机器人建模与控制

机器人动力学

7.1 速度和加速度的传递

7.1.1 线速度和角速度的传递

- 点Q以线速度$^{B}V_{Q}$相对于坐标系{B}运动
- {B}的原点以线速度$^{A}V_{BoRG}$相对于坐标系{A}运动
- {B}以角速度$^{A}\text{贝}_{B}$绕坐标系{A}运动

- 线速度的传递关系为：

$$^{A}V_{Q} = {}^{A}V_{BoRG} + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_{Q} + {}^{A}\text{贝}_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q$$

注意： 需要用到角速度$^{A}\text{贝}_{B}$

- 坐标系 C 以角速度$^{B}\text{贝}_{C}$绕坐标系 B 运动
- B 以角速度$^{A}\text{贝}_{B}$绕坐标系 A 运动
- 坐标系 C 绕坐标系{A}运动的角速度为：

$$^{A}\text{贝}_{C} = {}^{A}\text{贝}_{B} + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}\text{贝}_{C}$$

7.1 速度和加速度的传递

7.1.2 线加速度的传递

- 线加速度的传递可通过对线速度传递关系式的求导获得

- 特殊情况：坐标系{A}的原点和坐标系{B}的原点重合，有：

$$ {}^{A}V_{Q} = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_{Q} + {}^{A}\Omega_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q $$

求导

$$ {}^{A}\dot{V}_{Q} = \frac{d}{dt}\,{}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_{Q} + {}^{A}\dot{\Omega}_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q + {}^{A}\Omega_{B} \times \frac{d}{dt}\,{}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q $$

- 注意到：$ {}^{A}V_{Q} = \frac{d}{dt}\,{}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_{Q} + {}^{A}\Omega_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q $

- 同理有：$ \frac{d}{dt}\,{}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_{Q} = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}\dot{V}_{Q} + {}^{A}\Omega_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_{Q} $

$$ {}^{A}\dot{V}_{Q} = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}\dot{V}_{Q} + {}^{A}\Omega_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_{Q} + {}^{A}\dot{\Omega}_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q + {}^{A}\Omega_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_{Q} + {}^{A}\Omega_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q $$

$$ = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}\dot{V}_{Q} + 2\,{}^{A}\Omega_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_{Q} + {}^{A}\dot{\Omega}_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q + {}^{A}\Omega_{B} \times {}^{A}\Omega_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q $$

7.1 速度和加速度的传递

7.1.2 线加速度的传递

- 一般情况：如果坐标系{A}的原点和坐标系{B}的原点不重合
- 需加上{B}原点的线加速度

$$ {}^A\dot{V}_Q = {}^A\dot{V}_{BORG} + {}^A_BR\,{}^B\dot{V}_Q + 2\,{}^A\Omega_B \times {}^A_BR\,{}^BV_Q + {}^A\dot{\Omega}_B \times {}^A_BR\,{}^BQ + {}^A\Omega_B \times \left({}^A\Omega_B \times {}^A_BR\,{}^BQ\right) $$

- 如果矢量${}^BQ$保持不动
- 即： ${}^BV_Q = 0, {}^B\dot{V}_Q = 0$

$$ {}^A\dot{V}_Q = {}^A\dot{V}_{BORG} + {}^A\dot{\Omega}_B \times {}^A_BR\,{}^BQ + {}^A\Omega_B \times \left({}^A\Omega_B \times {}^A_BR\,{}^BQ\right) $$

7.1 速度和加速度的传递

7.1.3 角加速度的传递

- 类似的，角加速度的传递关系可以通过对角速度传递关系式求导得到

$$\boxed{{}^A\Omega_C = {}^A\Omega_B + {}^A_B R\,{}^B\Omega_C}$$

求导

$${}^A\dot{\Omega}_C = {}^A\dot{\Omega}_B + \frac{d}{dt}\left({}^A_B R\,{}^B\Omega_C\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left({}^A_B R\,{}^B\Omega_C\right) = {}^A_B R\,{}^B\dot{\Omega}_C + {}^A\Omega_B \times {}^A_B R\,{}^B\Omega_C$$

$${}^A\dot{\Omega}_C = {}^A\dot{\Omega}_B + {}^A_B R\,{}^B\dot{\Omega}_C + {}^A\Omega_B \times {}^A_B R\,{}^B\Omega_C$$

7.2 刚体的惯性张量与欧拉方程

- 考虑多个质点连接形成刚体
- 设质点i的质量为m_i，则刚体的总质量$m = \sum_i m_i$
- 考虑该刚体的联体坐标系{B}。在惯性坐标系{U}中， 有：

$$^{U}V_i = {}^{U}V_{BORG} + {}^{U}\Omega_B \times {}^{U}_{B}R\,{}^{B}P_i$$

- $^{U}V_i$表示质点i在{U}中的速度
- 对速度求导获得其加速度：

$$^{U}\dot{V}_i = {}^{U}\dot{V}_{BORG} + {}^{U}\dot{\Omega}_B \times {}^{U}_{B}R\,{}^{B}P_i + {}^{U}\Omega_B \times ({}^{U}\Omega_B \times {}^{U}_{B}R\,{}^{B}P_i)$$

