海淀区高一年级练习

数学

2024.07

学校__________班级__________姓名__________

考生须知 1．本试卷共 6 页，共三道大题，19 道小题．满分 100 分．考试时间 90 分钟．

2．在试卷上准确填写学校名称、班级名称、姓名．

3．答案一律填涂或书写在试卷上，用黑色字迹签字笔作答．

4．考试结束，请将本试卷交回．

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

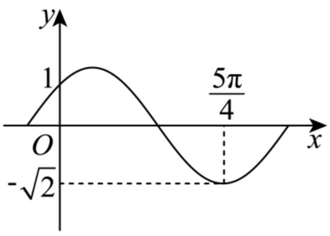
1. 若复数 z 满足 $z\cdot\mathrm{i}=2$，则 z 的虚部为（　　）

A. -2　　B. 2　　C. $-\mathrm{i}$　　D. i

2. 已知向量 $\vec{a}=(0,1),\vec{b}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，则 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=$（　　）

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则其解析式为（　　）



A. $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$　　B. $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$

C. $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$　　D. $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

4. 若 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，且 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，则 $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=$（　　）

A. $-\frac{3}{4}$　　B. $\frac{1}{7}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. 7

5. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 满足 $\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BC}$，若 $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，则 $\lambda=$（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. 3　　D. -4

6. 已知 $f(x)=\frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}$，则下列直线中，是函数 $f(x)$ 对称轴的为（　　）

A. $x=0$　　B. $x=\frac{\pi}{16}$　　C. $x=\frac{\pi}{4}$　　D. $x=\frac{\pi}{2}$

7. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A\left(-1,\sqrt{3}\right)$，点 $P\left(\cos\theta,\sin\theta\right)$，其中 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$．若 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}\right|=\sqrt{5}$，

则 $\theta=$（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

8. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=2, A=\frac{\pi}{3}$．则下列说法正确的是（　　）

A. 当 $b=1$ 时，$\triangle ABC$ 是锐角三角形　　B. 当 $b=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时，$\triangle ABC$ 是直角三角形

C. 当 $b=\frac{3}{2}$ 时，$\triangle ABC$ 是钝角三角形　　D. 当 $b=\frac{5}{3}$ 时，$\triangle ABC$ 是等腰三角形

9. 已知 $\vec{a},\vec{b}$ 是非零向量，则“$\vec{a}\perp\vec{b}$”是“对于任意的 $\lambda\in\mathrm{R}$，都有 $\left|\vec{a}+\lambda\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\lambda\vec{b}\right|$ 成立”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

10. 定义域为 $[a、b]$ 的函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象的两个端点分别为 $A(a,f(a)),B(b,f(b))$．点 $M\left(x,y\right)$ 是 $y=f\left(x\right)$ 的图象上的任意一点，其中 $x=\lambda a+\left(1-\lambda\right)b\left(0\le\lambda\le 1\right)$，点 N 满足向量 $\overrightarrow{ON}=\lambda\overrightarrow{OA}+\left(1-\lambda\right)\overrightarrow{OB}$，点 O 为坐标原点．若不等式 $\left|\overrightarrow{MN}\right|\le k$ 恒成立，则称函数 $y=f\left(x\right)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上为 k 函数．已知函数 $f\left(x\right)=-x^2+2x$ 在 $\left[0,1\right]$ 上为 k 函数，则实数 k 的取值范围是（　　）

A. $\left(0,+\infty\right)$　　B. $\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$　　C. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　　D. $\left[1,+\infty\right)$

二、填空题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分．

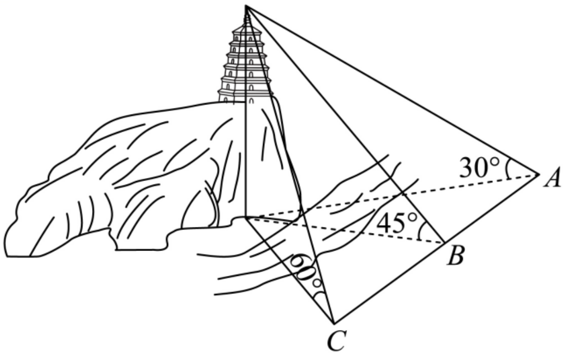
11. 知复数 z 满足 $z+1-\mathrm{i}=0$，则 $z=$__________，$\bar{z}=$__________．

12. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=\frac{\pi}{3}, CA=CB=2$，$P$ 满足 $\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$，则 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CB}=$____________．

13. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $a\sin B=kb$，则 k 的一个取值为__________；当 $A=\frac{\pi}{2}$ 时，$k=$__________．

14. 一名学生想测算某风景区山顶上古塔的塔尖距离地面的高度，由于山崖下河流的阻碍，他只能在河岸边制定如下测算方案：他在河岸边设置了共线的三个观测点 A, B, C（如图），相邻两观测点之间的距离为 200m

，并用测角仪器测得各观测点与塔尖的仰角分别为30°，45°，60°，根据以上数据，该学生得到塔尖距离地面的高度为__________m．



15．已知函数$f(x)=\sin(x+\varphi), g(x)=|\cos x|$，给出下列四个结论：

①对任意的$\varphi\in\mathbf{R}$，函数$y=f\left(x\right)+g\left(x\right)$是周期函数；

②存在$\varphi_0\in\mathbf{R}$，使得函数$y=f\left(x\right)+g\left(x\right)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调递减；

③存在$\varphi_0\in\mathbf{R}$，使得函数$y=f\left(x\right)g\left(x\right)$的图象既是轴对称图形，又是中心对称图形；

④对任意的$\varphi\in\mathbf{R}$，记函数$F\left(x\right)=f\left(x\right)g\left(x\right)$的最大值为$M\left(\varphi\right)$，则$M\left(\varphi\right)>\dfrac{1}{2}$．

其中所有正确结论的序号是__________．

三、解答题共4小题，共40分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16. 已知函数$f\left(x\right)=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$．

（1）求$f\left(0\right)$的值和$f\left(x\right)$的零点；

（2）求$f\left(x\right)$的单调递增区间．

17. 已知$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},|\vec{a}|=\sqrt{2},|\vec{b}|=1,\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{\pi}{4}$．

（1）求$|\vec{a}-2\vec{b}|$；

（2）若$\overrightarrow{OQ}=t\overrightarrow{OA}$，求$\overrightarrow{AQ}\cdot\left(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OB}\right)$的最小值．

18. 在$\triangle ABC$中，$\cos 2A+\cos A=0$．

（1）求A的大小；

（2）若$a=7$，从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使得$\triangle ABC$存在，求$\triangle ABC$最长边上高线的长．

条件①：$\sin C=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$；

条件②：$\triangle ABC$ 的面积为$10\sqrt{3}$；

条件③：$b=10$．

注：如果选择的条件不符合要求，第（2）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分．

19. 已知 n 维向量$\vec{a}=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)$，给定$k\in\left\{1,2,\cdots,n-1\right\}$，定义变换$\varphi_k$；选取$i\in\left\{0,1,\cdots n-1\right\}$，再选取一个实数 x，对$\vec{a}$的坐标进行如下改变：若此时$i+k\le n$，则将$a_{i+1},a_{i+2},\cdots,a_{i+k}$同时加上 x．其余坐标不变；若此时$i+k>n$，则将$a_{i+1},a_{i+2},\cdots,a_n$及$a_1,a_2,\cdots,a_{i+k-n}$同时加上 x，其余坐标不变．若 a 经过有限次变换φ_k（每次变换所取的 i，x 的值可能不同）后，最终得到的向量$\left(t_1,t_2,\cdots,t_n\right)$满足$t_1=t_2=t_n$，则称 a 为 k 阶可等向量．例如，向量$\left(1,3,2\right)$经过两次变换φ_2可得：$(1,3,2)\xrightarrow{i=2,x=1}(2,3,3)\xrightarrow{i=1,x=-1}(2,2,2)$，所以$\left(1,3,2\right)$是 2 阶可等向量．

（1）判断$\left(1,2,3\right)$是否是 2 阶可等向量？说明理由；

（2）若取 1，2，3，4 的一个排序得到的向量$\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right)$是 2 阶可等向量，求$a_1+a_3$；

（3）若任取$a_1,a_2,\cdots,a_n$的一个排序得到的 n 维向量均为 k 阶可等向量．则称$\left(\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\cdots,\boldsymbol{a_n}\right)$为 k 阶强可等向量．求证：向量$\left(1,2,3,4,5,6,7\right)$是 5 阶强可等向量．

海淀区高一年级练习

数学

2024.07

学校__________班级__________姓名__________

考生须知 1．本试卷共 6 页，共三道大题，19 道小题．满分 100 分．考试时间 90 分钟．

2．在试卷上准确填写学校名称、班级名称、姓名．

3．答案一律填涂或书写在试卷上，用黑色字迹签字笔作答．

4．考试结束，请将本试卷交回．

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 若复数 z 满足 $z\cdot\mathrm{i}=2$，则 z 的虚部为（　　）

A. -2　　　　B. 2　　　　C. $-\mathrm{i}$　　　　D. i

【答案】A

【解析】

【分析】根据复数代数形式的除法运算化简，再判断其虚部.

