therefore$当$ab=8$时，$S_{\triangle PQC}=4$，三棱锥$C'-PQC$的体积最小，

$(V_{C'-PQC})_{\min}=\dfrac{1}{3}\times4\times2\sqrt{3}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

故选：A.



模块3：课堂总结

模块4：直击高考

H 2019天津理17

例题9

1

【答案】见解析

【解析】证明：以A为坐标原点，分别以$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$所在直线为x，y，z轴建立空间直角坐标系，如图所示，

可得$A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(1,2,0)$，$D(0,1,0)$，$E(0,0,2)$.

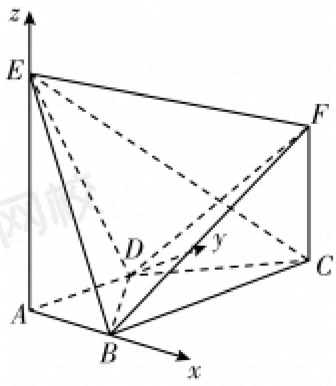
设$CF=h\,(h>0)$，则$F(1,2,h)$.

由题意易知$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$是平面$ADE$的一个法向量，

又$\overrightarrow{BF}=(0,2,h)$，可得$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

又$\because$直线$BF\not\subset$平面ADE，

$\therefore BF//$平面ADE.



2

【答案】见解析

【解析】解：依题意，$\overrightarrow{BD}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{BE}=(-1,0,2)$，$\overrightarrow{CE}=(-1,-2,2)$.

设$\overrightarrow{n}=(x,y,z)$为平面$BDE$的法向量，

则$\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{BD}=-x+y=0\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{BE}=-x+2z=0\end{cases}$，令$z=1$，得$\overrightarrow{n}=(2,2,1)$.

$\therefore \cos\langle\overrightarrow{CE},\overrightarrow{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{CE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n}\right|}=-\dfrac{4}{9}$.

$\therefore$直线CE与平面BDE所成角的正弦值为$\dfrac{4}{9}$.

3

【答案】见解析

【解析】解：设$\overrightarrow{m}=(x,y,z)$为平面$BDF$的法向量，

则$\begin{cases}\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{BD}=-x+y=0\\ \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{BF}=2y+hz=0\end{cases}$，取$y=1$，可得$\overrightarrow{m}=\left(1,1,-\dfrac{2}{h}\right)$，

由题意，得$\left|\cos\langle\overrightarrow{m},\overrightarrow{n}\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}\right|}{\left|\overrightarrow{m}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n}\right|}=\dfrac{\left|4-\frac{2}{h}\right|}{3\times\sqrt{2+\frac{4}{h^2}}}=\dfrac{1}{3}$，

解得$h=\dfrac{8}{7}$.

经检验，符合题意.

$\therefore$线段CF的长为$\dfrac{8}{7}$.

模块5：随堂测

随堂测

随堂题1

1

【答案】见解析

【解析】解：如图，由(1)知，$\overrightarrow{DQ}=(6,m-6,0)$，$\overrightarrow{DD_1}=(0,-3,6)$是平面$PQD$内的两个不共线向量.

设$\overrightarrow{n}_1=(x,y,z)$是平面$PQD$的一个法向量，则$\begin{cases}\overrightarrow{n}_1\cdot\overrightarrow{DQ}=0\\ \overrightarrow{n}_1\cdot\overrightarrow{DD_1}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}6x+(m-6)y=0\\ -3y+6z=0\end{cases}$.

取$y=6$，得$\overrightarrow{n}_1=(6-m,6,3)$.

