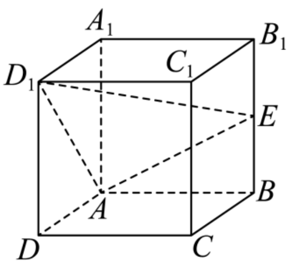
2023-2024学年湖南省部分名校普通高等学校招生全国统一考试模拟演练数学试题

一、单选题：本题共 **8** 小题，每小题 **5** 分，共 **40** 分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|x\subseteq B\}$，$B=\{1,2,3\}$，则 $A\cap B=$(　)

A. $\varnothing$　　B. $\{\varnothing\}$　　C. $\{1,2,3\}$　　D. $\{\varnothing,\{1,2,3\}\}$

2. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 在线段 BB_1 上运动，则下列直线与平面 AD_1E 的夹角为定值的是(　)

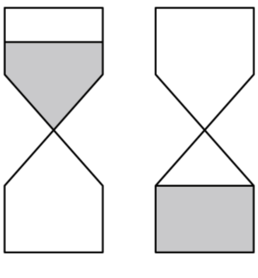


A. B_1C　　B. BC_1　　C. A_1C　　D. AC_1

3. 若需要刻画预报变量 w 和解释变量 x 的相关关系，且从已知数据中知道预报变量 w 随着解释变量 x 的增大而减小，并且随着解释变量 x 的增大，预报变量 w 大致趋于一个确定的值，为拟合 w 和 x 之间的关系，应使用以下回归方程中的$(b>0,e$ 为自然对数的底数$)$(　)

A. $w=bx+a$　　B. $w=-b\ln x+a$　　C. $w=-b\sqrt{x}+a$　　D. $w=be^{-x}+a$

4. 有一个沙漏如图所示，由圆柱与圆锥组合而成，上下对称，沙漏中沙子完全流下刚好填满下半部分的圆柱部分，已知沙漏总高度为 $10cm$，圆柱部分高度为 $2cm$，则初始状态的沙子高度 h 为(　)



A. $3cm$　　B. $3.5cm$　　C. $4cm$　　D. $4.5cm$

5. 已知 α、β 都是锐角，且 $3sin^2\alpha+2sin^2\beta=1$，$3\sin 2\alpha-2\sin 2\beta=0$，那么 α、β 之间的关系是(　)

A. $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$　　B. $\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{4}$　　C. $\alpha+2\beta=\dfrac{\pi}{4}$　　D. $\alpha+2\beta=\dfrac{\pi}{2}$

6. 挪威画家爱德华·蒙克于 1893 年创作的《呐喊》是表现主义绘画的代表作品，刻画了一个极其痛苦的表情．画作局部如下图所示，人像的脸近似为一个椭圆，下巴近似为一个圆，圆心 *O* 在椭圆的下顶点上，椭圆与圆有两个交点 *A*，*B*，椭圆的两焦点与圆的圆心在同一直线上，记椭圆的中心为Q. 连接直线 *QB*，*OQ*，经测量发现 *BQ* 与圆 *O* 相切，圆的半径为 1*cm*， $BQ=2\sqrt{2}cm$. 记该椭圆的离心率为 *e*，$[x]$ 为不超过 *x* 的最大整数，则 $\left[\frac{3}{e}\right]$ 的值为(　　)

A. 2　　　　B. 4　　　　C. 6　　　　D. 8

7. 正八边形 *ABCDEFGH* 上存在一动点 P(点 *P* 与 *A*，*C* 不重合)，已知正八边形边长为 2，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}$ 的最大值为(　　)

A. $2+\sqrt{2}$　　　　B. $6+4\sqrt{2}$　　　　C. $6+6\sqrt{2}$　　　　D. $8+6\sqrt{2}$

8. 设函数 $f(x)=2x-\cos x$，设 $\{a_n\}$ 是公差为 $\frac{\pi}{8}$ 的等差数列， $f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_5)=5\pi$，则 $[f(a_3)]^2-a_1a_5=$(　　)

