2024-2025学年湖北省武汉市江岸区高三上学期11月联考数学检测试卷

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|-1<x<1\}$，$B=\{x|0\le x\le 2\}$，则 $A\cup B=$（）

A. $\{x|-1<x<2\}$　　B. $\{x|-1<x\le 2\}$

C. $\{x|0\le x<1\}$　　D. $\{x|0\le x\le 2\}$

【正确答案】B

【分析】根据补集的定义求解即可.

因为 $A=\{x|-1<x<1\}$，$B=\{x|0\le x\le 2\}$，

所以 $A\cup B=\{x|-1<x\le 2\}$.

故选：B.

2. 已知复数 z 在复平面内对应的点为 $(2,-1)$，则 $\frac{4z}{z-\mathrm{i}}=$（）

A. $1+\mathrm{i}$　　B. $3+\mathrm{i}$　　C. $1-\mathrm{i}$　　D. $3-\mathrm{i}$

【正确答案】B

【分析】根据复数的概念和运算法则计算可得.

由题意，因为 $z=2-\mathrm{i}$，所以 $\frac{4z}{z-\mathrm{i}}=\frac{8-4\mathrm{i}}{2-2\mathrm{i}}=\frac{(4-2\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{6+2\mathrm{i}}{2}=3+\mathrm{i}$，

故选：B.

3. 若 $a>b>0$，$c<0$，则下列结论正确的是（）

A. $ac>bc$　　B. $a+c<b+c$

C. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　D. $a-c<b-c$

【正确答案】C

【分析】根据不等式的性质以及作差法可求得结果.

对于 A：因为$a>b>0$，$c<0$，利用不等式的性质得$ac<bc$，故 A 错误；

对于 B：根据不等式可加性可知：$a>b>0$，$c<0$，则$a+c>b+c$，故 B 错误；

对于 C：作差可得$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$，因为$a>b>0$，所以$ab>0,b-a<0$，则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，故 C 正确；

对于 D：$c<0$，则$-c>0$，根据不等式可加性可知：$a-c>b-c$，故 D 错误.

故选：C.

4. 设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$4S_7=7a_7-21$，则$a_3=$（）

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

【正确答案】B

【分析】结合等差数列$\{a_n\}$的前n项和公式以及等差数列的性质即可求出结果.

设设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，因为$S_7=\frac{7(a_1+a_7)}{2}=7a_4$，$4S_7=7a_7-21$，

所以$4(7a_4)=7a_7-21$，所以$28(a_3+d)=7(a_3+4d)-21$，解得$a_3=-1$.

故选：B.

5. 若向量$\overrightarrow{AB}=(2,5)$，$\overrightarrow{AC}=(m,m+1)$，且$A$，$B$，$C$三点共线，则$m=$（）

A. $-\frac{2}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $-\frac{3}{2}$　　D. $\frac{3}{2}$

【正确答案】B

【分析】由题意可得$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{AC}$，根据两向量平行的坐标运算求解即可.

解：由A，B，C三点共线，

得$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{AC}$，

得 $2(m+1)-5m=0$，解得 $m=\frac{2}{3}$.

故选：B.

6. 已知 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)=$（）

A. $\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$　　B. $\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$　　C. $\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$　　D. $\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$

【正确答案】A

【分析】以 $\theta+\frac{\pi}{4}$ 为整体，利用诱导公式结合倍角公式求 $\sin 2\theta,\cos 2\theta$，结合两角和差公式运算求解.

因为 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\theta+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，

且 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，可得 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

则 $\sin 2\theta=\sin\left[2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{2}\right]=-\cos 2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1-2\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5}$，

$\cos 2\theta=\cos\left[2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{2}\right]=\sin 2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{3}{5}$，

所以 $\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\sin 2\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\theta=\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$，

故选：A.

7. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f\left(\frac{1}{3}\right)=0$，则不等式 $\frac{f(x)}{x^2-2}\le 0$ 的解集为（）

A. $\left(-\sqrt{2},-\frac{1}{3}\right]\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$　　B. $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left[-\frac{1}{3},0\right)\cup\left[\frac{1}{3},\sqrt{2}\right)$

C. $\left(-\sqrt{2},-\frac{1}{3}\right]\cup\{0\}\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$　　D. $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left[-\frac{1}{3},0\right]\cup\left[\frac{1}{3},\sqrt{2}\right)$

【正确答案】D

【分析】首先根据函数的奇偶性、单调性，判断$f\left(0\right)=0$，$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,0\right)$上单调递增，且$f\left(-\frac{1}{3}\right)=0$，再结合函数$f\left(x\right)$的单调性解不等式即可.

由题意可得，$f\left(0\right)=0$，$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,0\right)$上单调递增，且$f\left(-\frac{1}{3}\right)=0$，

由$\frac{f\left(x\right)}{x^2-2}\le 0$，得$\begin{cases}f\left(x\right)\le 0\\x^2-2>0\end{cases}$，或$\begin{cases}f\left(x\right)\ge 0\\x^2-2<0\end{cases}$，

$\because f\left(x\right)\le 0$时，$x\le -\frac{1}{3}$，或$0\le x\le \frac{1}{3}$，

又$x^2-2>0$，即$x<-\sqrt{2}$，或$x>\sqrt{2}$，

故$\begin{cases}f\left(x\right)\le 0\\x^2-2>0\end{cases}$，解得$x<-\sqrt{2}$，

$\because f\left(x\right)\ge 0$时，$-\frac{1}{3}\le x\le 0$，或$x\ge \frac{1}{3}$，

又$x^2-2<0$，即$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$，

故$\begin{cases}f\left(x\right)\ge 0\\x^2-2<0\end{cases}$，解得$-\frac{1}{3}\le x\le 0$，或$\frac{1}{3}\le x<\sqrt{2}$，

则不等式$\frac{f\left(x\right)}{x^2-2}\le 0$的解集为：$x\in\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left[-\frac{1}{3},0\right]\cup\left[\frac{1}{3},\sqrt{2}\right)$，

故选：D.

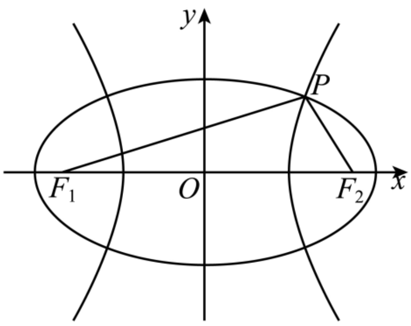
8. 已知椭圆$C_1:\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1(a_1>b_1>0)$与双曲线$C_2:\frac{x^2}{a_2^2}-\frac{y^2}{b_2^2}=1(a_2>0,b_2>0)$有相同的焦点$F_1,F_2$，若点$P$是$C_1$与$C_2$在第一象限内的交点，且$\left|F_1F_2\right|=2\left|PF_2\right|$,设$C_1$与$C_2$的离心率分别为$e_1,e_2$，则$e_2-e_1$的取值范围是

A. $\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$　　B. $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$　　C. $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$　　D. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

【正确答案】D

【分析】设椭圆与双曲线的半焦距为$\left|F_1F_2\right|=2c$,$|PF_1|=t$,由题意可得$a_1-a_2=c$，用e_2表示出e_1，结合二次函数的性质即可求出范围.

】如图所示：



设椭圆与双曲线的焦距为$\left|F_1F_2\right|=2c$,$|PF_1|=t$,由题意可得

$\because t+c=2a_1,t-c=2a_2$

$\therefore t=2a_1-c,t=2a_2+c$，$\therefore 2a_1-c=2a_2+c$，即$a_1-a_2=c$

$\therefore \frac{1}{e_1}-\frac{1}{e_2}=1$，即$e_1=\frac{e_2}{e_2+1}$

$\therefore e_2-e_1=e_2-\frac{e_2}{e_2+1}=\frac{{e_2}^2}{e_2+1}=\frac{1}{\left(\frac{1}{e_2}\right)^2+\frac{1}{e_2}}$,