- 注意：由于是刚体， $^{B}\dot{P}_i = 0$

- 作用在质点i上的力：

$$^{U}f_i = m_i\,{}^{U}\dot{V}_i = m_i\left({}^{U}\dot{V}_{BORG} + {}^{U}\dot{\Omega}_B \times {}^{U}_{B}R\,{}^{B}P_i + {}^{U}\Omega_B \times ({}^{U}\Omega_B \times {}^{U}_{B}R\,{}^{B}P_i)\right)$$

7.2 刚体的惯性张量与欧拉方程

- 作用在质点i上的力矩：

$$^U N_i = {}^U_B R\,{}^B P_i \times {}^U f_i = m_i\,{}^U_B R\,{}^B P_i \times \left({}^U\dot V_{BORG} + {}^U\dot\Omega_B \times {}^U_B R\,{}^B P_i + {}^U\Omega_B \times \left({}^U\Omega_B \times {}^U_B R\,{}^B P_i\right) \right)$$

- 作用在整个刚体上的总力矩：

$$^U N = \sum_i {}^U N_i = \sum_i m_i\,{}^U_B R\,{}^B P_i \times \left({}^U\dot V_{BORG} + {}^U\dot\Omega_B \times {}^U_B R\,{}^B P_i + {}^U\Omega_B \times \left({}^U\Omega_B \times {}^U_B R\,{}^B P_i\right) \right)$$

$$= \sum_i m_i\,{}^U_B R\,{}^B P_i \times {}^U\dot V_{BORG} + \sum_i m_i\,{}^U_B R\,{}^B P_i \times \left({}^U\dot\Omega_B \times {}^U_B R\,{}^B P_i\right)$$

$$+ \sum_i m_i\,{}^U_B R\,{}^B P_i \times \left({}^U\Omega_B \times \left({}^U\Omega_B \times {}^U_B R\,{}^B P_i\right)\right)$$

注意叉乘不满足乘法结合律，不能将后面的括号去掉

7.2 刚体的惯性张量与欧拉方程

- 如果将联体坐标系{B}的原点选在刚体质心上，则有：

$$\sum_i m_i {}^B P_i = 0$$

- 为强调联体坐标系原点在刚体质心上这一情况，下面用{C}替代{B}

$$\sum_i m_i \, {}^U_B R \, {}^B P_i \times {}^U \dot{V}_{BORG} = 0$$

- 总力矩可简化为：

$${}^U N_C = \sum_i m_i \, {}^U P_{Ci} \times \left({}^U \dot{\omega}_C \times {}^U P_{Ci} \right) + \sum_i m_i \, {}^U P_{Ci} \times \left({}^U \omega_C \times \left({}^U \omega_C \times {}^U P_{Ci} \right) \right)$$

- 计算${}^U N_C$在坐标系{C}中的表示：

$${}^C N_C = {}^C_U R \, {}^U N_C$$

$$= {}^C_U R \left[\sum_i m_i \, {}^U P_{Ci} \times \left({}^U \dot{\omega}_C \times {}^U P_{Ci} \right) + \sum_i m_i \, {}^U P_{Ci} \times \left({}^U \omega_C \times \left({}^U \omega_C \times {}^U P_{Ci} \right) \right) \right]$$

7.2 刚体的惯性张量与欧拉方程

- ^{C}N的第一项

$$ {}^{C}_{U}R\sum_i m_i\,{}^{U}_{C}R\,{}^{C}P_i \times \left({}^{U}\dot{\omega}_C \times {}^{U}_{C}R\,{}^{C}P_i\right) = \sum_i m_i\,{}^{C}_{U}R\,{}^{U}_{C}R\,{}^{C}P_i \times \left({}^{C}_{U}R\left({}^{U}\dot{\omega}_C \times {}^{U}_{C}R\,{}^{C}P_i\right)\right) $$

$$ = \sum_i m_i\,{}^{C}P_i \times \left({}^{C}_{U}R\,{}^{U}\dot{\omega}_C \times {}^{C}_{U}R\,{}^{U}_{C}R\,{}^{C}P_i\right) $$

$$ = \sum_i m_i\,{}^{C}P_i \times {}^{C\,U}\dot{\omega}_C \times {}^{C}P_i = \sum_i -m_i\,{}^{C}P_i \times {}^{C}P_i \times {}^{C\,U}\dot{\omega}_C $$

$$ = \sum_i -m_i\,{}^{C}\hat{P}_i\,{}^{C}\hat{P}_i\,{}^{C\,U}\dot{\omega}_C = \sum_i -m_i\,{}^{C}\hat{P}_i^{2}\,{}^{C}\dot{\omega}_C $$

