深圳市高级中学 2024 届高三第三次诊断测试

数学试题

（满分 150 分， 考试时间 120 分钟） 2024 年 1 月

一、 选择题：本题共 8 小题， 每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中， 只有一项是符合题目要求的．

1. 已知全集为 U，集合 M，N 满足 $M\subseteq N\subseteq U$，则下列运算结果一定为 U 的是（　　）

A. $M\cup N$　　B. $\left(\complement_U N\right)\cup\left(\complement_U M\right)$　　C. $M\cup\left(\complement_U N\right)$　　D. $N\cup\left(\complement_U M\right)$

2. 若复数 $z=2-\mathrm{i}$，其中 i 是虚数单位，则下列结论正确的是（　　）

A. z 的虚部为 i　　B. $|z|=5$　　C. $\overline{z}=-2-\mathrm{i}$　　D. $z^2=3-4i$

3. 设 $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$ 是两个不共线的向量，已知 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{e_1}-k\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{e_1}+3\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}$，若三点 A，B，D 共线，则 k 的值为（　　）

A. －8　　B. 8　　C. 6　　D. －6

4. 已知 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}$，则 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)$ 的值为（　　）

A. $\frac{3}{8}$　　B. $\frac{5}{8}$　　C. 1　　D. $\frac{9}{8}$

5. 甲、 乙、丙等 5 名同学参加政史地三科知识竞赛，每人随机选择一科参加竞赛，则甲和乙不参加同一科，甲和丙参加同一科竞赛，且这三科竞赛都有人参加的概率为（　　）

A. $\frac{4}{81}$　　B. $\frac{2}{27}$　　C. $\frac{10}{81}$　　D. $\frac{4}{27}$

6. 函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$ 恒有 $f(x)\le f(\pi)$，且 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增，则 ω 的值为（　　）

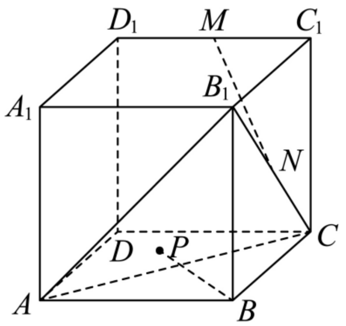
A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{5}{3}$　　C. $\frac{7}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{7}{3}$

7. 设 $a=2\sqrt{\mathrm{e}},b=\frac{2}{\ln 2},c=\frac{\mathrm{e}^2}{4-\ln 4},d=\frac{1}{2\ln 2}$ 则（　　）

A. $c<d<a<b$　　B. $d<b<a<c$

C. $d<b<c<a$　　D. $d<c<b<a$

8. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 3，点 P 是平面 ACB_1 内的动点，M，N 分别为 C_1D_1，B_1C 的中点，若直线 BP 与 MN 所成的角为 θ，且 $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$，则动点 P 的轨迹所围成的图形的面积为（　　）



A. $\frac{3\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{4}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多小个合题最需求．全的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 已知一组样本数据 $x_i\left(i=1,2,3,\cdots,20\right)$，其中 $x_i\left(i=1,2,3,\cdots,20\right)$ 为正实数.满足 $x_1\le x_2\le x_3\le\cdots\le x_{20}$，下列说法正确的是（　　）

A. 样本数据的第 80 百分位数为 x_{16}

B. 去掉样本的一个数据，样本数据的极差可能不变

C. 若数据的频率分布直方图为单峰不对称，且在左边“拖尾”，则样本数据的平均数小于中位数

D. 样本数据的方差 $s^2=\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}x_i^2-16$，则这组样本数据的总和等于 80

10. 已知抛物线 C：$y^2=8x$ 的焦点为 F，直线 l 过点 F 且与抛物线 C 交于 $M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$ 两点，其中 $y_1>0$，且 $\frac{|MF|}{|NF|}=\frac{1}{2}$，则（　　）

A. 直线 l 的斜率为 $-\frac{\sqrt{2}}{4}$　　B. $x_1x_2=4$

C. $\left|MN\right|=9$ D. $\triangle MON$（点 O 为坐标原点）的面积为6

11. 设数列$\left\{a_n\right\}$前n项和为S_n，满足$(a_n-1)^2=4(100-S_n)$，$n\in\mathrm{N}^*$且$a_1>0,a_n+a_{n-1}\neq 0\left(n\geq 2\right)$，则下列选项正确的是（　　）