又平面AQD的一个法向量是$\overrightarrow{n}_2=(0,0,1)$，所以

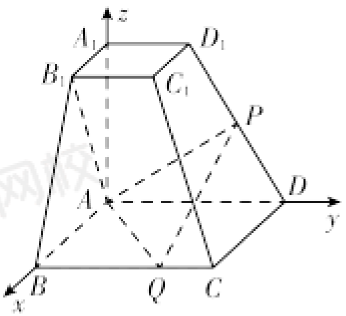
$$\cos\left\langle\overrightarrow{n}_1,\overrightarrow{n}_2\right\rangle=\frac{\overrightarrow{n}_1\cdot\overrightarrow{n}_2}{\left|\overrightarrow{n}_1\right|\left|\overrightarrow{n}_2\right|}=\frac{3}{\sqrt{(6-m)^2+6^2+3^2}}=\frac{3}{\sqrt{(6-m)^2+45}}.$$

而二面角$P-QD-A$的余弦值为$\frac{3}{7}$，因此$\frac{3}{\sqrt{(6-m)^2+45}}=\frac{3}{7}$，解得$m=4$或$m=8$(舍去). 此时$Q(6,4,0)$.

设$\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DD_1}$，而$\overrightarrow{DD_1}=(0,-3,6)$，得$P(0,6-3\lambda,6\lambda)$，所以$\overrightarrow{PQ}=(6,3\lambda-2,-6\lambda)$.

因为$PQ//$平面ABB_1A_1，且平面ABB_1A_1的一个法向量为$\overrightarrow{n}_3=(0,1,0)$，所以$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{n}_3=0$，即$3\lambda-2=0$，亦即$\lambda=\frac{2}{3}$，从而$P(0,4,4)$.

于是将四面体$ADPQ$视为以$\triangle ADQ$为底面的三棱锥$P-ADQ$，则其高为4，故四面体$ADPQ$的体积$V=\frac{1}{3}S_{\triangle ADQ}\cdot h=24$.



随堂题2

1

【答案】B

【解析】解：由题意可知该四面体的体积最大时，就是折叠成直二面角，

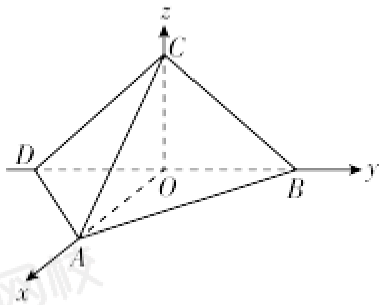
建立空间直角坐标系，如图：

设正方形的对角线长为2，则$\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{DC}=(1,0,1)$，

设直线AB与CD所成的角为θ，则$\cos\theta=\left|\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{DC}\right|}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$，

所以$\theta=60°$.

故选：B.



直线的方程与相关位置关系-清北答案解析

模块1：直线的基本量与方程

考点：直线的倾斜角与斜率

例题1

1

【答案】C

【解析】当$30^\circ \leqslant \theta < 90^\circ$时，$\tan\theta \geqslant \tan 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$，即$k \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{3}$；

当$90^\circ < \theta < 120^\circ$时，$\tan\theta < \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$，即$k < -\sqrt{3}$，

可得k的取值范围是：$\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left[\dfrac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$，

故选：C.

例题2

1

【答案】$(-\infty, -5] \cup \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$

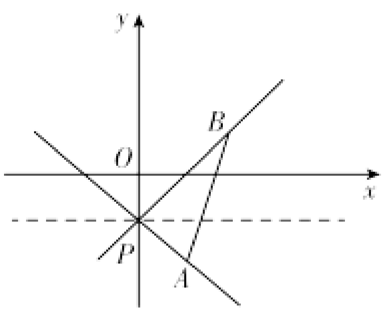
【解析】解：将$\dfrac{y+1}{x-1}$看作点$P(x,y)$与$C(1,-1)$连线的斜率，连接AC的斜率为$\dfrac{1}{2}$，连接BC的斜率为-5，结合图形可知斜率的取值范围为$(-\infty, -5] \cup \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.

