摘 要

非线性微分方程的分析与计算是当代计算数学最活跃的研究领域之一，这些方程大都无法得到其解析解，于是通过数值方法求解方程近似解这一做法得到广泛应用。常用的数值方法包括有限元法、有限差分法以及谱方法等。较其他数值方法相比，在对某些特定方程求解时，谱方法不仅具有无穷阶收敛性，也保证了较快运算效率。无力条件下的麦克斯韦方程组作为一类特殊的非线性方程组，其具有较高的复杂度，使得在利用常见数值方法时，由于电流密度项难以精确表达，从而导致数值结果比较粗糙。因此本文利用谱方法中的伪谱法，对无力条件下的麦克斯韦方程组进行求解，对电流密度项给出精确的刻画，由无力条件的约束做出相应修正，得到更高精度的结果，其主要内容分为以下两个部分：

在一维情形中，借助直角坐标系下的切比雪夫伪谱法，首先对一类具有解析解的无力条件下麦克斯韦方程组进行求解，并进行数值对比。随后对不存在解析解的方程组进行计算并给出对应的数值模拟结果。

在二维情形中，利用了球坐标系下的傅里叶伪谱法，通过引入一种全新的谱系数计算方法，将试探函数转化为三角函数的组合，对无力条件下的麦克斯韦方程组进行求解。随后对具有解析解的方程组给予数值测试，得到了高精度的结果。

关键词: 麦克斯韦方程组; 谱方法; 无力条件; 数值模拟

Abstract

Computational Mathematics

ZhaoYuan

The analysis and computation of nonlinear differential equations are among the most active research areas in contemporary computational mathematics. Since analytical solutions are generally unattainable for these equations, numerical methods have been widely used to approximate their solutions. Common numerical methods include the finite element method, finite difference method, and spectral method, among others. Compared with other numerical methods, the spectral method not only exhibits infinite-order convergence but also ensures faster computational efficiency when solving certain specific equations.

The Maxwell equations under force-free conditions, as a special class of nonlinear equations, possess high complexity. When using common numerical methods, the difficulty in accurately expressing the current density term often leads to rough numerical results. Therefore, this paper employs the pseudo-spectral method within the spectral approach to solve the Maxwell equations under force-free conditions, providing a precise characterization of the current density term and obtaining more accurate results. The main content is divided into the following two parts:

In the one-dimensional case, leveraging the Chebyshev pseudo-spectral method under the rectangular coordinate system, we first solve a class of Maxwell equations under force-free conditions that have analytical solutions and perform numerical comparisons. Subsequently, we compute equations without analytical solutions and present the corresponding numerical simulation results.

In the two-dimensional scenario, we utilize the Fourier pseudo-spectral method under the spherical coordinate system. By introducing a novel spectral coefficient computation method, we solve the Maxwell equations under force-free conditions. We then conduct numerical tests on equations with analytical solutions, achieving higher precision results.

Key Words: Maxwell equations; Spectral method;Numerical simulation; force-free condition

目 录

第 1 章　引言

1.1　研究背景及意义

自希尔伯特提出的23个问题以来，非线性微分方程得到更为深入的研究，这是因为非线性微分方程与变分问题存在紧密联系。求解微分方程的主要思想是通过建立数学模型，将实际问题转化为对数学方程的求解，其中偏微分方程是问题描述和模型建立的主要工具。偏微分方程的数值方法，特别是有限元法，直接来自变分问题，而变分问题又直接来源于力学、物理、经济、控制等，极具代表性的两例：第一、Fourier《热的解析理论》中三维空间热传导方程；第二、Maxwell在1864年推导出的电磁场方程。因此对偏微分方程数值求解的研究具有重要意义。

偏微分方程是未知的多元函数及其偏导数之间的方程，它描述了该多元函数与其偏导数之间的等式关系。偏微分方程的适定性研究内容包括：解的存在性与解的稳定性。在实际应用中，大部分方程无法验证解的存在性，也难以确定方程稳定性结论，更无法求方程的解析解。因此用数值方法求出近似解这一方式被众多学者广泛采用，常用的数值方法：有限元法、有限差分法[1,2]，于20 世纪前期，Lanczos[3]等人就发展了谱方法，该方法是利用一组正交函数将微分方程的解近似表示出来，然而由于计算量大且过程复杂，长期以来并未得到广泛使用。20世纪60年代，Cooley与Turkey[4,5]在经典的傅里叶变换基础上，利用系数转换过程中的周期性与对称性，发展了快速傅里叶变换(Fast Fourier Transform, FFT)，使得求解过程计算量显著下降。源于快速傅里叶变换的思路，自此谱方法得到快速发展(见[6−9]及其参考文献)。