A. $a_n=-2n+21$

B. 数列$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$为等差数列

C. 当$n=11$时S_n有最大值

D. 设$b_n=a_na_{n+1}a_{n+2}$，则当$n=8$或$n=10$时数列$\left\{b_n\right\}$的前n项和取最大值

12. 函数$f\left(x\right)=\dfrac{ax}{\mathrm{e}^x}$和$g\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{ax}$有相同的最大值$b$，直线$y=m$与两曲线$y=f\left(x\right)$和$y=g\left(x\right)$恰好有三个交点，从左到右三个交点横坐标依次为$x_1,x_2,x_3$，则下列说法正确的是（　　）

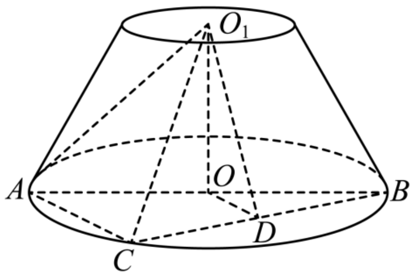
A. $a=1$ B. $b=\dfrac{1}{e}$ C. $x_1+x_3=2x_2$ D. $x_1x_3=x_2^2$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

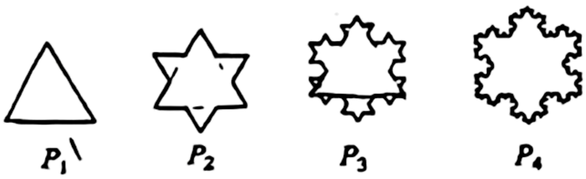
13. 已知$\left(\dfrac{1}{x}+my\right)\left(2x-y\right)^5$的展开式中． x^2y^4的系数为80， 则 m 的值为______.

14. 过原点的直线l与双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$的左、右两支分别交于$M$，$N$两点，$F\left(2,0\right)$为$C$的右焦点，若$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0$，且$\left|\overrightarrow{FM}\right|+\left|\overrightarrow{FN}\right|=2\sqrt{5}$，则双曲线$C$的方程为________.

15. 如图， 在圆台 OO_1 中，$OO_1=\sqrt{3}$，点 C 是底面圆周上异于 A、B 的一点，$AC=2$，点 D 是 BC 的中点， l 为平面 O_1AC 与平面 O_1OD 的交线， 则交线l与平面 O_1BC 所成角的大小为_________.



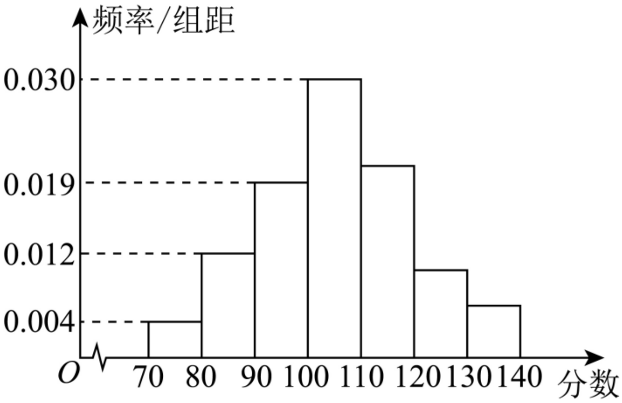
16. 第二十四届北京冬奥会开幕式上由96片小雪花组成的大雪花惊艳了全世界，数学中也有一朵英丽的雪花————“科赫雪花”. 它的绘制规则是：任意画一个正三角形P_1，并把每一条边三等分， 以三等分后的每边的中间一段为边向外作正三角形，并把这“中间一段”擦掉，形成雪花曲线P_2，重复上述两步， 画出更小的三角形，一直重复，直到无穷，形成雪花曲线$P_3, P_4, \cdots, P_n \cdots$



设雪花曲线P_n周长为l_n，面积为S_n，若 P_1的边长为1，则l_4=________，S_n = ________

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. 为了响应教育部门疫情期间“停课不停学”的号召，某校实施网络授课，为了检验学生上网课的效果，在高三年级进行了一次网络模拟考试，从中抽取了100人的数学成绩，绘制成频率分布直方图（如下图所示），其中数学成绩落在区间[110，120)，[120，130)，[130，140]的频率之比为4：2：1.