- 遵循之前符号规则，这里用${}^{C}\dot{\omega}_C = {}^{C\,U}\dot{\omega}_C$，表示该（联体）质心坐标系在惯性坐标系 U 中的角加速度

7.2 刚体的惯性张量与欧拉方程

- cN的第二项

C U R □ mi RcP Ci × UQC × UQC × RcP i
i

□ mi RU C RcP i × R C UQC × UQC × RcP i
i

□ mi CPi × URUQC × R C UQC × RcP i
i

□ mi CPi × C UQC × URUQC × R CRcP i
i

□ mi CPi × C UQC × C UQC × cP i
i

□ −mi C UQC × cP i × cP i × C UQC
i

□ −mi C仙 C cP 2 i ^ C仙C
i

- 遵循之前符号规则，这里用 仙C = UQC， 表示该(联体)质心坐标系在惯性坐标系 U 中的角速度

7.2 刚体的惯性张量与欧拉方程

$$^{C}N = \sum_i -m_i\, {}^{C}\hat{P}_i^{2}\, {}^{C}\dot{\omega}_C + \sum_i -m_i\, {}^{C}\omega_C \times {}^{C}\hat{P}_i^{2}\, {}^{C}\omega_C$$

记 $^{C}I = \sum_i -m_i\, {}^{C}\hat{P}_i^{2}$

$$^{C}N = {}^{C}I\, {}^{C}\dot{\omega}_C + {}^{C}\omega_C \times {}^{C}I\, {}^{C}\omega_C$$

- 该式为旋转刚体的欧拉方程
- 欧拉方程描述了作用在刚体上的力矩^{C}N与刚体旋转角速度$^{C}\omega_C$和角加速度$^{C}\dot{\omega}_C$之间的关系
- ^{C}I称为刚体的惯性张量（inertia tensor），或旋转惯性矩阵（rotational inertia matrix）

7.2 刚体的惯性张量与欧拉方程

- 可以看出，${}^cI$是一个3 × 3矩阵
- 如将${}^cP_i$完整记为$[x_i, y_i, z_i]^T$，${}^cI$矩阵各元素为：

$$
{}^cI = \begin{bmatrix} \square m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\square m_i x_i y_i & -\square m_i x_i z_i \\ -\square m_i x_i y_i & \square m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\square m_i y_i z_i \\ -\square m_i x_i z_i & -\square m_i y_i z_i & \square m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix}
$$

- 记为：

$$
{}^cI =: \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}
$$

7.2 刚体的惯性张量与欧拉方程

- 考虑质量连续分布的刚体
- 用密度函数$\rho(x,y,z)$和微分单元体dV的乘积替代点质量，用积分运算替代求和运算，可得：

$$
{}^{C}I := \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}
$$

$$I_{xx} = \int_B (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)\,dV$$

$$I_{yy} = \int_B (x^2 + z^2)\rho(x,y,z)\,dV$$

$$I_{zz} = \int_B (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)\,dV$$

$$I_{xy} = \int_B xy\rho(x,y,z)\,dV$$

$$I_{xz} = \int_B xz\rho(x,y,z)\,dV$$

$$I_{yz} = \int_B yz\rho(x,y,z)\,dV$$

- 惯性张量是一个对称矩阵
- 惯性张量中的对角元素I_{xx}、I_{yy}和I_{zz}称为**惯性矩(mass moments of inertia)**
- 非对角元素I_{xy}、I_{xz}和I_{yz}称为**惯性积(mass product of inertia)**

- 例7-1:考虑如图中的质量为m，长度为l，宽度为w，高度为h的长方体连杆。连杆的质量是均匀分布的。建立如图所示的(原点)位于长方体连杆质心的联体坐标系{C}。计算该连杆在{C}下的惯性张量。

解： 该连杆的密度$\rho = \dfrac{m}{hlw}$。

（1）惯性矩：

$$I_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} (y^2 + z^2)\rho dx \right) dydz$$

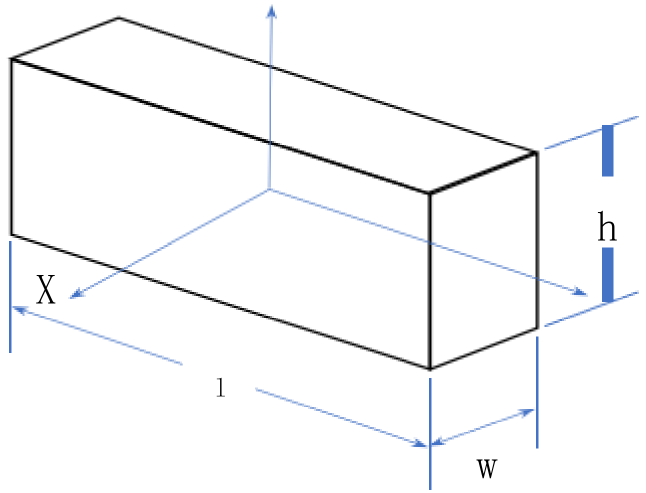
$$= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} w\left(y^2 + z^2\right)\rho\, dydz = w\rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{y^3}{3} + z^2 y\right)\Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dz$$

$$= w\rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{l^3}{12} + z^2 l\right) dz = w\rho \left(\frac{l^3 z}{12} + \frac{z^3 l}{3}\right)\Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = w\rho\left(\frac{l^3 h}{12} + \frac{h^3 l}{12}\right)$$

