基本不等式的综合应用

考情分析：基本不等式是高考的高频考点，通常与基本初等函数、解三角形、立体几何、解析几何等知识综合考查，出现在选填题或解答题的解题过程中.2022年新高考Ⅰ卷出现在第18题，考查了用正弦定理边角互化与基本不等式的综合，难度中等；2021年新高考Ⅰ卷出现在第5题，考查了椭圆定义与基本不等式的综合，较容易.

目录

核心考向

HE XIN KAO XIANG

考向一　基本不等式与基本初等函数的综合

例 1　(1)(2024·开封模拟)已知 $a>1$，$b>1$，且 $\log_2\sqrt{a}=\log_b 4$，则 ab 的最小值为(　　)

A．4　　B．8　　C．16　　D．32

解析　因为 $\log_2\sqrt{a}=\log_b 4$，所以 $\log_2 a\cdot\log_2 b=4$，所以 $\log_2(ab)=\log_2 a+\log_2 b\geqslant 2\sqrt{\log_2 a\cdot\log_2 b}=4$，当且仅当 $\log_2 a=\log_2 b=2$，即 $a=b=4$ 时取等号，所以 $(ab)_{\min}=2^4=16$.故选 C.

(2)已知角 α，β 均为锐角，$\tan\beta=\dfrac{\tan\alpha}{2}$，则当 $\tan\alpha=$ ____$\sqrt{2}$____时，$\tan(\alpha-\beta)$取得最大值____$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$____.

解析　设 $\tan\beta=k$，则 $\tan\alpha=2k$，由角 α，β均为锐角得 $k>0$，$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{k}{1+2k^2}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{k}+2k}\leqslant\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1}{k}\cdot 2k}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，当且仅当$\dfrac{1}{k}=2k$，即 $k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，等号成立，此时 $\tan\alpha=\sqrt{2}$，所以当 $\tan\alpha=\sqrt{2}$时，$\tan(\alpha-\beta)$取得最大值$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

答题启示 基本不等式与基本初等函数的常见衔接点

应用基本不等式求最值的关键点之一是“和或积为定值”，在基本初等函数中常见的与此有联系的点如下：

$a^x\cdot a^y=a^{x+y}(a>0$，且 $a\neq1)$；$\log_a x+\log_a y=\log_a(xy)(a>0$，且 $a\neq1)$；

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$，$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$等.

对点训练 (2023·日照一模)已知 $x>0$，$y>0$，设 p：$2^x+2^y\geqslant 4$，q：$xy\geqslant 1$，则 p 是 q 的(　　)

A．充分不必要条件

B．必要不充分条件

C．充要条件

D．既不充分也不必要条件

解析　当 $x=\frac{1}{3}$，$y=2$ 时，$2^{\frac{1}{3}}+2^{2}\geqslant 4$，满足 $2^{x}+2^{y}\geqslant 4$，但 $xy=\frac{1}{3}\times 2=\frac{2}{3}<1$，不满足 $xy\geqslant 1$，所以 p 不是 q 的充分条件；当 $xy\geqslant 1$，$x>0$，$y>0$ 时，$1\leqslant xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^{2}$，即 $x+y\geqslant 2$，当且仅当 $x=y$ 时取等号，所以 $2^{x+y}\geqslant 2^{2}=4$，即 $2^{x}\cdot 2^{y}\geqslant 4$，又 $4\leqslant 2^{x}\cdot 2^{y}\leqslant\left(\frac{2^{x}+2^{y}}{2}\right)^{2}$，当且仅当 $x=y$ 时取等号，解得 $2^{x}+2^{y}\geqslant 4$，所以 p 是 q 的必要条件．所以 p 是 q 的必要不充分条件．故选 B.

考向二　基本不等式与向量、解三角形的综合

例 2 (1)在$\triangle ABC$中，E为AC上一点，$\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AE}$，$P$为$BE$上任一点，若$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}(m>0，n>0)$，则$\dfrac{3}{m}+\dfrac{1}{n}$的最小值是(　　)

A．9　　B．10　　C．11　　D．12

答案

解析　由题意可知$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AB}+3n\overrightarrow{AE}$，$P$，$B$，$E$ 三点共线，则 $m+3n=1$，所以$\frac{3}{m}+\frac{1}{n}=\left(\frac{3}{m}+\frac{1}{n}\right)(m+3n)=6+\frac{9n}{m}+\frac{m}{n}\geqslant 6+2\sqrt{\frac{9n}{m}\cdot\frac{m}{n}}=12$，当且仅当 $m=\frac{1}{2}$，$n=\frac{1}{6}$时，等号成立．所以$\frac{3}{m}+\frac{1}{n}$的最小值是 12.

(2)(2022·新高考Ⅰ卷改编)记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\sin B=-\cos C$，求$\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$的最小值.

解　因为$\sin B=-\cos C>0$，

所以$\dfrac{\pi}{2}<C<\pi$，$0<B<\dfrac{\pi}{2}$，

而$\sin B=-\cos C=\sin\left(C-\dfrac{\pi}{2}\right)$，

所以$C=\dfrac{\pi}{2}+B$，即$A=\dfrac{\pi}{2}-2B$，