（1）根据频率分布直方图求学生成绩在区间[110，120）的频率，并求抽取的这100名同学数学成绩的中位数

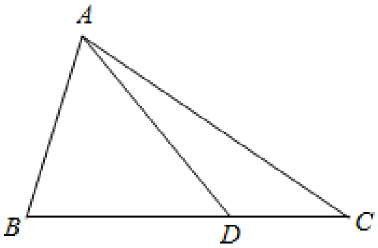
（2）若将频率视为概率，从全校高三年级学生中随机抽取 3 个人，记抽取的 3 人成绩在[100，130）内的学生人数为 X，求 X 的分布列与数学期望.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3, a_{n+1}=2a_n+2^{n+2}-n^2+2n+1$.

（1）求证：$\left\{\dfrac{a_n-n^2}{2^n}\right\}$ 是等差数列；

（2）设 $b_n=\left[\dfrac{a_n}{2^n}\right]$（$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数），求使得 $b_1+b_2+\cdots+b_n\le 100$ 成立的最大整数 n 的值.

19. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=2$，$3a\cos B-b\cos C=c\cos B$，点 D 在线段 BC 上.



（1）若 $\angle ADC=\dfrac{3\pi}{4}$，求 AD 的长；

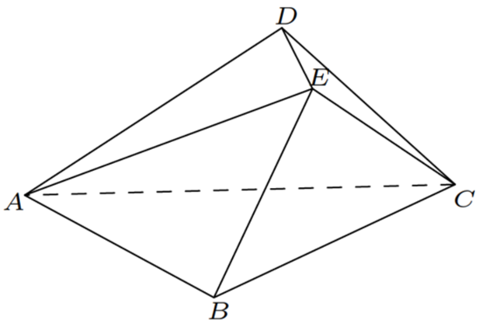
（2）若 $BD=2DC$，$\triangle ACD$ 的面积为 $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$，求 $\dfrac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}$ 的值.

20. 已知椭圆 $C:\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A,B，长轴长为短轴长的 2 倍，点 P 在 C 上运动，且 $\triangle ABP$ 面积的最大值为 8.

（1）求 C 的方程；

（2）若直线 l 经过点 $Q(1,0)$，交 C 于 M,N 两点，直线 AM,BN 分别交直线 $x=4$ 于 D，E 两点，试问 $\triangle ABD$ 与 $\triangle AQE$ 的面积之比是否为定值？若是，求出该定值；若不是，说明理由.

21. 如图，在几何体 $ABCDE$ 中，底面 ABC 为以 AC 为斜边的等腰直角三角形.已知平面 $ABC\perp$ 平面 ACD，平面 $ABC\perp$ 平面 $BCE, DE\parallel$ 平面 $ABC, AD\perp DE$.



（1）证明：$DE \perp$ 平面 ACD；

（2）若 $AC = 2CD = 2$，设 M 为棱 BE 的中点，求当几何体 $ABCDE$ 的体积取最大值时 AM 与 CD 所成角的正切值.

22. 已知函数 $f\left(x\right) = ax\ln x - x^2 + \left(3 - a\right)x + 1\left(a \in \mathrm{R}\right)$.

（1）当 $a = 1$ 时，求曲线 $f\left(x\right)$ 在 $\left(1, f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）若 $f\left(x\right)$ 存在两个极值点 $x_1, x_2\left(x_1 < x_2\right)$，

①求 a 的取值范围；

②当 $\dfrac{x_2}{x_1}$ 取得最小时，求 a 的值.

深圳市高级中学2024届高三第三次诊断测试

数学试题

（满分150 分， 考试时间120 分钟） 2024 年1 月

一、 选择题：本题共8小题， 每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中， 只有一项是符合题目要求的．

1. 已知全集为U，集合M，N满足$M\subseteq N\subseteq U$，则下列运算结果一定为U的是（　　）

A. $M\cup N$　　B. $\left(\complement_U N\right)\cup\left(\complement_U M\right)$　　C. $M\cup\left(\complement_U N\right)$　　D. $N\cup\left(\complement_U M\right)$

【答案】D

【解析】

【分析】根据集合间的基本关系及集合的基本运算，借助Venn图即可求解.