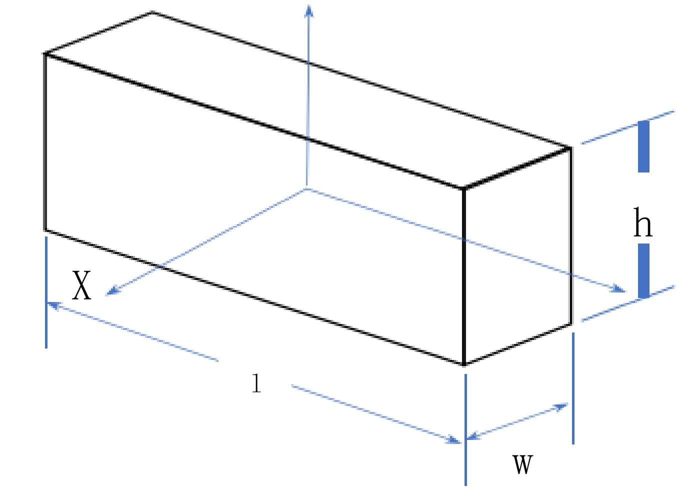
$$= \frac{m}{12}\left(l^2 + h^2\right)$$

类似的，可计算得：

$$I_{yy} = \frac{m}{12}\left(h^2 + w^2\right), \quad I_{zz} = \frac{m}{12}\left(w^2 + l^2\right)$$



7.2 刚体的惯性张量与欧拉方程



(2) 惯性积：

$$I_{xy}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\Box\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} xy\rho dx \quad dydz$$

$$=\rho\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} d\frac{x^2y}{2} \quad dydz = 0$$

类似的，可计算得：

$$I_{yz}=0,\quad I_{yz}=0$$

(3) 该连杆在{C}下的惯性张量：

$$ {}^{C}I=\begin{bmatrix}\frac{m}{12}\left(l^2+h^2\right) & 0 & 0\\ 0 & \frac{m}{12}\left(h^2+w^2\right) & 0\\ 0 & 0 & \frac{m}{12}\left(w^2+l^2\right)\end{bmatrix}$$

7.2 刚体的惯性张量与欧拉方程

- 注意： 惯性张量也可以定义在非质心坐标系中
- 例7-2:考虑如图中的质量为m，长度为l，宽度为w，高度为h的长方体连杆。连杆的质量是均匀分布的。建立如图所示的(原点)位于长方体连杆一顶点的联体坐标系{B}。计算该连杆在{B}下的惯性张量。

解： 该连杆的密度$\rho = \frac{m}{hlw}$。

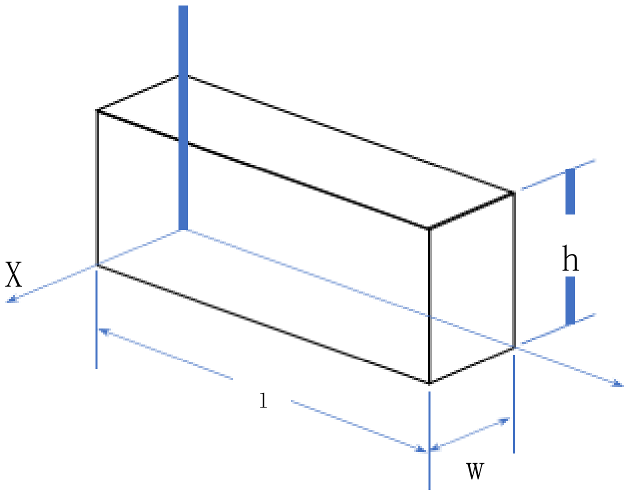
(1) 惯性矩：

$$I_{xx} = \int_0^h \int_0^l \int_0^w (y^2 + z^2)\rho\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^h \int_0^l w(y^2 + z^2)\rho\, dy\, dz = w\rho \int_0^h \left(\frac{y^3}{3} + z^2 y\right)\Big|_0^l dz$$

$$= w\rho \int_0^h \left(\frac{l^3}{3} + z^2 l\right) dz = w\rho \left(\frac{l^3 z}{3} + \frac{z^3 l}{3}\right)\Big|_0^h$$