由$e_2>1$可知$0<\frac{1}{e_2}<1$，令$x=\frac{1}{e_2}\in(0,1)$，$\therefore y=x^2+x\in(0,2)$,

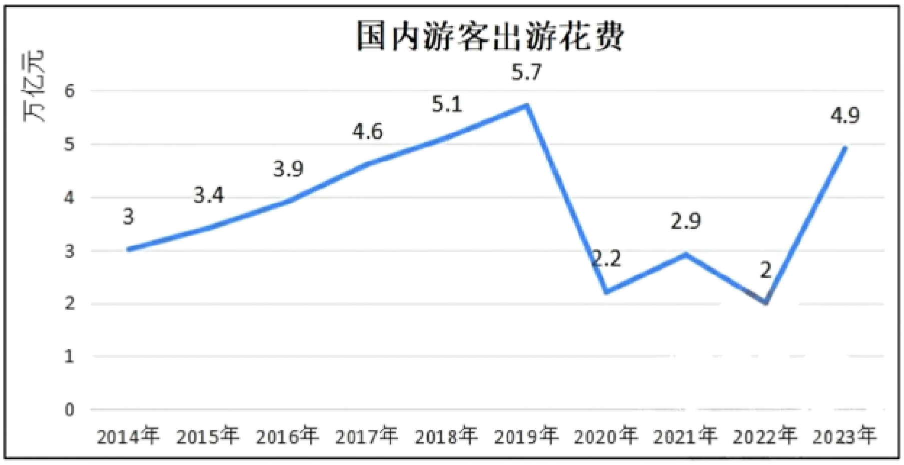
所以$e_2-e_1>\frac{1}{2}$，故选D.

本题主要考查了双曲线和椭圆的性质以及离心率的问题，考查了转化思想，属于中档题.

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的四个选项中，有多项符

合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 近年来，我国持续释放旅游消费潜力，推动旅游业高质量发展，如图所示，是我国从 2014 年到 2023 年的国内游客出游花费统计，下列说法正确的是（）



A. 从 2014 年到 2023 年，这 10 年的国内游客出游花费的第 75 百分位数为 4.9

B. 从 2014 年到 2023 年，这 10 年的国内游客出游花费的中位数为 3.4

C. 从 2014 年到 2023 年，这 10 年的国内游客出游花费的极差为 2.7

D. 从 2014 年到 2019 年，国内游客出游花费呈现上升趋势

【正确答案】AD

【分析】根据图中数据，将其从小到大一排列，即可逐一求解.

由图可知：10 年游客出游花费从小到大排列为

2，2.2，2.9，3，3.4，3.9，4.6，4.9，5.1，5.7，故$10\times75\%=7.5$，故第 75 百分位数为第八个数 4.9，A 正确，

中位数为$\dfrac{3.4+3.9}{2}=3.65$，故 B 错误，

极差为$5.7-2=3.7$，C 错误，

由折线图可知从 2014 年到 2019 年，国内游客出游花费呈现上升趋势，D 正确，

故选:AD

10. 记等比数列$\{a_n\}$的前 n 项积为T_n，且$a_5,a_6\in\mathbf{N}^*$，若$T_{10}=6^5$，则a_5+a_6的可能取值为（）

A. -7　　B. 5　　C. 6　　D. 7

【正确答案】BD

【分析】利用等比数列的性质得出$a_5a_6=6$，再把6拆成两个正整数的积，只有$2\times3,1\times6$两种，从而可得a_5+a_6.

由题意$T_{10}=a_1a_2\cdots a_{10}=(a_5a_6)^5=6^5$，

$\therefore a_5a_6=6$，又$a_5,a_6\in\mathbf{N}^*$，而$a_5a_6=6=1\times6=2\times3$，

$\therefore a_5+a_6=1+6=7$或$a_5+a_6=2+3=5$，

故选：BD.

