第三章　3.2　空间向量在立体几何中应用

3.2.2　平面法向量与平面向量表示

学习目标

1.了解平面法向量概念，会求平面法向量.

2.会用平面法向量证实平面与平面平行、垂直.

3.了解并会应用三垂线定理及其逆定理，证实相关垂直问题.

内容索引

问题导学

知识点一　平面法向量

思索

平面法向量有何作用？是否唯一？　　答案

平面法向量与空间一点能够确定一个平面，利用平面法向量能够判断直线与平面、平面与平面位置关系.

平面法向量不唯一，它们都是共线.

梳理

平面法向量

已知平面α，假如向量$\boldsymbol{n}$基线与平面α垂直，则向量$\boldsymbol{n}$叫做平面α法向量或说向量$\boldsymbol{n}$与平面α正交.

知识点二　平面向量表示

设A是空间任一点，$\boldsymbol{n}$为空间内任一非零向量，则适合条件 $\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{n}=0$ 点M集合组成图形是过空间内一点A而且与$\boldsymbol{n}$垂直平面.这个式子称为一个平面向量表示式.

知识点三　两平面平行或垂直判定及三垂线定理

1.两平面平行或垂直判定方法

设$\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$分别是平面α，β法向量，则轻易得到

$\alpha /\!/ \beta$或α与β重合$\Leftrightarrow$$\underline{\ \boldsymbol{n}_1 /\!/ \boldsymbol{n}_2\ }$；

$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow$$\underline{\ \boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{n}_2\ }$$\Leftrightarrow$$\underline{\ \boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 = 0\ }$.

2.三垂线定理

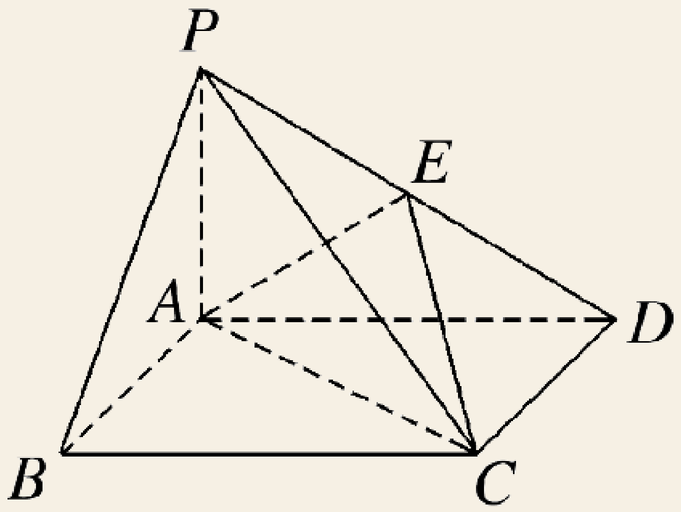
假如在平面内一条直线与平面一条斜线在这个平面内射影垂直，则它也和这条斜线垂直.

题型探究

类型一　求平面法向量

例1　如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为矩形，$PA\perp$平面$ABCD$，E为PD中点.$AB=AP=1$，$AD=\sqrt{3}$，试建立恰当空间直角坐标系，求平面ACE一个法向量.

解答



引申探究

若本例条件不变，试求直线PC一个方向向量和平面PCD一个法向量.

解答

利用待定系数法求平面法向量步骤

(1)设向量：设平面法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$.

(2)选向量：在平面内选取两个不共线向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$.

(3)列方程组：由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$列出方程组.

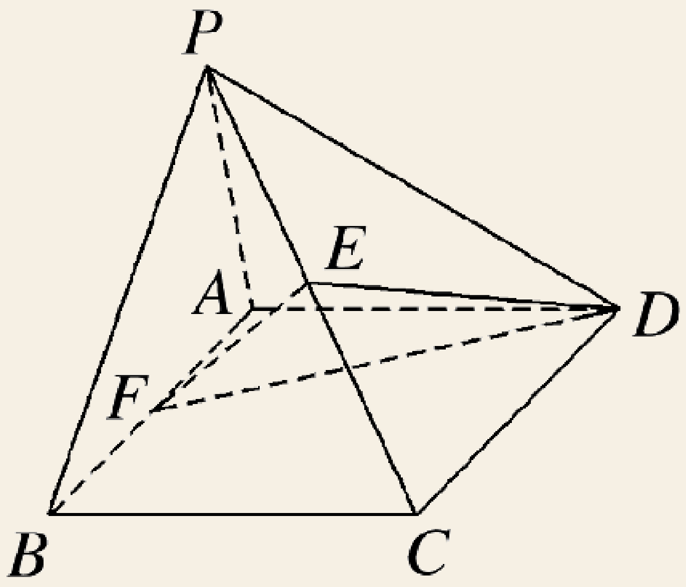
(4)解方程组：$\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0. \end{cases}$

(5)赋非零值：取其中一个为非零值(常取±1).

(6)得结论：得到平面一个法向量.

跟踪训练1　如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是矩形.平面$PAB\perp$平面$ABCD$，$\triangle PAB$是边长为1正三角形，$ABCD$是菱形.$\angle ABC=60°$，E是PC中点，F是AB中点，试建立恰当空间直角坐标系，求平面DEF法向量.

解答



类型二　利用空间向量证实平行问题

例2　已知正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$棱长为2，E，F分别是BB_1，DD_1中点，求证：

(1)FC_1 // 平面ADE；　证实