广东省 2025 届普通高中毕业班第一次调研考试

数学

本试卷共 4 页，考试用时 120 分钟，满分 150 分.

注意事项：1．答卷前，考生务必将自己所在的市（县、区）、学校、班级、姓名、考场号和座位号填写在答题卡上，将条形码横贴在每张答题卡左上角“条形码粘贴处”.

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔在答题卡上将对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案．答案不能答在试卷上.

3．非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先画掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液．不按以上要求作答无效.

4．考生必须保证答题卡的整洁．考试结束后，将试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x|-2<x<2\},B=\{x||x-2|<2\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A. $(-2,2)$　　B. $(0,4)$　　C. $(0,2)$　　D. $(-2,4)$

【答案】D

【解析】

【分析】计算出集合 B，再根据并集运算可得结果.

【详解】根据题意知 $|x-2|<2\Rightarrow 0<x<4$，所以 $B=\{x|0<x<4\}$，

则 $A\cup B=\{x|-2<x<4\}=(-2,4)$.

故选：D

2. 已知复数 z 满足 $z+|z|=1+\mathrm{i}$，则 $|z|=$（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. 1　　D. $\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】设 $z=a+b\mathrm{i},a,b\in\mathbf{R}$，根据模长公式结合复数相等可求 a,b，进而可得模长.

【详解】设 $z=a+b\mathrm{i},a,b\in\mathbf{R}$，则 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$，

可得$z+|z|=\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)+b\mathrm{i}=1+\mathrm{i}$，

则$\begin{cases}a+\sqrt{a^2+b^2}=1\\ b=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=0\\ b=1\end{cases}$，

所以$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=1$.

故选：C.

3. 已知函数$f(x)$满足$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=1+x$，则$f(2)=$（　　）

A. $-\frac{3}{4}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{9}{4}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据题意分别令$x=2$、$x=\frac{1}{2}$和$x=-1$，运算求解即可.

【详解】因为$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=1+x$，

令$x=2$，可得$f(2)+f(-1)=3$；

令$x=\frac{1}{2}$，可得$f\left(\frac{1}{2}\right)+f(2)=\frac{3}{2}$；

两式相加可得$f(-1)+f\left(\frac{1}{2}\right)+2f(2)=\frac{9}{2}$，

令$x=-1$，可得$f(-1)+f\left(\frac{1}{2}\right)=0$；

则$2f(2)=\frac{9}{2}$，即$f(2)=\frac{9}{4}$.

故选：D.

4. 外接球半径为$\sqrt{6}$的正四面体的体积为（　　）

A. $\frac{16\sqrt{2}}{3}$　　B. 24　　C. 32　　D. $48\sqrt{2}$

【答案】A

【解析】

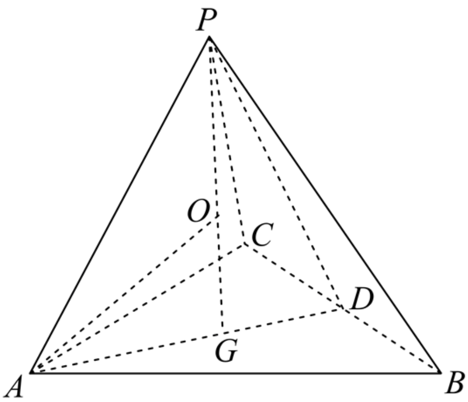
【分析】

设出正四面体棱长，通过作辅助线表示出四面体的高，解直角三角形表示外接球半径，由已知外接球半径为$\sqrt{6}$可得棱长，再由三棱锥体积公式可得.

【详解】如图，设正四面体$P-ABC$的下底面中心为G，连接PG，则$PG\perp$平面ABC，

连接AG并延长，交BC于D，设此正四面体的棱长为x，则$AD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$，

$AG=\dfrac{2}{3}AD=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，$PG=\sqrt{x^2-(\dfrac{\sqrt{3}}{3}x)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}x$，即四面体的高$h=\dfrac{\sqrt{6}}{3}x$.



设四面体外接球的球心为O，连接AO，外接球半径为R，

则$R^2=(\dfrac{\sqrt{3}}{3}x)^2+(\dfrac{\sqrt{6}}{3}x-R)^2$，化简得$R=\dfrac{\sqrt{6}}{4}x$，由$R=\sqrt{6}$，

得$x=4$，即正四面体棱长为4，

所以正四面体的体积$V_{P-ABC}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 4^2\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{3}\times 4=\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$.