十九世纪中期，麦克斯韦方程组作为一类特殊的偏微分方程，统一了电磁理论，为现代的电、磁、光学等提供了理论基础[10]。麦克斯韦方程组由四个方程组成，分别描述了电场、磁场、电荷密度、电流密度之间关系的。在高斯单位制下，微分形式的麦克斯韦方程组表达式如下：

$$
\begin{cases}
\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c\nabla \times \mathbf{E}, \\
\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{B} - \dfrac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \\
\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\
\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_e.
\end{cases}
\tag{1.1.1}
$$

一百多年来，随着偏微分方程数值方法理论的发展，麦克斯韦方程组的数值解法也受到许多学者广泛而深入的研究，但是面对全新或某种特定物理环境的情形，使现有的方法不能既保证数值结果的准确性，也不能保证计算效率。

1955年，Deutsch[11]研究黑洞时建立真空环境下麦克斯韦方程组，并得到方程的解析解。1969 年，Goldreich与Julian[12, 13]通过定性分析得到了脉冲星磁层中有等离子体。随后，科研人员尝试用Deutsch解描述脉冲星磁层，但磁层高速旋转产生强表面电场，使其充斥了大量的电子与正电子，导致Deutsch解并不能准确描述物理现象，故真空并不能描述脉冲星所在环境。Scharlemann[14]等人从物理现象的角度，将这种无法忽略的因素称为无力磁层，并验证了该磁层解满足含时的麦克斯韦方程组。

无力条件作为一类特定物理环境下的约束，抽象于天体物理研究领域中的无力磁层，而无力条件下的麦克斯韦方程组是来源于无力磁层环境下黑洞与脉冲星周围物理现象和规律的刻画。我们知道，脉冲星是一种具有强磁场且高速旋转的中子星，它们以非常稳定、精确的周期和频率向外发射电磁脉冲信号，这种信号的特征与脉冲星的磁层结构密切关联。然而，由于信号信息缺乏精确的探测，且在强磁场下动力系统具有非线性特征，使得目前对磁层辐射机制的认识还不够全面，从而对磁层的结构与性质的认识不够清晰。随着现代科学理论的发展与计算机算力的不断提升，在对磁层结构认识更加清晰的基础上，得到更为精确的物理现象和规律的刻画。

综上，对无力条件下麦克斯韦方程组解的研究是十分必要的。一方面，基于原始物理背景，可以得到更加精确的表述，不仅确保解的精确度，也保证了解的计算效率；另一方面，剥离原始背景后，借助谱方法工具求解无力条件下麦克斯韦方程组的工作丰富了数值模拟理论内容。所以本文的工作将促进无力条件下麦克斯韦方程组数值解的理论进一步完善的同时推广了谱方法的适用性。

1.2 麦克斯韦方程组的国内外研究现状

麦克斯韦方程组统一电磁理论后，便被广泛运用于解决各种实际问题。但由于麦克斯韦方程组在绝大多数情况下无法得到解析解，各种数值方法便被应用求解方程[16−19]。

最常用的方法为1966年Yee[20]提出的有限时域差分法(Finite difference time domain method, FDTD)，它被广泛用于求解各种线性麦克斯韦方程组。FDTD法的基本思想是用中心差商代替场量对时间与空间的一阶偏微商，通过模拟在时域的递推得到数值模拟结果，后续Joseph、Ziolkowski、贾宏恩[21−23]等众多学者也将FDTD方法改进并广泛使用。

有限元法也被常用于求解麦克斯韦方程组[24]。虽然程序设计较FDTD法复杂一些，但其可以适用更复杂的边界条件，网格划分更自由，从而获得较高的精度。其后续也在此基础上发展出间断有限元法[25]，对麦克斯韦方程组离散格式的稳定性与误差做了相应的分析与证明。