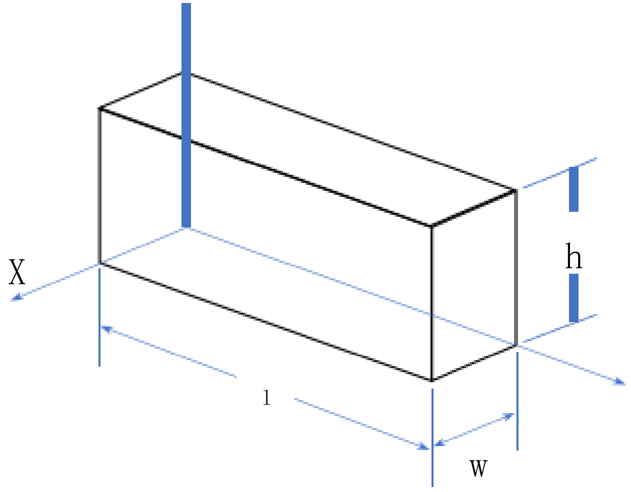
$$= w\rho\left(\frac{l^3 h}{3} + \frac{h^3 l}{3}\right) = \frac{m}{3}\left(l^2 + h^2\right)$$



类似的，可计算得：

$$I_{yy} = \frac{m}{3}\left(h^2 + w^2\right),\ I_{zz} = \frac{m}{3}\left(w^2 + l^2\right)$$

7.2 刚体的惯性张量与欧拉方程



(2）惯性积：

$$I_{xy} = \int_0^h \int_0^l \int_0^w xy\rho\, dx\, dy\, dz$$

$$= \rho \int_0^h \int_0^l d\left.\frac{x^2 y}{2}\right|_0^w dy\, dz$$

$$= \rho \int_0^h \int_0^l \frac{w^2 y}{2} dy\, dz = \rho \int_0^h d\left.\frac{w^2 y^2}{4}\right|_0^l dz = \rho \int_0^h \frac{w^2 l^2}{4} dz$$

$$= \rho \frac{w^2 l^2 h}{4} = \frac{m}{4} wl$$

类似的，可计算得：

$$I_{yz} = \frac{m}{4} lh, \quad I_{xz} = \frac{m}{4} hw$$

(3） 该连杆在{B}下的惯性张量：

$$^{B}I = \begin{bmatrix} \frac{m}{3}\left(l^2 + h^2\right) & -\frac{m}{4} wl & -\frac{m}{4} hw \\ -\frac{m}{4} wl & \frac{m}{3}\left(h^2 + w^2\right) & -\frac{m}{4} lh \\ -\frac{m}{4} hw & -\frac{m}{4} lh & \frac{m}{3}\left(w^2 + l^2\right) \end{bmatrix}$$

7.3 牛顿-欧拉迭代动力学方程

- 利用牛顿-欧拉法求解动力学方程分两个阶段：

  - ➢ 向外迭代：　从(虚拟)的连杆0开始，依次计算连杆1到N联体坐标系得速度(线速度和角速度)以及加速度(线加速度和角加速度)，同时利用连杆i联体坐标系得速度和加速度计算连杆i质心的加速度，并利用牛顿方程和欧拉方程求取作用在连杆上的力和力矩

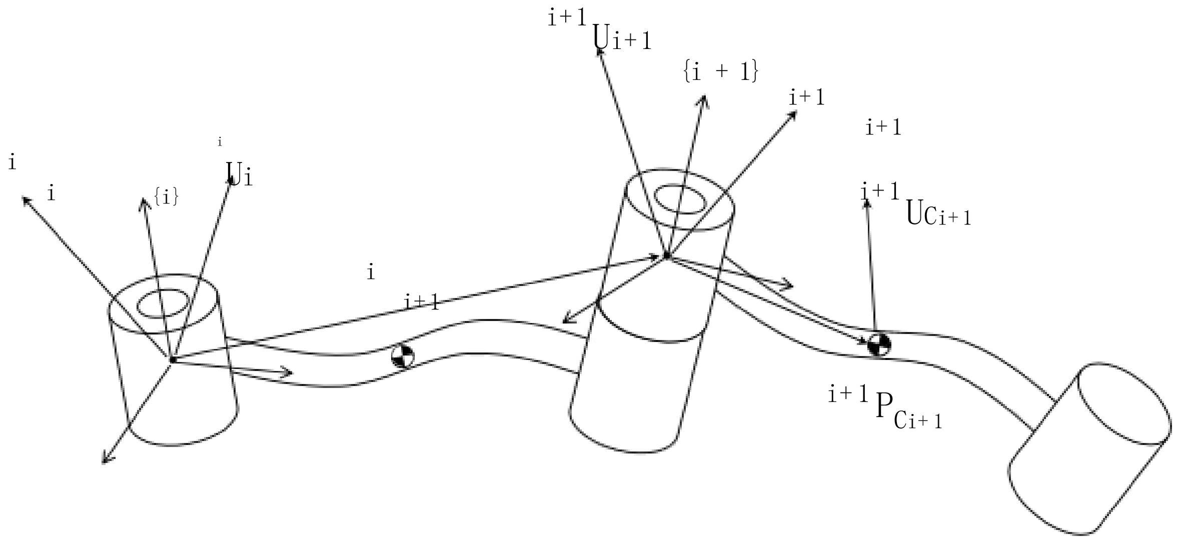
  - ➢ 向内迭代：　从连杆N开始，根据力平衡方程和力矩平衡方程，依次计算出连杆N－1到连杆1上的力，同时计算出产生这些力和力矩所需的(转动型关节)关节力矩或(平动型关节)关节力