达标检测1

1

【答案】A

【解析】如图，



$\because A(1,-2)$，$B(2,1)$ ，$P(0,-1)$ ，$\therefore k_{PA} = \dfrac{-2-(-1)}{1-0} = -1, k_{PB} = \dfrac{-1-1}{0-2} = 1$， 则使直线$l$与

线段AB有公共点的直线l的斜率的范围为$[-1,1]$，倾斜角的范围为$[0,\frac{\pi}{4}]\cup[\frac{3\pi}{4},\pi)$． 由补集思想可得，直线$l$与连接$A,B$的线段没有公共点的斜率的范围为$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$， 直线的倾斜角的范围为$\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$． 故选：A．

H 考点：直线的方程

例题3

1

【答案】C

【解析】联立已知的两直线方程得：$\begin{cases}2x+y-5=0\\x+2y-4=0\end{cases}$，解得：$\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$，所以两直线的交点坐标为$(2,1)$，

因为直线l在两坐标轴上的截距互为相反数，

①当直线l与两坐标轴的截距不为0时，设直线l的方程为$x-y=a$，

直线l过两直线的交点，所以把$(2,1)$代入直线l的方程得：$a=1$，则直线l的方程为$x-y=1$，即$x-y-1=0$；

②当直线l与两坐标轴的截距等于0时，设直线l的方程为$y=kx$，

直线l过两直线的交点，所以把$(2,1)$代入直线l的方程得：$k=\frac{1}{2}$，则直线l的方程为$y=\frac{1}{2}x$，即$x-2y=0$．

综上所述，直线l的方程为$x-y-1=0$或$x-2y=0$． 故选C．

达标检测2

1

【答案】D

【解析】$\because$直线斜率为$\frac{3}{4}$且截距都存在，

$\therefore$可设截距式方程$\frac{x}{4b}+\frac{y}{-3b}=1$，

与坐标轴围成的三角形面积是$S=\frac{1}{2}|4b||3b|=6b^2=6$，

$\therefore b=\pm1$，代入截距式方程并化为一般式方程为$3x-4y+12=0$或$3x-4y-12=0$，

故选D．

例题4

1

【答案】D

【解析】解：将直线方程整理成$m(x+2y-1)=x+y-5$，该式对于任意m都成立，只需要$x+2y-1=x+y-5=0$同时成立，解得$x=9$，$y=-4$．

模块2：直线的位置关系与距离

考点：直线的位置关系与距离

达标检测3

1

【答案】A

【解析】解：$\because \begin{cases} A_1B_2-A_2B_1=0 \\ B_1C_2-B_2C_1\neq 0 \end{cases}$，

$\therefore \begin{cases} 6-a(a+1)=0 \\ 2(a+1)-6\neq 0 \end{cases}$，

解方程组得$a=-3$.

故选：A.

例题5

1

【答案】见解析

【解析】解法1：设点$P(x,y)$，$\because |PA|=|PB|$，

$\therefore \sqrt{(x-4)^2+(y+3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$①.

又点P到直线l的距离等于2，

$\therefore \dfrac{|4x+3y-2|}{5}=2$②.

由①②联立方程组，解得$P(1,-4)$或$\left(\dfrac{27}{7},-\dfrac{8}{7}\right)$.

解法2：设点$P(x,y)$，$\because |PA|=|PB|$，

$\therefore$点P在线段AB的垂直平分线上，且AB垂直平分线的方程是$y=x-5$.

$\therefore$设点$P(x,x-5)$.

$\because$点P到l的距离等于2，

$\therefore \dfrac{|4x+3(x-5)-2|}{5}=2$.

由上式得到$x=1$或$\dfrac{27}{7}$，

$\therefore P(1,-4)$或$\left(\dfrac{27}{7},-\dfrac{8}{7}\right)$.

例题6

1

【答案】C

【解析】解：直线$mx-y+1-2m=0$可化为$y-1=m(x-2)$，

由直线点斜式方程可知直线恒过定点$Q(2,1)$且斜率为m，

结合图象可知当PQ与直线$mx-y+1-2m=0$垂直时，点到直线的距离最大，

此时$m\cdot\dfrac{2-1}{3-2}=-1$，解得$m=-1$，

故选：C.