11. 已知点P是左、右焦点为F_1，F_2的椭圆C：$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$上的动点，则（）

A. 若$\angle F_1PF_2=90°$，则$\triangle F_1PF_2$的面积为$4\sqrt{2}$

B. 使$\triangle F_1PF_2$为直角三角形的点P有6个

C. $|PF_1|-2|PF_2|$的最大值为$6-2\sqrt{2}$

D. 若$M\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$，则$|PF_1|+|PM|$的最大、最小值分别为$4\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}$和$4\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

【正确答案】BCD

【分析】根据焦点三角形面积的相关结论即可判断A；结合椭圆性质可判断B；结合椭圆定义可求线段和差的最值，判断CD.

A选项：由椭圆方程$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$，所以$a^2=8$，$b^2=4$，所以$c^2=a^2-b^2=4$，

所以$\triangle F_1PF_2$的面积为$S=b^2\tan\dfrac{\angle F_1PF_2}{2}=4$，故A错误；

B选项：当$PF_1\perp F_1F_2$或$PF_2\perp F_1F_2$时$\triangle F_1PF_2$为直角三角形，这样的点P有4个，

设椭圆的上下顶点分别为S，T，则$|F_1F_2|=4,|OS|=2,\therefore|OS|=\dfrac{1}{2}|F_1F_2|$,同理

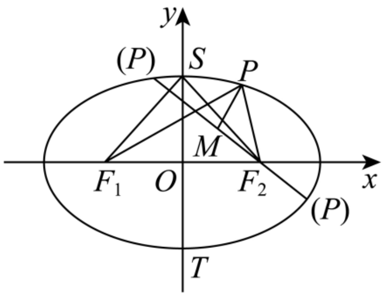
$|OT|=\frac{1}{2}|F_1F_2|$，

知$\angle F_1SF_2=\angle F_1TF_2=90^{\circ}$，所以当$P$位于椭圆的上、下顶点时$\triangle F_1PF_2$也为直角三角形，其他位置不满足，满足条件的点$P$有 6 个，故 B 正确；

C 选项：由于$|PF_1|-2|PF_2|=2a-|PF_2|-2|PF_2|=4\sqrt{2}-3|PF_2|$，

所以当$|PF_2|$最小即$|PF_2|=a-c=2\sqrt{2}-2$时，$|PF_1|-2|PF_2|$取得最大值$6-2\sqrt{2}$，故 C 正确；

D 选项：因为$|PF_1|+|PM|=2a-|PF_2|+|PM|=4\sqrt{2}+|PM|-|PF_2|$，



又$||PM|-|PF_2||\le|MF_2|=\frac{\sqrt{5}}{2}$，则$|PF_1|+|PM|$的最大、最小值分别为$4\sqrt{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$和$4\sqrt{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$，

当点P位于直线MF_2与椭圆的交点时取等号，故 D 正确.

故选：BCD

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 某超市计划按月订购一种冷饮，根据往年销售经验，每天需求量与当天最高气温（单位：℃）有关.如果最高气温不低于 25℃，需求量为 600 瓶；如果最高气温位于区间$[20℃,25℃)$，需求量为 300 瓶；如果最高气温低于 20℃，需求量为 100 瓶.为了确定 6 月份的订购计划，统计了前三年 6 月份各天的最高气温数据，得到下面的频数分布表：

最高气温	[15，20）	[20，25）	[25，30）	[30，35）	[35，40）
天数	4	5	25	38	18

以最高气温位于各区间的频率估计最高气温位于该区间的概率.若 6 月份这种冷饮一天的需求量不超过x瓶的概率估计值为 0.1，则$x=$__________.

【正确答案】300

【分析】根据频率分布表的频率估计概率，进而得解.

由表可知，最高气温低于$25℃$的频率为：$\frac{4+5}{90}=0.1$，

所以6月份这种冷饮一天的需求量不超过300瓶的概率估计值为0.1.

故答案为.300

13. 已知直线l倾斜角的余弦值为$-\frac{\sqrt{5}}{5}$，且经过点$(2,1)$，则直线l的方程为________.