- 注意：　下面牛顿-欧拉迭代动力学方程的讨论中忽略了摩擦的影响，即假设各关节均无摩擦

7.3 牛顿-欧拉迭代动力学方程

7.3.1 向外迭代：速度和加速度的计算

(1) 连杆的速度传递:



- 考虑一般的连杆坐标系{i}及其相邻连杆坐标系{i + 1}，已知：

$$^{i}仙_{i+1} = {}^{i}仙_{i} + {}_{i}^{i+1}R\, e\dot{\theta}_{i+1}\, {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$

$$^{i}U_{i+1} = {}^{i}U_{i} + {}^{i}仙_{i} \times {}^{i}O_{i+1}$$

- 左乘 ${}_{i}^{i+1}R$ ：

$$^{i+1}仙_{i+1} = {}_{i}^{i+1}R\, {}^{i}仙_{i} + e\dot{\theta}_{i+1}\, {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$

$$^{i+1}U_{i+1} = {}_{i}^{i+1}R\, ({}^{i}U_{i} + {}^{i}仙_{i} \times {}^{i}O_{i+1})$$

7.3 牛顿-欧拉迭代动力学方程

7.3.1 向外迭代：速度和加速度的计算

(2) 连杆的角加速度传递:

- 角加速度传递公式：

$$ {}^A\dot{\omega}_C = {}^A\dot{\omega}_B + {}^A_BR\,{}^B\dot{\omega}_C + {}^A\omega_B \times {}^A_BR\,{}^B\omega_C $$

- 令 $A=\{0\}$， $B=\{i\}$， $C=\{i+1\}$：

$$ {}^0\dot{\omega}_{i+1} = {}^0\dot{\omega}_i + {}^0_iR\,{}^i\dot{\omega}_{i+1} + {}^0\omega_i \times {}^0_iR\,{}^i\omega_{i+1} $$

- ${}^i\omega_{i+1} = \dot{\theta}_{i+1}\,{}^i_{i+1}R\,\hat{Z}_{i+1}$

- 注意： ${}^i\omega_{i+1}$和 ${}^i\omega_{i+1}$具有不同的物理意义

7.3 牛顿-欧拉迭代动力学方程

7.3.1 向外迭代：速度和加速度的计算

- 求导得：

$$^{0}\Omega_{i+1} = \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{0}_{i+1}R\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$

$$^{0}\dot{\Omega}_{i+1} = \ddot{\theta}_{i+1}\,{}^{0}_{i+1}R\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$

- 代入$\dot{\omega}_{i+1}$式：

$$^{0}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{0}\dot{\omega}_{i} + \ddot{\theta}_{i+1}\,{}^{0}_{i+1}R\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + {}^{0}\omega_{i} \times \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{0}_{i+1}R\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$

- 两边乘上${}^{i}_{0}R$：

$$^{i}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i}\dot{\omega}_{i} + \ddot{\theta}_{i+1}\,{}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + {}^{i}\omega_{i} \times \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$

- 为得到{i}到{i + 1}的递归式
- 两边再乘上${}^{i+1}_{i}R$：

$$^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\dot{\omega}_{i} + \ddot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_{i} \times \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$

- 对于平动型关节，因为$\dot{\theta}_{i+1} = 0$，$\ddot{\theta}_{i+1} = 0$，上式可简化为：

$$^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\dot{\omega}_{i}$$

7.3 牛顿-欧拉迭代动力学方程

7.3.1 向外迭代：速度和加速度的计算

(3)连杆的线加速度传递：

- 线加速度传递公式

AV⋂ Q = AV⋂ BORG + B ARBV⋂ Q+ 2 AnB × B ARBVQ+ An⋂ B × B ARBQ + AnB × AnB × B ARBQ

- 令 A = {0}， B = {i}，Q为{i + 1}原点：

U⋂i+1 = U⋂i + i 0RiV⋂i+1 + 2仙i × i 0RiVi+1 + 仙⋂ i × i 0RiOi+1 + 仙i × 仙i × i 0RiOi+1

- 两边同乘上 0iR：

iU⋂i+1 = iU⋂i +iV⋂i+1 + 2i仙i ×iVi+1 +i仙⋂ i ×iOi+1 + i仙i × i仙i ×iOi+1

- 两边再乘上 i+1iR，可得到{i}到{i + 1}的递归式：

i+1U⋂i+1 = i+1iR iU⋂i +i仙⋂ i ×iOi+1 + i仙i × i仙i ×iOi+1 + i+1iR iV⋂i+1 + 2i仙i ×iVi+1