求解麦克斯韦方程组的文献中，谱方法较少使用。但对部分方程，在空间中使用谱方法离散可以获得较高精度，将谱方法与不同方法相结合也为数值求解方程组提供了全新的思路。其中伪谱法最早被应用于求解流体力学问题[26]，也表现出较高的收敛精度。

无力磁层中对波的演化过程即求解无力条件下的麦克斯韦方程组。在最初模拟中，只能得到对应特定区域的典型参数与自洽解[27, 28]。Scharlemann与Wagoner[29]将描述轴对称的无力方程组简化为只包含磁流量的单个方程。随后Contopoulos[30]在这一领域取得一个重要进展，他通过设计的迭代得到了一个可以使磁力线在光柱半径平滑变化的磁层解(CKF解)，CKF解揭示了光柱半径之外赤道面上的磁场强度不连续。后续Goodwin和Tomokhin[31]也找到了在光柱半径内的稳态解。对其认识的不断深入加持计算机算力的极大提升，与刚产生时只能求特定区域解、通过衔接得到整体解相比，全局模拟得到了快速的发展。

求解麦克斯韦方程组的上述多种方法理论成熟并被广泛运用，但无力条件下的电流在计算中，往往因为复杂难于处理而被部分舍去。Komissarov[32]利用相对论磁流体动力学框架内进行试验，其尝试了通过判断$\mathbf{E}$与$\mathbf{B}$的大小来修正电流

密度的表达式，但会导致数值不稳定，虽然此数值方法适用性不够，但发现与时间相关的解逐渐接近稳态；McKinney[33]独立设计了算法也得到与Komissarov类似的结果；Anatoly Spitkovsky[34]使用时域有限差分法对无力条件下的麦克斯韦进行求解，但其模拟中只选取了电流密度中的一部分，在每个时间步长后强制修正$\mathbf{E}$ 达到弥补电流密度被略去的部分；Kalapotharakos与Contopoulos[35]设计了基于FDTD改进的欧拉有限差分时域数值求解算法，改进的算法通过每个时间步长后缩放的方式来加强了电流密度被忽略的部分，其更新后的电场基本可以满足无力条件的限制。他们的模拟结果普遍都收敛到一个类CKF解。

Kyle Parfrey[35, 36]通过在球坐标下使用伪谱法克服了这一困难。但其代码并没有在每一个时间步长内严格地维持磁场的无散性(即$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$)。Pétri[48]通过Galerkin 谱方法对无力条件下麦克斯韦方程组求解，给出了若干具有解析解情形的数值模拟结果，本文对相同的情形进行数值模拟并对比数值结果。

1.3 研究内容及创新之处

本文基于伪谱法对无力条件下的麦克斯韦方程组进行数值求解。主要内容为：

第一章：阐述了常用的麦克斯韦方程组数值求解方法，引入了无力条件，并介绍麦克斯韦方程组求解的研究现状。

第二章：对伪谱法及其相关内容介绍，并设计MATLAB程序使用伪谱法对典型非线性微分方程Klein-Gordon方程求解，运算结果验证了基础程序的准确性与高效性。

第三章：在直角坐标系下对一维无力条件下的麦克斯韦方程组基于切比雪夫伪谱法设计算法，通过数值测试验证了算法的可行性，数值对比显示了算法的精确性。并对Current Sheet的一种特殊情况情况进行模拟给出对应数值解。

第四章：在球坐标下对二维无力条件下的麦克斯韦方程组进行求解，对球坐标系下的球谐函数使用三角函数展开，使用一种新的计算方法计算相关傅里叶系数与积分，获得谱系数。通过数值测试验证二维下算法的精确性。

本文的创新表现在以下几个方面：

1.无力条件使方程组中的电流密度为强非线性项，在之前的算法中，一般的数值方法难以精确得处理此部分，导致问题不能自洽。而利用伪谱法可以完整的处理此项，在时间的迭代中仍保持非常高计算精确度。

2.在一维情形中，借助直角坐标系下的切比雪夫伪谱法，本文设计了针对无力条件的修正，对无力条件下麦克斯韦方程组进行求解。数值方法稳定性强，且数值解具有较高的精度。

3.在二维情形中，利用了球坐标系下的傅里叶伪谱法，通过引入一种全新的谱系数计算方法，对无力条件下的麦克斯韦方程组进行求解，数值结果同样具有较高的精度。