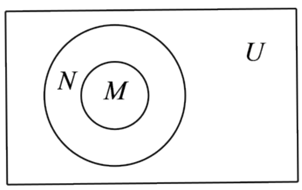
【详解】由$M\subseteq N\subseteq U$得当$N\subsetneqq U$时，$M\cup N=N\neq U$，故选项A不正确；

$\left(\complement_U N\right)\cup\left(\complement_U M\right)=\complement_U\left(M\cap N\right)=\complement_U M$，当$M\neq\varnothing$时，$\complement_U M\neq U$，故选项B不正确；

当$M\subsetneqq N$时，$M\cup\left(\complement_U N\right)\neq U$，故选项C不正确；

因为$M\subseteq N\subseteq U$，所以$N\cup\left(\complement_U M\right)=U$，故选项D正确.

故选：D.



2. 若复数$z=2-\mathrm{i}$，其中i是虚数单位，则下列结论正确的是（　　）

A. z的虚部为i　　B. $|z|=5$　　C. $\overline{z}=-2-\mathrm{i}$　　D. $z^2=3-4i$

【答案】D

【解析】

【分析】$z=2-\mathrm{i}$

根据复数的虚部、模、共轭复数、复数运算等知识求得正确答案.

【详解】复数$z=2-\mathrm{i}$的虚部为-1，A 选项错误.

$|z|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$，B 选项错误.

$\overline{z}=2+\mathrm{i}$，C 选项错误.

$z^2=(2-\mathrm{i})^2=4-4\mathrm{i}+\mathrm{i}^2=3-4\mathrm{i}$，D 选项正确.

故选：D

3. 设$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$是两个不共线的向量，已知$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{e_1}-k\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{e_1}+3\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}$，若三点$A$，$B$，$D$共线，则$k$的值为（　　）

A. －8　　B. 8　　C. 6　　D. －6

【答案】B

【解析】

【分析】根据三点A，B，D共线，可得存在唯一实数λ使$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{DB}$，进而可得出答案.

【详解】由已知得$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{e_1}+3\overrightarrow{e_2}-\left(2\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}\right)=-\overrightarrow{e_1}+4\overrightarrow{e_2}$，

$\because$三点A，B，D共线，$\therefore$存在唯一实数λ使$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{DB}$，

$\therefore 2\overrightarrow{e_1}-k\overrightarrow{e_2}=\lambda\left(-\overrightarrow{e_1}+4\overrightarrow{e_2}\right)=-\lambda\overrightarrow{e_1}+4\lambda\overrightarrow{e_2}$，

$\therefore\begin{cases}2=-\lambda\\-k=4\lambda\end{cases}$，解得$\begin{cases}\lambda=-2\\k=8\end{cases}$.

故选：B.

4. 已知$\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{4}$，则 $\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{12}\right)$的值为（　　）

A. $\dfrac{3}{8}$　　B. $\dfrac{5}{8}$　　C. 1　　D. $\dfrac{9}{8}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用二倍角公式及诱导公式计算即可.

【详解】因为$\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{4}$，

所以$\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=2\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-1=\frac{1}{8}=\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$，

$2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)-1=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}\Rightarrow\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{7}{8}$，

故$\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=1$.

故选：C

5. 甲、 乙、丙等 5 名同学参加政史地三科知识竞赛，每人随机选择一科参加竞赛，则甲和乙不参加同一科，甲和丙参加同一科竞赛，且这三科竞赛都有人参加的概率为（　　）

A. $\frac{4}{81}$　　B. $\frac{2}{27}$　　C. $\frac{10}{81}$　　D. $\frac{4}{27}$

【答案】C

【解析】

【分析】由排列组合知识结合概率公式即可得解.

【详解】因为甲和乙不参加同一科，甲和丙参加同一科竞赛，若每个同学可以自由选择，所以 3 科的选择数有 2，2，1 和 3，1，1 两种分配方案，

当分配方案为 2，2，1 时，共有$C_3^2A_3^3=18$种不同的选择方案；

当分配方案为 3，1，1 时，共有$C_2^1A_3^3=12$种不同的选择方案；

所以满足要求的不同选择种数为$18+12=30$；

所以甲和乙不参加同一科，甲和丙参加同一科竞赛，且这三科竞赛都有人参加的概率为$\frac{30}{3^5}=\frac{10}{81}$.