例题7

1

【答案】D

【解析】解：由题意可知，动直线$x+my=0$经过定点$A(0,0)$，

动直线$mx-y-m+3=0$，即$m(x-1)-y+3=0$,经过定点$B(1,3)$，

$\because$动直线$x+my=0$和动直线$mx-y-m+3=0$始终垂直，点P又是两条直线的交点，

$\therefore PA\perp PB$，$\therefore |PA|^2+|PB|^2=|AB|^2=10$.

由基本不等式可得$|PA|^2+|PB|^2\leqslant(|PA|+|PB|)^2\leqslant 2\left(|PA|^2+|PB|^2\right)$，

即$10\leqslant(|PA|+|PB|)^2\leqslant 20$，可得$\sqrt{10}\leqslant|PA|+|PB|\leqslant 2\sqrt{5}$.

故选：D.

模块3：对称问题

H 考点：对称问题

例题8

1

【答案】C

【解析】设对称点为(x_0,y_0)，由题意得，

$\begin{cases}\frac{y_0-4}{x_0+3}=-1\\ \frac{x_0-3}{2}-\frac{y_0+4}{2}-1=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x_0=5\\ y_0=-4\end{cases}$，即对称点为$(5,-4)$，故选C.

例题9

1

【答案】D

【解析】直线$2x+3y-6=0$关于点$(1,-1)$对称的直线，和直线$2x+3y-6=0$平行，排除A、C，在直线$2x+3y-6=0$上选特殊点$(0,2)$，它关于点$(1,-1)$对称点$(2,-4)$，显然$(2,-4)$不在$2x+3y+7=0$上．故选D.

达标检测4

1

【答案】C

【解析】解：由于直线$l_1: Ax+By+C_1=0$和直线$l_2: Ax+By+C_2=0(C_1\neq C_2)$平行，

设直线$l_1: Ax+By+C_1=0$关于直线$l_2: Ax+By+C_2=0(C_1\neq C_2)$对称的直线为直线

$l_3: Ax+By+C_3=0$，

则根据直线l_2到直线l_1的距离等于它到直线l_3的距离，可得$C_1+C_3=2C_2$，

$\therefore C_3=2C_2-C_1$，

故对称直线为：$Ax+By+(2C_2-C_1)=0$，　故选：C.

例题10

1

【答案】A

【解析】由$\begin{cases}x-y+1=0\\2x-y+3=0\end{cases}$，得$\begin{cases}x=-2\\y=-1\end{cases}$，即直线$l$和$l_1$的交点$A(-2,-1)$，　由题意可得，$A(-2,-1)$在直线$l_2$上，　在直线$l_1$上取一点$C(0,3)$，设出点$C$关于直线$l$的对称点$B$的坐标为$(m,n)$，　由$\begin{cases}\frac{n-3}{m-0}\times 1=-1\\\frac{m}{2}-\frac{n+3}{2}+1=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}m=2\\n=1\end{cases}$，故$B(2,1)$，　故直线$AB$的斜率$k_{AB}=\dfrac{1+1}{2+2}=\dfrac{1}{2}$，　故直线$AB$的方程为$y-1=\dfrac{1}{2}(x-2)$，即　$x-2y=0$，　即l_2的方程为$x-2y=0$，　故选A.

模块4：课堂总结

模块5：直击高考

H 2018北京理7

例题11

1

【答案】C

【解析】解：由题意$d=\dfrac{|\cos\theta-m\sin\theta-2|}{\sqrt{1^2+(-m)^2}}=\dfrac{\left|\sqrt{m^2+1}\sin(\theta+\alpha)-2\right|}{\sqrt{m^2+1}}$，$\tan\alpha=-\dfrac{1}{m}$，

$\therefore$当$\sin(\theta+\alpha)=-1$时，

$d_{\max}=1+\dfrac{2}{\sqrt{m^2+1}}\leqslant 3$.

$\therefore d$的最大值为3.