故选：A.

5. 设点P为圆$(x-3)^2+y^2=1$上的一动点，点Q为抛物线$y^2=4x$上的一动点，则$|PQ|$的最小值为（　　）

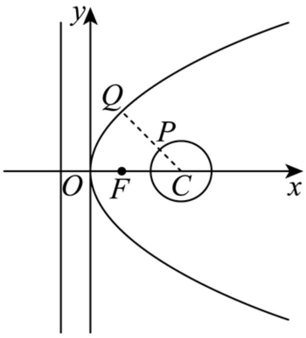
A. $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $2\sqrt{2}-1$　　C. $\dfrac{11\sqrt{10}-29}{9}$　　D. $\sqrt{10}-2$

【答案】B

【解析】

【分析】设$Q(\dfrac{y^2}{4},y)$，可得$|PQ|\geq|QC|-1$，利用两点之间的距离公式可得$|QC|$，结合二次函数的单调性即可判断出结论.

【详解】如下图，设 $Q(\frac{y^2}{4},y)$，



则$|PQ|\geq|QC|-1$，$|QC|^2=(\frac{y^2}{4}-3)^2+y^2=(\frac{y^2}{4}-1)^2+8\geq 8$，当且仅当$y^2=4$时取等号，此时$Q(1,\pm 2)$，

$\therefore |QC|\geq 2\sqrt{2}$，因此$|PQ|\geq|QC|-1\geq 2\sqrt{2}-1$，

故选：B．

6. 已知$f\left(x\right)=\lg\left(ax^2+2ax+1\right)$的值域为$\mathbf{R}$，则实数$a$的取值范围为（　　）

A. $\left(0,1\right)$　　　　B. $\left(0,1\right]$　　　　C. $\left[1,+\infty\right)$　　　　D. $\left(-\infty,0\right)\cup\left(1,+\infty\right)$

【答案】C

【解析】

【分析】设$t=ax^2+2ax+1$，由值域为R，可以得到t能取遍所有正数，从而求解．

【详解】设$t=ax^2+2ax+1$，

又Q $f(x)$值域为R，$\therefore t$能取遍所有正数，

$\therefore\begin{cases}\Delta=4a^2-4a\geq 0\\ a>0\end{cases}$，解得$a\geq 1$，

故选：C．

7. 设α,β为锐角，且$\cos\left(\alpha-\beta\right)=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$，则$\alpha$与$\beta$的大小关系为（　　）

A. $\alpha=\beta$　　　　B. $\alpha>\beta$　　　　C. $\alpha<\beta$　　　　D. 不确定

【答案】A

【解析】

【分析】先利用两角和的余弦公式化简等式可得$\sin\left(\alpha-\beta\right)=0$，再根据$\alpha,\beta$范围求得$\alpha-\beta=0$．

【详解】由α,β为锐角，则$\cos\alpha>0,\cos\beta>0$，

由$\cos\left(\alpha-\beta\right)=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$可得$\cos\alpha=\cos\left(\alpha-\beta\right)\cos\beta$，

又由$\cos\alpha=\cos a\left(\alpha-\beta+\beta\right)=\cos\left(\alpha-\beta\right)\cos\beta-\sin\left(\alpha-\beta\right)\sin\beta$，

所以有$\sin\left(\alpha-\beta\right)\sin\beta=0$，由$\beta$为锐角可得$\sin\beta>0$，

则$\sin\left(\alpha-\beta\right)=0$，又由$\alpha,\beta$为锐角可得$-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$，

故$\alpha-\beta=0$，即$\alpha=\beta$.

故选：A.

8. 若$a>b>0$，且$a^3-b^3=a^2-b^2$，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的取值范围是（　　）

A. $\left(1,\frac{4}{3}\right)$　　B. $\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$　　C. $\left(1,3\right)$　　D. $\left(3,+\infty\right)$

【答案】D

【解析】

【分析】对$a^3-b^3=a^2-b^2$进行变形，再利用a,b不相等时$a^2+b^2>2ab$，即可求出$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的范围.