故选：C.

6. 函数$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$恒有$f(x)\le f(\pi)$，且$f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$上单调递增，则$\omega$的值为（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{5}{3}$　　C. $\frac{7}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$或$\frac{7}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据正弦函数的图象性质，利用周期性和单调性以及最值求解.

【详解】因为函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 恒有 $f(x)\le f(\pi)$,

所以 $\omega\pi+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z$,解得 $\omega=\dfrac{1}{3}+2k, k\in Z$,

又因为 $f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right]$，上单调递增，所以 $\omega>0$，

且 $\dfrac{1}{2}T=\dfrac{\pi}{\omega}\ge\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{6}$，所以 $0<\omega\le 3$，

结合 $\omega=\dfrac{1}{3}+2k, k\in Z$ 可得 ω 的值为 $\dfrac{1}{3}$ 或 $\dfrac{7}{3}$，

经检验，当 ω 的值为 $\dfrac{1}{3}$ 时，

由 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\le\dfrac{1}{3}x+\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z$,

解得 $-2\pi+6k\pi\le x\le\pi+6k\pi, k\in Z$,

所以 $f(x)$ 在 $[-2\pi,\pi]$ 上单调递增，满足题意，

当 ω 的值为 $\dfrac{7}{3}$ 时，

由 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\le\dfrac{7}{3}x+\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z$,

解得 $-\dfrac{2\pi}{7}+\dfrac{6}{7}k\pi\le x\le\dfrac{\pi}{7}+\dfrac{6}{7}k\pi, k\in Z$,

所以 $f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{2\pi}{7},\dfrac{\pi}{7}\right]$ 上单调递增，不满足题意，

故选:A.

7. 设 $a=2\sqrt{e}, b=\dfrac{2}{\ln 2}, c=\dfrac{e^2}{4-\ln 4}, d=\dfrac{1}{2\ln 2}$ 则（　　）

A. $c<d<a<b$　　B. $d<b<a<c$

C. $d<b<c<a$　　D. $d<c<b<a$

【答案】D

【解析】

【分析】构造函数 $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ 利用导数研究其单调性判定大小即可.

【详解】令 $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}(x>0, x\ne 1)$,

则$a=\dfrac{\sqrt{e}}{\frac{1}{2}}=f\left(\sqrt{e}\right),b=\dfrac{2}{\ln 2}=f\left(2\right),c=\dfrac{e^2}{4-\ln 4}=\dfrac{\frac{e^2}{2}}{\ln\frac{e^2}{2}}=f\left(\dfrac{e^2}{2}\right)$，

易知$f'\left(x\right)=\dfrac{\ln x-1}{\left(\ln x\right)^2}$，显然$x\in\left(0,1\right)$和$x\in\left(1,e\right)$时，$f'\left(x\right)<0$，即$f\left(x\right)$在$\left(0,1\right)$和$\left(1,e\right)$上单调递减，$x\in\left(e,+\infty\right)$时，$f'\left(x\right)>0$，即$f\left(x\right)$在$\left(e,+\infty\right)$上单调递增，

易知$1<\sqrt{e}<\sqrt{4}=2<e<\dfrac{e^2}{2}<4$，且$f\left(2\right)=\dfrac{2}{\ln 2}=f\left(4\right)=\dfrac{4}{\ln 4}$，

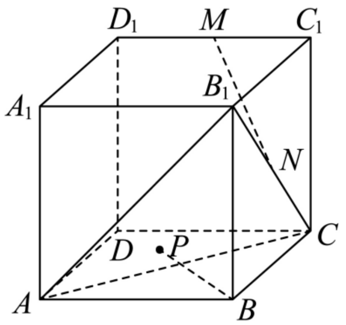
所以$f\left(\sqrt{e}\right)>f\left(2\right)=f\left(4\right)>f\left(\dfrac{e^2}{2}\right)\Rightarrow a>b>c$，

又$e^2-4>0>-\ln 4\Rightarrow e^2>4-\ln 4>0\Rightarrow c>1$，

$\sqrt{e}<2\Rightarrow 1>\ln 2>\dfrac{1}{2}\Rightarrow d=\dfrac{1}{2\ln 2}<1$，所以$c>d$.