A. 0　　　　B. $\frac{1}{16}\pi^2$　　　　C. $\frac{1}{8}\pi^2$　　　　D. $\frac{13}{16}\pi^2$

二、多选题：本题共 **4** 小题，共 **20** 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 **5** 分，部分选对的得 **2** 分，有选错的得 **0** 分。

9. 投掷一枚均匀的骰子 8 次，记录每次骰子出现的点数．根据统计结果，可以判断一定出现点数 6 的是(　　)

A. 第 25 百分位数为 2，极差为 4　　　　B. 平均数为3.5，第 75 百分位数为3.5

C. 平均数为 3，方差为 3　　　　D. 众数为 4，平均数为4.75

10. 已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别为奇函数和偶函数，且 $f(x)+g(x)=2^x$，则(　　)

A. $f(x)-g(x)=2^{-x}$　　　　B. $f(x)$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增

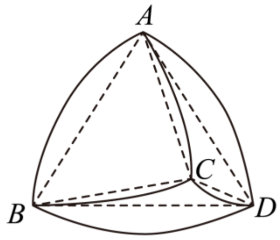
C. $f(x)$ 的导函数 $f'(x)\geqslant 1$　　　　D. $g(x)\geqslant 1$

11. 已知 $ae^b<be^a<-e^{a+b+1}$，*e* 是自然对数的底数，则下列结论中正确的是(　　)

A. $a<b<-2$　　　　B. $\frac{a}{b}>1$

C. $ab+a+b+1>0$　　　　D. $ae^a<be^b$

12. 勒洛四面体是一个非常神奇的“四面体”，它能在两个平行平面间自由转动，并且始终保持与两平面都接触.勒洛四面体是以正四面体的四个顶点为球心，以正四面体的棱长为半径的四个球的相交部分围成的几何体，若用棱长为 4 的正四面体 *ABCD* 作勒洛四面体，如图，则下列说法正确的是(　)



A. 平面 *ABC* 截勒洛四面体所得截面的面积为 $8\pi-8\sqrt{3}$

B. 记勒洛四面体上以 *C*，*D* 为球心的两球球面交线为弧 *AB*，则其长度为 $\frac{4\pi}{3}$

C. 该勒洛四面体表面上任意两点间距离的最大值为 4

D. 该勒洛四面体能够容纳的最大球的半径为 $4-\sqrt{6}$

三、填空题：本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分。

13. 已知 *i* 为虚数单位，$2i-3$ 是关于 *x* 的方程 $2x^2+px+q=0(p,q$ 为实数 $)$ 的一个根，则 $p+q=$ __________.

14. 平面直角坐标系中有线段 *AB*，对应直观图上的线段是 $A'B'$，若 $|AB|=|A'B'|$，则 *AB* 的斜率为 __________.

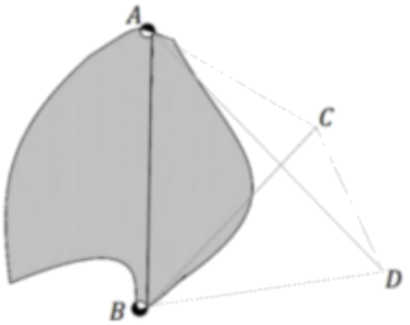
15. 已知 F_1，F_2 分别为双曲线 *C*：$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{6}=1$ 的左、右焦点，过 F_2 的直线与双曲线 *C* 的右支交于 *A*，*B* 两点(其中点 *A* 在第一象限). 设点 *H*，*G* 分别为 $\triangle AF_1F_2$，$\triangle BF_1F_2$ 的内心，则 $|HG|$ 的取值范围是 __________.

16. 设 $a>0$，若对于任意正实数 *b*，函数 $y=\sqrt{x^2+ax+b}$ 的图象与曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 都有交点，则 *a* 的最小值为__________.

四、解答题：本题共 **6** 小题，共 **70** 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. (本小题 10 分)

为测量地形不规则的一个区域的径长 *AB*，采用间接测量的方法，如图，阴影部分为不规则地形，利用激光仪器和反光规律得到 $\angle ACB=\angle DCB$，$\angle ACD$ 为钝角，$AC=5$，$AD=7$，$\sin\angle ADC=\frac{2\sqrt{6}}{7}$.