【详解】由$a^3-b^3=a^2-b^2$，则$\left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2\right)=\left(a-b\right)\left(a+b\right)$，

又$a>b>0$，则$a^2+ab+b^2=a+b$，

又当$a>b>0$时，$a^2+b^2>2ab$，

因此可得，$a+b=a^2+ab+b^2>3ab$，

即$\frac{a+b}{ab}>3$，又$\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$，

因此可得$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>3$，

故选：D.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 变量x,y之间的相关数据如下表所示，其经验回归直线$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$经过点$\left(10,m\right)$，且相对于点$\left(11,5\right)$的残差为0.2，则（　　）

x	9	9.5	10	10.5	11

y	11	10	m	6	5

A. $m=8$　　B. $\hat{b}=-2.8$　　C. $\hat{a}=36$　　D. 残差和为0

【答案】AD

【解析】

【分析】结合回归方程的性质和残差的定义列方程求$\hat{b},\hat{a},m$，判断A，B，C，求残差和判断D.

【详解】因为经验回归直线$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$经过点$\left(10,m\right)$，

所以$m=10\hat{b}+\hat{a}$，$5m=11+10+m+6+5$，

因为相对于点$\left(11,5\right)$的残差为0.2，

所以$5-\left(11\hat{b}+\hat{a}\right)=0.2$，

所以$m=8$，$\hat{b}=-3.2$，$\hat{a}=40$，A正确，B错误，C错误，

所以$\hat{y}=-3.2x+40$，

当$x=9$时，$\hat{y}=-3.2\times 9+40=11.2$，

当$x=9.5$时，$\hat{y}=-3.2\times 9.5+40=9.6$，

当$x=10$时，$\hat{y}=-3.2\times 10+40=8$，

当$x=10.5$时，$\hat{y}=-3.2\times 10.5+40=6.4$，

当$x=11$时，$\hat{y}=-3.2\times 11+40=4.8$，

所以残差和为$11-11.2+10-9.6+8-8+6-6.4+5-4.8=0$，D正确.

故选：AD.

10. 已知函数$f\left(x\right)=2\cos x-\cos 2x\left(x\in \mathrm{R}\right)$，则（　　）

A. $f\left(x\right)$的值域是$\left[-3,3\right]$　　B. $f\left(x\right)$的最小正周期是2π

C. $f\left(x\right)$关于$x=k\pi\left(k\in \mathbf{Z}\right)$对称　　D. $f\left(x\right)$在$\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$上单调递减

【答案】BCD

【解析】

【分析】根据二倍角余弦公式化简得出值域及单调区间判断A,D,应用周期及对称轴判断B,C.

【详解】因为 $f\left(x\right)=2\cos x-\cos 2x=-2\cos^2 x+2\cos x+1$，

令 $\cos x=t, y=-2t^2+2t+1$，

$t\in\left[-1,1\right]$ $-3\le y\le\frac{3}{2}$,A 选项错误；

$t=\cos x$ 在 $x\in\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ 单调递减，$t=\cos x\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$ 时 $y=-2t^2+2t+1$ 单调递增，

应用复合函数单调性，$f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ 上单调递减, D 选项正确；

$f\left(x+2\pi\right)=2\cos\left(x+2\pi\right)-\cos 2\left(x+2\pi\right)=2\cos x-\cos 2x=f\left(x\right)$,

$y=2\cos x$ 的最小正周期是 2π, $y=\cos 2x$ 的最小正周期是 π,

$f(x)$ 的最小正周期是 π,2π 的最小公倍数为 2π,B 选项正确；

$f\left(2k\pi-x\right)=2\cos\left(2k\pi-x\right)-\cos 2\left(2k\pi-x\right)=2\cos x-\cos 2x=f\left(x\right)$,$f(x)$ 关于 $x=k\pi$ 对称，C 选项正确；

故选：BCD.

11. 甲、乙、丙、丁四人共同参加 4 项体育比赛，每项比赛的第一名到第四名的得分依次为 5 分，3 分，2 分，1 分．比赛结束甲获得 16 分为第一名，乙获得 14 分为第二名，且没有同分的情况．则（　　）

A. 第三名可能获得 10 分

B. 第四名可能获得 6 分

C. 第三名可能获得某一项比赛的第一名

D. 第四名可能在某一项比赛中拿到 3 分

【答案】ABD

【解析】

【分析】根据题设条件进行推理分析知：第三、四名的总分为 14 分，结合第一、二名的比赛项目名次，即可确定正确的项.