故选：D

8. 如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为3，点P是平面ACB_1内的动点，M，N分别为C_1D_1，B_1C的中点，若直线BP与MN所成的角为θ，且$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，则动点$P$的轨迹所围成的图形的面积为（　　）



A. $\dfrac{3\pi}{4}$　　B. $\dfrac{\pi}{2}$　　C. $\dfrac{\pi}{3}$　　D. $\dfrac{\pi}{4}$

【答案】A

【解析】

【分析】连接BD_1，BC_1，得到$MN//BD_1$，把BP与MN所成的角就是直线BP与BD_1所成的角，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，证得$BD_1\perp$平面ACB_1，得到$\angle PBD_1=\theta$，设BD_1

与平面 ACB_1 的交点为 G，连接 PG，结合题意，得到点 P 的轨迹是以 G 为圆心，$\frac{1}{2}$ 为半径的圆，根据圆的面积公式，即可求解.

【详解】如图所示，连接 BD_1，BC_1，则 N 为 BC_1 的中点，又 M 为 C_1D_1 的中点，所以

$MN//BD_1$，

因此直线 BP 与 MN 所成的角就是直线 BP 与 BD_1 所成的角，

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，可得 $AC\perp BD$，

因为 $DD_1\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，可得 $AC\perp DD_1$，

又因为 $BD\cap DD_1=D$ 且 $BD,DD_1\subset$ 平面 BDD_1B_1，所以 $AC\perp$ 平面 BDD_1B_1，

因为 $BD_1\subset$ 平面 BDD_1B_1，所以 $AC\perp BD_1$，同理可得 $AB_1\perp BD_1$，

因为 $AC\cap AB_1=A$，且 $AC,AB_1\subset$ 平面 ACB_1，所以 $BD_1\perp$ 平面 ACB_1，则 $\angle PBD_1=\theta$.

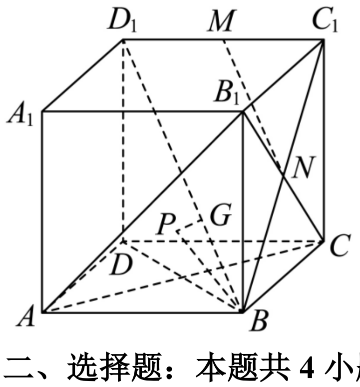
设 BD_1 与平面 ACB_1 的交点为 G，连接 PG，所以 $BD_1\perp PG$，

在直角 $\triangle PGB$ 中，$\tan\theta=\dfrac{PG}{BG}$，因为 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\tan\theta=\dfrac{PG}{BG}=\dfrac{1}{2}$，

又由 $BG=\dfrac{1}{3}BD_1=\dfrac{1}{3}\times\sqrt{3^2+3^2+3^2}=\sqrt{3}$，所以 $PG=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以点 P 的轨迹是以 G 为圆心，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 为半径的圆，其面积为 $\pi\times(\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2=\dfrac{3\pi}{4}$.

故选：A.



二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多小个合题最需求．全的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 已知一组样本数据 $x_i\left(i=1,2,3,\cdots,20\right)$，其中 $x_i\left(i=1,2,3,\cdots,20\right)$ 为正实数.满足

$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_{20}$，下列说法正确的是（　　）

A. 样本数据的第 80 百分位数为 x_{16}

B. 去掉样本的一个数据，样本数据的极差可能不变

C. 若数据的频率分布直方图为单峰不对称，且在左边“拖尾”，则样本数据的平均数小于中位数

D. 样本数据的方差 $s^2=\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}x_i^2-16$，则这组样本数据的总和等于 80

【答案】BCD

【解析】

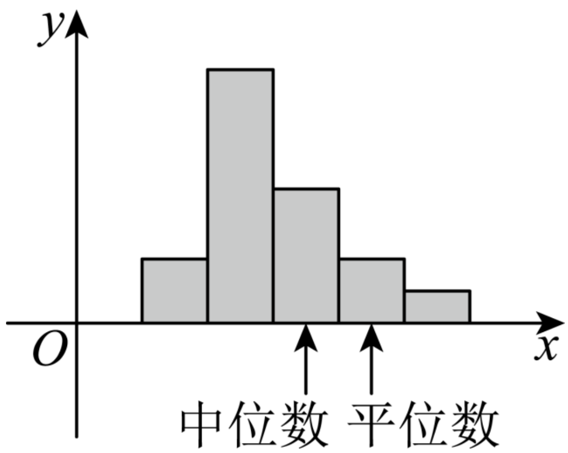
【分析】由百分位数的定义即可判断 A；由极差的定义即可判断 B，由频率分布直方图中中位数、平均数的求法画出图形即可判断；由方程计算公式即可判断 D.