7.3 牛顿-欧拉迭代动力学方程

7.3.1 向外迭代：速度和加速度的计算

- 对于平动型关节：

i+1 RiVi+1 = i+1Vi+1 = dȟ i+1 i+1 $\hat{Z}_{i+1}$， i+1 RiVȟ i+1 = i+1Vȟ i+1 $\ddot{d}$ i+1 i+1$\hat{Z}$ i+1 ， i+1 仙 i+1 = i+1 Ri 仙

i

- i+1Uȟ i+1 式可表示为

i+1Uȟ i+1 = i+1 R iUȟ i +i仙ȟ i ×i0i+1 + i仙i × i仙i ×i0i+1 $\ddot{d}$+ i+1 i$\hat{Z}$ i+1 + 2i+1仙i+1 × dȟ i+1 i$\hat{Z}$ i+1

- 对于转动型关节：

iVi+1 = 0， iVȟ i+1 = 0

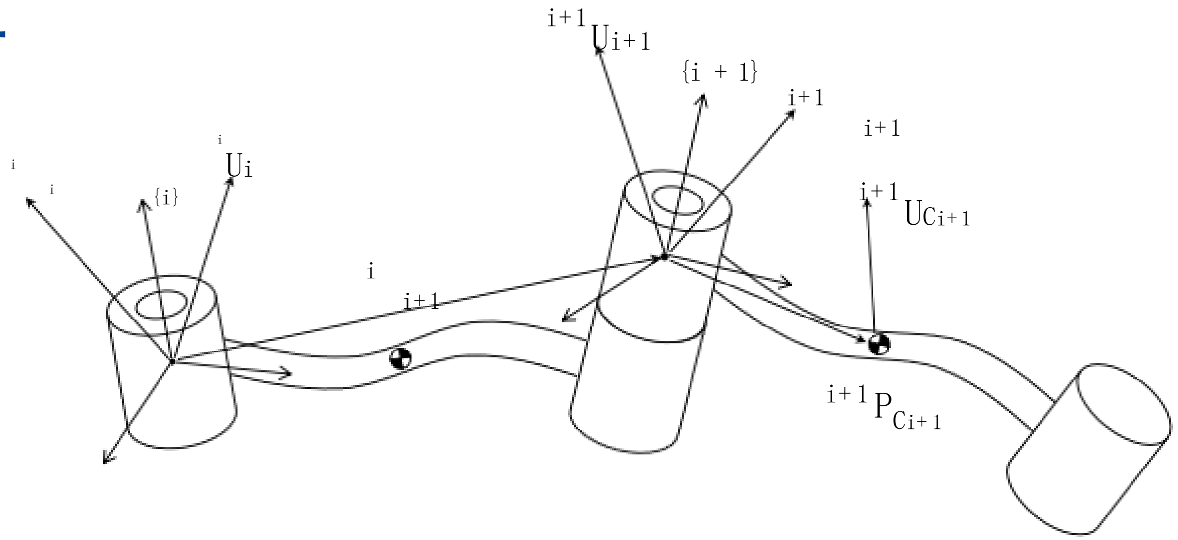
- i+1Uȟ i+1式可简化为：

i+1Uȟ i+1 = i+1 R iUȟ i +i仙ȟ i ×i0i+1 + i仙i × i仙i ×i0i+1

7.3 牛顿-欧拉迭代动力学方程

7.3.1 向外迭代：速度和加速度的计算

(4) 连杆质心的线加速度传递：



- 为了计算作用在连杆质心上的力，还需要计算连杆质心的加速度

- 线加速度传递公式：

AV̇Q = AV̇BORG + ARBV̇Q + 2 AnB × B ARBVQ + AṅB × B ARBQ + AnB AnB × B A RBQ

- 选取 A = 0， B = {i}，Q为连杆i质心，表示为Ci

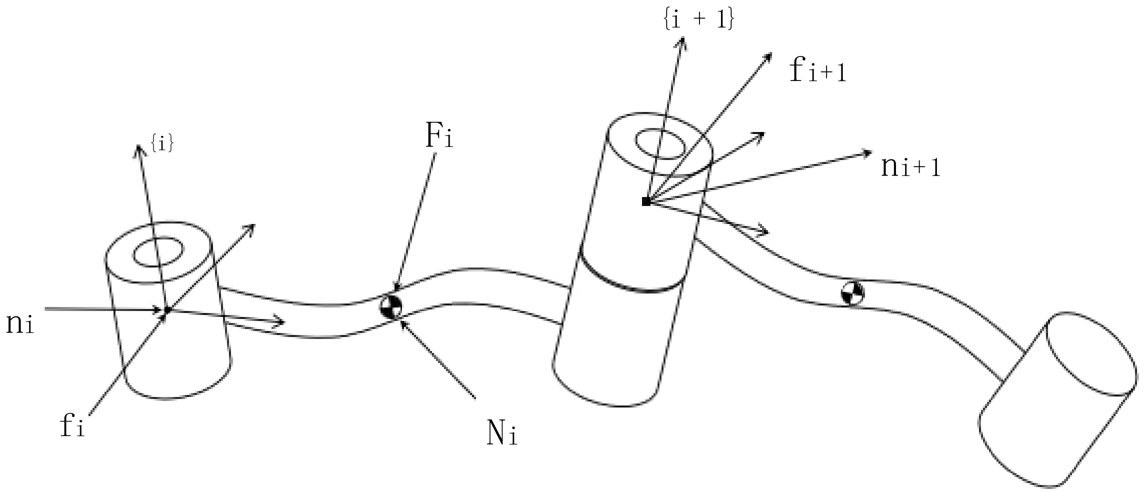
- 因为BVQ = iVCi = 0，BV̇Q = iV̇Ci = 0，有：

UĊi = U̇i + 仙̇i × RiPCi + 仙i × 仙i × RiPCi

- 两边同乘上 $^{i}_{0}R$：

iU̇Ci = iU̇i + i仙̇i × iPCi + i仙i × i仙i × iPCi