故选：C.

模块6：随堂测

随堂测

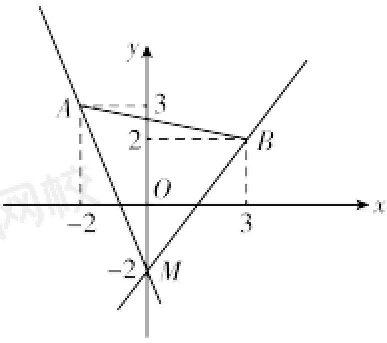
随堂题1

1

【答案】D

【解析】解：$\because$直线$ax+y+2=0$过定点$(0,-2)$，斜率为$-a$，

如图，



$k_{MA}=-\frac{5}{2},k_{MB}=\frac{4}{3}$，

$\therefore$若直线$ax+y+2=0$与线段AB有交点，

则$-a\geqslant\frac{4}{3}$或$-a\leqslant-\frac{5}{2}$.

即$a\leqslant-\frac{4}{3}$或$a\geqslant\frac{5}{2}$.

$\therefore$答案为：$\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right]\cup\left[\frac{5}{2},+\infty\right)$.

故选：D.

随堂题2

1

【答案】D

【解析】由题意可知，动直线$ax+y-1=0$经过定点$M(0,1)$，

动直线$x-ay+2a-1=0$，即$x-1+a(-y+2)=0$，经过定点$N(1,2)$，

$\because$过定点M的直线$ax+y-1=0$与过定点N的直线$x-ay+2a-1=0$始终垂直，P又是两条直线的交点，$\therefore$有$PM\perp PN$，$\therefore|PM|^2+|PN|^2=|MN|^2=2$．故$|PM|\cdot|PN|\leqslant\frac{|PM|^2+|PN|^2}{2}=1$（当且仅当$|PM|=|PN|=1$时取“$=$”），故选D.

随堂题3

1

【答案】A

【解析】解：在直线$y=-3x+b$上任意取一点$A\left(1,b-3\right)$，

则点A关于直线$x+y=0$的对称点$B\left(-b+3,-1\right)$在直线$y=-ax+3$上，

故有$-1=-a\left(-b+3\right)+3$，即$-1=ab-3a+3$，$\therefore ab=3a-4$，

结合所给的选项，

故选：A．

圆的方程与相关位置关系-清北答案解析

模块1：圆的方程

考点：圆的方程

例题1

1

【答案】$(x-2)^2+y^2=9$

【解析】由题意设圆C的方程为$(x-a)^2+y^2=r^2\,(a>0)$，

由点$M\left(0,\sqrt{5}\right)$在圆C上，且圆心到直线$2x-y=0$的距离为$\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$，

得$\begin{cases}a^2+5=r^2\\ \frac{|2a|}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}\end{cases}$，由$a>0$，解得$a=2,r=3$.

$\therefore$圆C的方程为：$(x-2)^2+y^2=9$.

故答案为：$(x-2)^2+y^2=9$.

例题2

1

【答案】B

【解析】圆$x^2+y^2-2kx+2y+2=0\,(k>0)$的圆心为$(k,-1)$，半径为$\sqrt{k^2-1}$，

圆$x^2+y^2-2kx+2y+2=0\,(k>0)$与两坐标轴无公共点，

所以$\sqrt{k^2-1}<1$，解得$1<k<\sqrt{2}$，

故选：B.

达标检测1

1

【答案】D

【解析】由曲线C的方程$x^2+y^2+2ax-4ay+5a^2-4=0$可化为$(x+a)^2+(y-2a)^2=4$，

故曲线C为圆，圆的圆心为$(-a,2a)$，圆的半径为2，

若曲线$C:x^2+y^2+2ax-4ay+5a^2-4=0$上所有的点均在第二象限内，

则$a>0$，且$|-a|>2$，解得$a>2$，故a的取值范围为$(2,+\infty)$，故选D.

模块2：圆与圆的位置关系