【详解】对于 A，由 $20\times 80\%=16$，所以样本数据的第 80 百分位数为 $\frac{x_{16}+x_{17}}{2}$，故 A 错误；

对于 B，由题意存在这样一种可能，若 $x_1=x_2\le x_3\le\cdots\le x_{20}$，则极差为

$\frac{x_{20}-x_1}{2}=\frac{x_{20}-x_2}{2}$，此时样本数据的极差不变，故 B 正确；

对于 C，数据的频率分布直方图为单峰不对称，向右边“拖尾”，大致如下图，



由于“右拖”时最高峰偏左，中位数靠近高峰处，平均数靠近中点处，此时平均数大于中位数，同理，向“左拖”时最高峰偏右，那么平均数小于中位数，故 C 正确；

对于 D，由 $s^2=\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}x_i^2-16=\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}\left(x_i-\overline{x}\right)^2$，

则$\sum_{i=1}^{20}x_i^2-320=\sum_{i=1}^{20}\left(x_i-\overline{x}\right)^2=\sum_{i=1}^{20}x_i^2-2\overline{x}\sum_{i=1}^{20}x_i+20\overline{x}^2=\sum_{i=1}^{20}x_i^2-20\overline{x}^2$，

所以$\overline{x}=4$，故这组样本数据的总和为$20\overline{x}=80$，故 D 正确.

故选：BCD.

10. 已知抛物线 C：$y^2=8x$ 的焦点为 F，直线 l 过点 F 且与抛物线 C 交于 $M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$ 两点，其中 $y_1>0$，且$\frac{|MF|}{|NF|}=\frac{1}{2}$，则（　　）

A. 直线 l 的斜率为$-\frac{\sqrt{2}}{4}$

B. $x_1x_2=4$

C. $|MN|=9$

D. $\triangle MON$（点 O 为坐标原点）的面积为 6

【答案】BC

【解析】

【分析】设 l 方程为$x=my+2\left(m\neq 0\right)$，与抛物线方程联立结合韦达定理可得$y_1+y_2=8m$，$y_1y_2=-16$，又如图可得$\frac{y_1}{-y_2}=\frac{1}{2}$，据此可得则$y_1=2\sqrt{2}$，$y_2=-4\sqrt{2}$.

据此可判断 AB 选项正误；

C 选项，由抛物线定义可得$|MN|=x_1+x_2+p$；

D 选项，由图可得$S_{\triangle MON}=\frac{1}{2}|OF|\left(|MA|+|NB|\right)=\frac{1}{2}\times 2\times\left(y_1-y_2\right)$.

【详解】因为 $y_1>0$，所以点 M 在第一象限，显然直线 l 不与 x 轴垂直，设直线：$x=my+2\left(m\neq 0\right)$，联立$\begin{cases}y^2=8x\\x=my+2\end{cases}$，可得$y^2-8my-16=0$，由韦达定理可得：$y_1+y_2=8m$，$y_1y_2=-16$．做 MA，NB 垂直于 x 轴，则$\triangle MAF\sim\triangle NBF$，

得$\frac{|MF|}{|NF|}=\frac{|MA|}{|NB|}=\frac{y_1}{-y_2}=\frac{1}{2}\ \frac{y_1}{-y_2}=\frac{1}{2}$，则$y_1=2\sqrt{2}$，$y_2=-4\sqrt{2}$.

