附件 4

广西民族大学 2007 年硕士研究生入学考试试题

（所有试题答案必须写在答题纸上，答案写在试卷上无效）

学科专业：基础数学、计算数学、应用数学　　　　研究方向：所有方向

考试科目：　高等代数　　　　　　　　　　　　　试卷代号：A

一、计算行列式(20 分)

1. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$；　2. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}$ $(n \geq 2)$（注：对角线上元素分别为$1,2,\cdots n$，其余元素为 3）

二、(15 分)设 b 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个解，$a_1,a_2,\cdots,a_{n-r}$ 是对应齐次线性方程组的一个基础解系，证明：（1）$a_1,a_2,\cdots,a_{n-r},b$ 线性无关；（2）$a_1+b,a_2+b,\cdots,a_{n-r}+b,b$ 线性无关。

三、(15 分) a 取何值时下列方程组有解？并求其解：

$$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+ax_2+x_3=a \\ x_1+x_2+ax_3=a^2 \end{cases}$$

四、(20 分)证明：$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$，其中 A 是 $n\times n$ 矩阵（$n>2$）。

五、(15 分) 设 A 是一个 n 阶实对称矩阵，且 $|A|<0$。证明：存在实 n 维向量 x 使得 $x'Ax<0$。

六、(15 分)设有向量组 $a_1=(1,0,2,1), a_2=(2,0,1,-1), a_3=(3,0,3,0), b_1=(1,1,0,1), b_2=(4,1,3,1)$，令 $V_1=L(a_1,a_2,a_3), V_2=L(b_1,b_2)$。求 V_1+V_2 的维数，并求一组基。

七、(15 分)设 T 为 n 维空间的一个线性变换，且 $T^2=I$。证明：（1）T 的特征根只能是 ± 1；（2）$V=V_1 \oplus V_2$，其中 V_1 是 T 的属于特征根 1 的特征子空间，V_2 是 T 的属于特征根 -1 的特征子空间。

八、(15 分)设 $A=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$，求正交矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵。

九、(20 分)设 n 阶实矩阵 A 的特征值全为实数，且 A 的一阶主子式之和、二阶主子式之和全为 0，证明 $A^n=O$。

广西民族大学 2008 年硕士研究生入学考试试题

（所有试题答案必须写在答题纸上，答案写在试卷上无效）

学科专业：基础数学、计算数学、应用数学　　研究方向：

考试科目：　高等代数　　试卷代号：　A 卷

一(15 分)、若 $f(x),g(x)$ 不全为零, 且 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$，则 $(u(x),v(x))=1$

二（15 分)、计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \end{vmatrix}$

三(20 分)、求解方程组 $\begin{cases} (a+3)x_1+x_2+2x_3=a \\ ax_1+(a-1)x_2+x_3=2a \\ 3(a+1)x_1+ax_2+(a+3)x_3=3 \end{cases}$

四(15 分)、设向量 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出，证明：表示法唯一的充分必要条件是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关。

五(15 分)、设 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$ 是一实二次型，若有实 n 维向量 X_1,X_2 使得 $X_1'AX_1>0$，$X_2'AX_2<0$。证明存在非零实 n 维向量 X_3 使得 $X_3'AX_3=0$。

六(15 分)、求由向量 α_i 生成的子空间与由向量 β_i 生成的子空间的交的基和维数，　设

$$\begin{cases} \alpha_1=(1,2,1,0) \\ \alpha_2=(-1,1,1,1) \end{cases}, \begin{cases} \beta_1=(2,-1,0,1) \\ \beta_2=(1,-1,3,7) \end{cases}$$

七(20 分)、设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 是四维线性空间 V 的一组基，　已知线性变换 f 在这组基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

求

（1）线性变换 f 在基 $\eta_1=\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_4,\eta_2=3\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4,\eta_3=\varepsilon_3+\varepsilon_4,\eta_4=2\varepsilon_4$ 下的矩阵

（2）求线性变换 f 的核和值域

八(15 分)、设 B 为一 $r\times r$ 矩阵，C 为一 $r\times n$ 矩阵，且秩$(C)=r$，证明：1）若 $BC=0$，则 $B=0$；2）若 $BC=C$，则 $B=E$

九(20 分)、设 V 是 n 维线性空间，f,g 是 V 上的线性变换，且 f 有 n 个互异的特征根，证明 $fg=gf$ 当且仅当 g 是 $f^0=I,f,f^2,\cdots,f^{n-1}$ 的线性组合