关于条件概率与独立事件

知识回顾

1.古典概型的概念

1) 试验的所有可能结果(即基本事件)只有有限个，每次试验只出现其中的一个结果；2) 每一个结果出现的可能性相同。

2.古典概型的概率公式

$$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{包含的可能结果数}}{\text{试验的所有可能结果}}=\frac{m}{n}$$

样本空间

- 我们将随机实验E的一切可能基本结果（或实验过程如取法或分配法）组成的集合称为E的样本空间

问题1:

100个产品中有93个产品的长度合格，90个产品的质量合格，85个产品的长度、质量都合格。现在任取一个产品，若已知它的质量合格，那么它的长度合格的概率是多少？

分析：

B=｛产品的重量合格｝

A=｛产品的长度合格｝

100个产品中有93个产品的长度合格，90个产品的重量合格，85个产品的长度、重量都合格。现在任取一个产品，若已知它的重量合格，那么它的长度合格的概率是多少？

A∩B=｛产品的长度、重量都合格｝

在集合中，“都”代表着“交”，则A、B同时发生为A∩B。

由已知可得：

$$P(A)=\frac{93}{100},P(B)=\frac{90}{100},P(A\cap B)=\frac{85}{100}$$

任取一个产品，已知其质量合格，
则它的长度合格的概率为 $\frac{85}{90}$

这个概率与事件A、B的概率有什么关系？

由已知可得：

$$P(A)=\frac{93}{100},P(B)=\frac{90}{100},P(A\cap B)=\frac{85}{100}$$

容易发现：

$$\frac{85}{90}=\frac{\frac{85}{100}}{\frac{90}{100}}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

概括

求B发生的条件下，A发生的概率，称为B发生时A发生的条件概率，记为 $P(A|B)$。

当 $P(B)>0$ 时，$P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$，其中，$A$ I B 可记为 AB 。

类似地 $P(\mathrm{A})>0$ 时，$P(\mathrm{B}|A)=\dfrac{P(AB)}{P(\mathrm{A})}$ 。

A发生时B发生的概率

理解

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

P(A|B)相当于把B看作新的基本事件空间,求A∩B发生的概率

$$P(A|B)=\frac{\text{在}B\text{发生的条件下}A\text{包含的样本点数}}{\text{在}B\text{发生的条件下样本点数}}$$

$$=\frac{AB\text{包含的样本点数}}{B\text{包含的样本点数}}$$

$$=\frac{AB\text{包含的样本点数}/\text{总数}}{B\text{包含的样本点数}/\text{总数}}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

例 盒中有球如表. 任取一球

若已知取得是蓝球,问该球是玻璃球的概率.

A:取得是蓝球,B:取得是玻璃球

$$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{4}{16}}{\frac{11}{16}}=\frac{4}{11}$$

变式:若已知取得是玻璃球,求取得是篮球的概率.

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{4}{16}}{\frac{6}{16}}=\frac{4}{6}$$

例 设 100 件产品中有 70 件一等品，25 件二等品，规定一、二等品为合格品．从中任取1 件，求 (1) 取得一等品的概率；(2) 已知取得的是合格品，求它是一等品的概率．

解 设B表示取得一等品，A表示取得合格品，则

（1）因为100 件产品中有 70 件一等品，$P(B)=\dfrac{70}{100}=0.7$

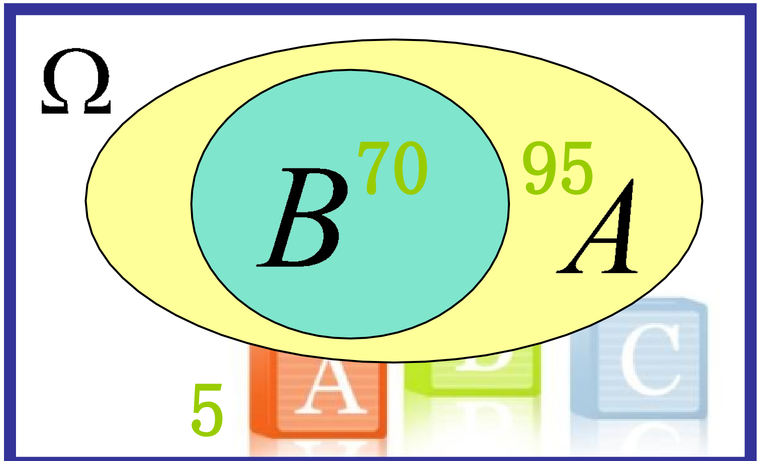
（2）方法1：　因为95 件合格品中有 70 件一等品，所以

$$Q\ B \subset A \therefore AB = B$$

$$P(B|A)=\frac{70}{95}=0.7368$$

方法2：

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{70/100}{95/100}\approx 0.7368$$



概率 $P(A|B)$ 与 $P(AB)$的区别与联系

联系： 事件 A，B 都发生了。

区别：

（1）在 $P(A|B)$ 中，事件 A，B发生有时间上的差异，B先A后；而在 $P(AB)$ 中，事件 A,B 同时发生。

（2）样本空间不同，在 $P(A|B)$ 中，事件 B 成为样本空间；在 $P(AB)$中，样本空间为所有事件的总和。

因而有 $P(A|B) \geq P(AB)$