A 选项，$y_1+y_2=8m=-2\sqrt{2}\Rightarrow m=-\frac{\sqrt{2}}{4}$，则直线斜率为$\frac{1}{m}=-2\sqrt{2}$，故 A 错误；

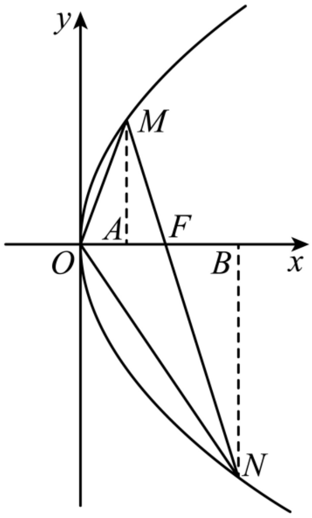
B 选项，因 $y_1^2=8x_1$，$y_2^2=8x_2$，则 $x_1x_2=\frac{y_1^2}{8}\cdot\frac{y_2^2}{8}=4$，故 B 正确；

C 选项，由抛物线定义，$|MN|=|MF|+|NF|=x_1+x_2+4$，

又 $x=my+2$，则 $x_1+x_2+4=m\left(y_1+y_2\right)+8=-\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(-2\sqrt{2}\right)+8=9$，故 C 正确；

D 选项，由图有 $S_{\triangle MON}=\frac{1}{2}|OF|\left(|MA|+|NB|\right)=\frac{1}{2}\times2\times\left(y_1-y_2\right)=6\sqrt{2}$，故 D 错误.

故选：BC.



11. 设数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n，满足 $(a_n-1)^2=4(100-S_n)$，$n\in\mathbf{N}^*$ 且

$a_1>0,a_n+a_{n-1}\neq0\left(n\geq2\right)$，则下列选项正确的是（　　）

A. $a_n=-2n+21$

B. 数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列

C. 当 $n=11$ 时 S_n 有最大值

D. 设 $b_n=a_na_{n+1}a_{n+2}$，则当 $n=8$ 或 $n=10$ 时数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和取最大值

【答案】ABD

【解析】

【分析】A 选项，根据 $a_n=\begin{cases}S_1,n=1\\S_n-S_{n-1},n\geq2\end{cases}$ 求出 $\{a_n\}$ 为等差数列，公差为 -2，首项为

$a_1=19$，得到通项公式；B 选项，计算出 $S_n=-n^2+20n$，得到 $\frac{S_n}{n}=-n+20$，从而得到 $\frac{S_n}{n}-\frac{S_{n-1}}{n-1}=-1$，得到 B 正确；C 选项，根据 $S_n=-n^2+20n$ 及二次函数的最值得到 C 错误；D 选项，先得到 $n\in[1,8]$ 时，$b_n=a_na_{n+1}a_{n+2}>0$，$b_9<0$，$b_{10}>0$，当 $n\geq 11$ 时，

$b_n<0$，且 $b_9=-3,b_{10}=3$，得到结论.

【详解】A 选项，当 $n=1$ 时，$(a_1-1)^2=4(100-a_1)$，

又 $a_1>0$，解得 $a_1=19$，

当 $n\geq 2$ 时，$(a_n-1)^2=4(100-S_n)$①，

$(a_{n-1}-1)^2=4(100-S_{n-1})$②，①-②得，

$(a_n-1)^2-(a_{n-1}-1)^2=4(100-S_n)-4(100-S_{n-1})$，

即 $a_n^2+2a_n-a_{n-1}^2+2a_{n-1}=0$，故 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}+2)=0$，

因为 $a_n+a_{n-1}\neq 0$，

故 $a_n-a_{n-1}+2=0$，

所以 $a_n-a_{n-1}=-2$，

故 $\{a_n\}$ 为等差数列，公差为 -2，首项为 $a_1=19$，

所以通项公式为 $a_n=19-2(n-1)=-2n+21$，A 正确；

B 选项，$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(19+21-2n)}{2}=-n^2+20n$，

故 $\frac{S_n}{n}=-n+20$，则当 $n\geq 2$ 时，$\frac{S_n}{n}-\frac{S_{n-1}}{n-1}=-n+20-(-n+21)=-1$，

故 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列，B 正确；

C 选项，$S_n=-n^2+20n=-(n-10)^2+100$，

故当 $n=10$ 时，S_n 取得最大值，C 错误；

D 选项，令 $a_n>0$ 得 $1\leq n\leq 10$，令 $a_n<0$ 得 $n\geq 11$，