【正确答案】$2x+y-5=0$.

【分析】由同角三角函数的基本关系求出直线斜率，点斜式求出直线方程即可.

设直线的倾斜角为α，由题意知$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，

则$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以$k=\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-2$，

又直线过点$(2,1)$，

所以直线方程为$y-1=-2\left(x-2\right)$，

即直线方程为$2x+y-5=0$.

故$2x+y-5=0$

14. 1557年，英国数学家列科尔德首先使用符号“=”表示相等关系，在莱布尼茨和其他数学家的共同努力下，这一符号才逐渐被世人所公认．1631年，英国数学家哈里奥特开始采用符号“>”与“<”，分别表示“大于”与“小于”，这就是我们使用的不等号．以上内容是某校数学课外兴趣小组在研究数学符号发展史时查阅到的资料，并组织小组成员研究了如下函数与不等式的综合问题：已知函数$f\left(x\right)=2x^3-2mx+m\left(m\in\mathbf{R}\right)$，$g\left(x\right)=-3x^2$，若关于$x$的不等

式$f\left(x\right)\le g\left(x\right)$在区间$\left[1,+\infty\right)$上有解，则实数$m$的取值范围是______.

【正确答案】$\left[5,+\infty\right)$

【分析】分离参数得$m\ge\dfrac{2x^3+3x^2}{2x-1}$，设$h\left(x\right)=\dfrac{2x^3+3x^2}{2x-1}\left(x\ge1\right)$，利用导数求最值.

由题意，知$2x^3-2mx+m\le-3x^2$，即$2x^3+3x^2\le m\left(2x-1\right)$.

因为$x\in\left[1,+\infty\right)$，所以$m\ge\dfrac{2x^3+3x^2}{2x-1}$在$\left[1,+\infty\right)$上有解，只需$m\ge\left(\dfrac{2x^3+3x^2}{2x-1}\right)_{\min}$.

设$h\left(x\right)=\dfrac{2x^3+3x^2}{2x-1}\left(x\ge1\right)$，对函数$h\left(x\right)$求导，

得$h'\left(x\right)=\dfrac{8x^3-6x}{\left(2x-1\right)^2}=\dfrac{2x\left(2x+\sqrt{3}\right)\left(2x-\sqrt{3}\right)}{\left(2x-1\right)^2}>0$，

所以函数$h\left(x\right)$在$\left[1,+\infty\right)$上单调递增，所以$h\left(x\right)_{\min}=h\left(1\right)=5$，所以$m\ge5$.

故$\left[5,+\infty\right)$.

结论点睛：本题考查不等式的恒成立问题，可按如下规则转化：

一般地，已知函数$y=f(x),x\in[a,b]$，$y=g(x),x\in[c,d]$

（1）若$\forall x_1\in\left[a,b\right]$，$\forall x_2\in\left[c,d\right]$，总有$f\left(x_1\right)<g\left(x_2\right)$成立，故$f\left(x\right)_{\max}<g\left(x\right)_{\min}$；

（2）若$\forall x_1\in\left[a,b\right]$，$\exists x_2\in\left[c,d\right]$，有$f\left(x_1\right)<g\left(x_2\right)$成立，故$f\left(x\right)_{\max}<g\left(x\right)_{\max}$；

（3）若$\exists x_1\in\left[a,b\right]$，$\exists x_2\in\left[c,d\right]$，有$f\left(x_1\right)<g\left(x_2\right)$成立，故$f\left(x\right)_{\min}<g\left(x\right)_{\min}$；

（4）若$\forall x_1\in\left[a,b\right]$，$\exists x_2\in\left[c,d\right]$，有$f\left(x_1\right)=g\left(x_2\right)$，则$f(x)$的值域是$g(x)$值域的子集.

四、解答题：本题共5小题，共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 在$\vee ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c.已知$a>c$，$a=5$，$b=6$，$\sin C=\dfrac{3}{5}$.

（1）求c和$\sin A$的值；