【详解】因为 $z\cdot\mathrm{i}=2$，所以 $z=\frac{2}{\mathrm{i}}=\frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2}=-2\mathrm{i}$，

所以 z 的虚部为 -2.

故选：A

2. 已知向量 $\vec{a}=(0,1),\vec{b}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，则 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=$（　　）

A. 0　　　　B. $\frac{1}{2}$　　　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】B

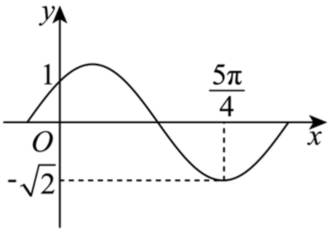
【解析】

【分析】根据向量的数量积的坐标表示计算.

【详解】由题意 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{0+\frac{1}{2}}{1\times1}=\frac{1}{2}$，

故选：B.

3. 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则其解析式为（　　）



A. $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$　　B. $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

C. $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$　　D. $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

【答案】D

【解析】

【分析】由最小值求得A，由 $f(0)=1$ 求得 φ，再结合最小值点和周期求得 ω .

【详解】由图象知 $A=\sqrt{2}$， $f(0)=1$

所以 $\sqrt{2}\sin\varphi=1$，

则 $\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{4},k\in Z$ 或 $\varphi=2k\pi+\dfrac{3\pi}{4},k\in Z$，

又 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$，

$\sqrt{2}\sin(\dfrac{5\omega\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4})=-\sqrt{2}$， $\dfrac{5\omega\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}=2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}$， $\omega=\dfrac{8k}{5}+1$， $k\in Z$，

又 $T>\dfrac{5\pi}{4}$， $\omega=\dfrac{2\pi}{T}<\dfrac{8}{5}$，已知 $\omega>0$，所以 $\omega=1$，所以 $f(x)=\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$，

故选：D.

4. 若 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，且 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，则 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=$（　　）

A. $-\dfrac{3}{4}$　　B. $\dfrac{1}{7}$　　C. $\dfrac{3}{4}$　　D. 7

【答案】D

【解析】

【分析】根据正弦得到正切值，利用正切差角公式计算出答案.

【详解】因为 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\cos\alpha<0$，

又 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=-\dfrac{4}{5}$，

故 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{3}{4}$，

所以 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\dfrac{\pi}{4}\tan\alpha}=\dfrac{1+\dfrac{3}{4}}{1-\dfrac{3}{4}}=7$.

故选：D

5. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 满足 $\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BC}$，若 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，则 $\lambda=$（　　）

A. $\dfrac{1}{3}$　　　　B. $\dfrac{1}{4}$　　　　C. 3　　　　D. -4

【答案】B

【解析】

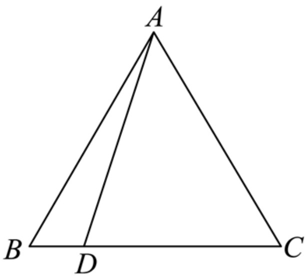
【分析】根据平面向量的三角形法则即可得解

【详解】如图，因为在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BC}$，

所以 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\lambda\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$，

又 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，所以 $(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，

所以 $\lambda=\dfrac{1}{4}$，



故选：B.

6. 已知 $f(x)=\dfrac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}$，则下列直线中，是函数 $f(x)$ 对称轴的为（　　）

A. $x=0$　　　　B. $x=\dfrac{\pi}{16}$　　　　C. $x=\dfrac{\pi}{4}$　　　　D. $x=\dfrac{\pi}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】举例说明判断 ABD；利用轴对称的意义判断 C.