7.3 牛顿-欧拉迭代动力学方程



- 由前面的计算，我们可以从连杆0开始，向外迭代计算连杆1至连杆n的质心坐标系的线加速度、角速度和角加速度
- 接着利用牛顿-欧拉公式，可计算作用在**连杆质心上的惯性力和力矩**:

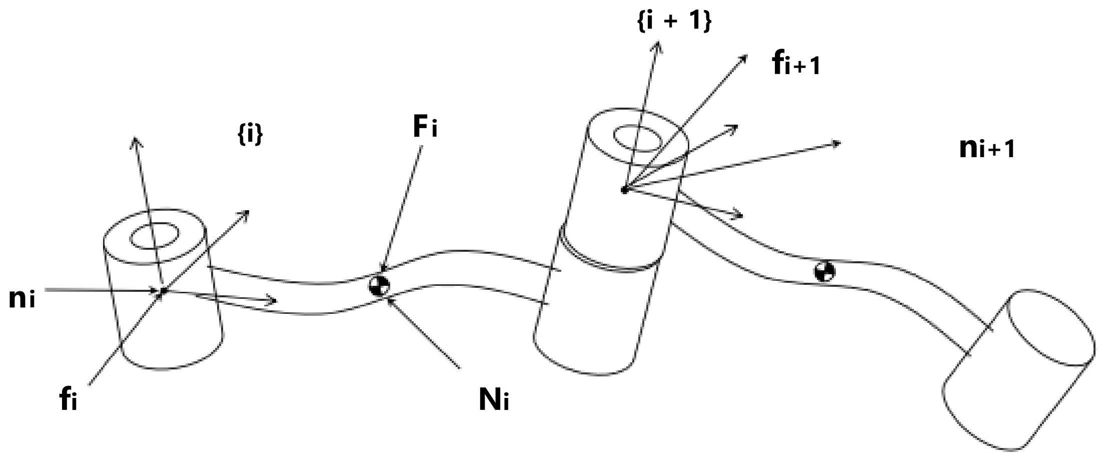
$$F_i = m\dot{v}_{C_i}$$

$$^{C_i}N_i = {}^{C_i}I_{C_i}\,{}^{C_i}\dot{\omega}_i + {}^{C_i}\omega_i \times {}^{C_i}I_{C_i}\,{}^{C_i}\omega_i$$

- 坐标系{Ci}的原点位于连杆质心，可以选取坐标系{Ci}的各坐标轴方向与原连杆坐标系{i}方向相同，则上式中$^{C_i}\dot{\omega}_i = {}^{i}\dot{\omega}_i$，$^{C_i}\omega_i = {}^{i}\omega_i$

7.3 牛顿-欧拉迭代动力学方程

7.3.2 向内迭代：力和力矩的计算



- 右图为典型连杆在无重力状态下的受力情况
- 考虑连杆i，先考虑其力平衡方程

  - ➢ 作用于{i}原点的力向量f_i表示连杆i – 1施加在连杆i上的力，力矩向量n_i表示连杆i – 1施加在连杆i上的力矩
  - ➢ 除了惯性力${}_iF_i$，连杆i还受到连杆i – 1施加在连杆i上的${}_if_i$，这里左上标表示这两个力表示在坐标系{i}下
  - ➢ 由于连杆i对连杆i + 1有一作用力f_{i+1}，所以连杆i + 1对连杆i有一反作用力$-f_{i+1}$，同样的，用${}^{i+1}f_{i+1}$在坐标系{i + 1}下表示f_{i+1}

- 将所有作用于连杆i上的力向量相加，得到力平衡方程：

$$ {}^iF_i = {}^if_i - {}_{i+1}^{\;\;i}R \, {}^{i+1}f_{i+1} $$