【详解】由题设，

第一名 16 分，情况如{2 个第一，2 个第二}、{3 个第一，1 个第四}，

第二名 14 分，情况如{1 个第一，3 个第二}、{2 个第一， 2 个第三}，{2 个第一， 1 个第二，1 个第四}，

所以，第一名与第二名各比赛项目组合情况如下：

第一种情况为：第一名{2 个第一，2 个第二}，第二名{2 个第一， 2 个第三}，或{2 个第一， 1 个第二，1 个第四}，

第二种情况为：第一名{3 个第一，1 个第四}，第二名{1 个第一，3 个第二}，

综上，第三名最好成绩为{2 个第二，2 个第三}，即最高分为 10 分，故 A 正确，C 错误；

当第三名{2 个第二，2 个第四}，则第四名{2 个第三，2 个第四}时，此时第四名获得 6 分，故 B 正确；

当第三名{1 个第二，2 个第三，1 个第四}，则第四名{1 个第二，3 个第四}时，此时第四名在某一项比赛中拿到 3 分，故 D 正确；

故选：ABD.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, x\le 0,\\ \ln x, x>0,\end{cases}$ 过原点 $O\left(0,0\right)$ 作曲线 $y=f\left(x\right)$ 的切线，其切线方程为____________.

【答案】 $x-\mathrm{e}y=0$

【解析】

【分析】根据题意，设出切点的坐标，结合导数的几何意义，分类讨论，即可求解.

【详解】当 $x\le 0$ 时，函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x$，可得 $f'\left(x\right)=\mathrm{e}^x$

设切点为 $P(x_0,y_0)$，则 $f'(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}$，

所以切线方程为 $y-\mathrm{e}^{x_0}=\mathrm{e}^{x_0}(x-x_0)$，

因为切线过原点 $O(0,0)$，可得 $-\mathrm{e}^{x_0}=-x_0\mathrm{e}^{x_0}$，解得 $x_0=1$，不符合题意，舍去；

当 $x>0$ 时，函数 $f\left(x\right)=\ln x$，可得 $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$

设切点为 $P(x_1,y_1)$，则 $f'(x_1)=\dfrac{1}{x_1}$，

所切线方程为 $y-\ln x_1=\dfrac{1}{x_1}(x-x_1)$，

因为切点过原点 $O(0,0)$，可得 $\ln x_1=1$，解得 $x_1=e$，

此时切线方程为 $y-1=\dfrac{1}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e})$，即 $x-\mathrm{e}y=0$，

故答案为：$x-\mathrm{e}y=0$

13. 如图是一个 3×3 的九宫格，小方格内的坐标表示向量，现不改变这些向量坐标，重新调整位置，使得每行、每列各三个向量的和为零向量，则不同的填法种数为____________.

$(-1,1)$	$(0,1)$	$(1,1)$
$(-1,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$
$(-1,-1)$	$(0,-1)$	$(1,-1)$

【答案】72

【解析】

【分析】要使得每行、每列各三个向量的和为零向量，根据对称性，确定$(0,0)$所在的行和列只能排$(1,1),(-1,-1),(1,-1),(-1,1)$，

再按分步乘法计数原理进行求解即可.

【详解】

1	2	3
4	5	6
7	8	9

首先对3×3的九宫格每个位置标注数字，

第一步先排$(0,0)$，一共 9 个位置，因此有C_9^1种排法，

根据对称性知，$(0,0)$所在的行和列只能排$(1,1),(-1,-1),(1,-1),(-1,1)$，

不妨设$(0,0)$在 1 位置，

第二步排 2 位置，则从$(1,1),(-1,-1),(1,-1),(-1,1)$选一个，因此有$C_4^1$种排法，

则 3 位置的数也定下来了，

第三步排 4 位置，则从$(1,1),(-1,-1),(1,-1),(-1,1)$剩余的两个中挑一个，因此有$C_2^1$种排法，

接着排 7 位置，7 位置是$(1,1),(-1,-1),(1,-1),(-1,1)$中剩余的最后一个，

相当于$(0,0)$所在的行和列都定下来了，

则使得每行、每列各三个向量的和为零向量，其他四个位置的向量排法是唯一的，

因此按分步乘法计数原理知，$C_9^1\times C_4^1\times C_2^1=72$（种）