【详解】依题意，$\sin x+\cos x\neq 0$，解得 $x\neq -\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in Z$，

对于 A，$f(-\frac{\pi}{2})=-1$，$f(\frac{\pi}{2})=1$，则函数 $f(x)$ 的图象关于 $x=0$ 不对称，A 不是；

对于 B，$f(0)=1$，$f(\frac{\pi}{8})=\frac{1+\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{8}+\cos\frac{\pi}{8}}\neq 1$，则函数 $f(x)$ 的图象关于 $x=\frac{\pi}{16}$ 不对称，B 不是；

对于 C，$\frac{\pi}{2}-x\neq\frac{3\pi}{4}-k\pi$，即 $\frac{\pi}{2}-x\neq -\frac{\pi}{4}+(1-k)\pi,k\in Z$，

$f(\frac{\pi}{2}-x)=\frac{1+\sin 2(\frac{\pi}{2}-x)}{\sin(\frac{\pi}{2}-x)+\cos(\frac{\pi}{2}-x)}=\frac{1+\sin 2x}{\cos x+\sin x}=f(x)$，则函数 $f(x)$ 的图象关于 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称，C 是；

对于 D，$f(0)=1$，$f(\pi)=-1$，则函数 $f(x)$ 的图象关于 $x=\frac{\pi}{2}$ 不对称，D 不是.

故选：C

7. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A\left(-1,\sqrt{3}\right)$，点 $P\left(\cos\theta,\sin\theta\right)$，其中 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. 若 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}\right|=\sqrt{5}$，

则 $\theta=$（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　　　B. $\frac{\pi}{4}$　　　　C. $\frac{\pi}{3}$　　　　D. $\frac{\pi}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】先 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}$ 的坐标，然后求出模长，然后结合辅助角公式化简，建立关于 θ 的方程，解方程即可得解.

【详解】因为平面直角坐标系 xOy 中，点 $A\left(-1,\sqrt{3}\right)$，点 $P\left(\cos\theta,\sin\theta\right)$

所以 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}=\left(-1+\cos\theta,\sqrt{3}+\sin\theta\right)$

所以 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}\right|=\sqrt{\left(-1+\cos\theta\right)^2+\left(\sqrt{3}+\sin\theta\right)^2}=\sqrt{2\sqrt{3}\sin\theta-2\cos\theta+5}$

又 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}\right|=\sqrt{5}$

所以 $\sqrt{2\sqrt{3}\sin\theta-2\cos\theta+5}=\sqrt{5}$，即 $2\sqrt{3}\sin\theta-2\cos\theta=0$

所以 $4\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=0$，又因为 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

所以 $\theta-\frac{\pi}{6}=0$，即 $\theta=\frac{\pi}{6}$，

故选：A.

8. 在$\triangle ABC$中，已知$a=2, A=\frac{\pi}{3}$．则下列说法正确的是（　　）

A. 当$b=1$时，$\triangle ABC$是锐角三角形

B. 当$b=\frac{4\sqrt{3}}{3}$时，$\triangle ABC$是直角三角形

C. 当$b=\frac{3}{2}$时，$\triangle ABC$是钝角三角形

D. 当$b=\frac{5}{3}$时，$\triangle ABC$是等腰三角形

【答案】B

【解析】

【分析】根据边长应用正弦定理计算分别判断各个选项.

【详解】对于 A:因为$b=1$由正弦定理$\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sin B}, \sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}<\frac{1}{2}$，

当$\pi>B>\frac{5\pi}{6}$时，$\triangle ABC$是钝角三角形,

当$B\left\langle \frac{\pi}{6}, A=\pi-A-B \right\rangle \frac{\pi}{2}$时，$\triangle ABC$是钝角三角形, A 选项错误；

对于 B:因为$b=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,由$\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{\sin B}, \sin B=1, B=\frac{\pi}{2}$,

所以$\triangle ABC$是直角三角形, B 选项正确；

对于 C:因为$b=\frac{3}{2}$,由$\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{3}{2}}{\sin B}, \sin B=\frac{3\sqrt{3}}{8}>\frac{1}{2}$

当$\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$时，$C=\pi-A-B<\frac{\pi}{2}$,$\triangle ABC$是锐角三角形, C 选项错误；

对于 D:因为$b=\frac{5}{3}$,由$\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{5}{3}}{\sin B}, \sin B=\frac{5\sqrt{3}}{12}<\frac{\sqrt{3}}{2}$,$b<a$,$B<A<\frac{\pi}{3}$,

$$\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\sqrt{1-\frac{75}{144}}=\frac{\sqrt{69}}{12}$$

$$\sin C=\sin\left(B+A\right)=\sin B\cos A+\cos B\sin A=\frac{5\sqrt{3}}{12}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{69}}{12}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}+3\sqrt{23}}{24}$$

因为$B\neq C, A\neq C$，所以$\triangle ABC$不是等腰三角形, D 选项错误；