(1) 求 $\sin\angle ACB$ 的值；

(2) 若测得 $\angle BDC=\angle BCD$，求待测径长 AB.

18.（本小题 12 分）

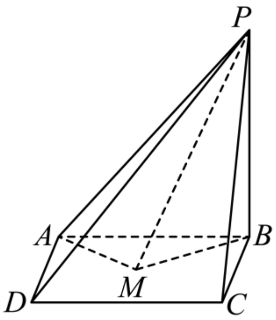
数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$\dfrac{a_1}{a_2-1}\cdot\dfrac{a_2}{a_3-1}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_n}{a_{n+1}-1}=n+1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 数列 $\left\{\left(-\dfrac{4}{5}\right)^n a_n\right\}$ 中是否存在最大项和最小项？若存在，求出相应的最大项或最小项；若不存在，说明理由.

19.（本小题 12 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 内，$PB\perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 为正方形，$AB=2$，$BP=2\sqrt{3}$. 过 P 的直线 l 交平面 $ABCD$ 于正方形 $ABCD$ 内的点 M，且满足平面 $PAM\perp$ 平面 PBM.



(1) 当 $\angle ABM\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{3\pi}{8}\right]$ 时，求点 M 的轨迹长度；

(2) 当二面角 $M-PA-B$ 的余弦值为 $\dfrac{4}{5}$ 时，求二面角 $P-MA-D$ 的余弦值.

20.（本小题 12 分）

一部电视连续剧共有 $n+1(n\geqslant 10)$ 集，某同学看了第一集后，被该电视剧的剧情所吸引，制定了如下的观看计划：从看完第一集后的第一天算起，把余下的 n 集电视剧随机分配在 $2n$ 天内；每天要么不看，要么看完完整的一集；每天至多看一集．已知这部电视剧最精彩的部分在第 n 集，设该同学观看第一集后的第 X 天观看该集.

(1) 求 X 的分布列；

(2) 证明：最有可能在第 $(2n-2)$ 天观看最精彩的第 n 集.

21.（本小题 12 分）

已知抛物线 C_1：$y^2=2px$，C_2：$x^2=2py(p>0)$ 相交于点 $(4,4)$，C_1 在第一象限内一点 P 处的切线 l 交 C_2 于 A,B 两点，交 x 轴于点 M，C_2 在 A,B 处的切线交于点 D.

(1) 证明：当 $\triangle ABD$ 面积最小时，P 为 AB 中点；

(2) 过 P 作 l 的垂线交 C_1 于另一点 Q，连接 MQ 交 C_1 于另一点 R，当 $\triangle PQR$ 面积最小时，求点 M 的坐标.

22.（本小题 12 分）

已知函数 $f(x)=\ln(x+a)+e^{-x}-a$，$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数.

(1) 判断 $x=0$ 是否为 $f(x)$ 的极值点，并说明理由；

(2) 若 $1<a<2$，x_0 为 $f(x)$ 最小的零点，证明：当 $x\in(-a,0)$ 时，$f(x)<f'(x_0)$.

答案和解析

1.【答案】A

【解析】【分析】

本题考查集合的交集运算，

由子集的定义得出集合 A，再由集合的交集运算可得答案.

【解答】

解：因为集合 $A=\{x|x\subseteq B\}$ ， $B=\{1,2,3\}$ ，

所以 $A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$ ，

所以 $A\cap B=\varnothing$ ，

故选： A.

2.【答案】B

【解析】【分析】

本题考查直线与平面所成的角，

由线面平行的判定定理可知 $BC_1//$ 平面 AD_1E ，所以 BC_1 与平面 AD_1E 的夹角始终为 0° ，而 B_1C ， A_1C ， AC_1 与平面 AD_1E 的夹角均会因为 E 点位置的不同而夹角不同.

【解答】

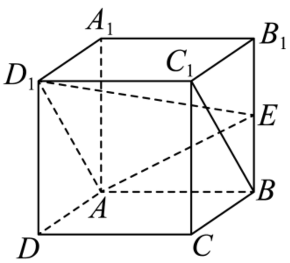
解：连接 BC_1 ，因为 $BC_1//AD_1$ ，

因为 $AD_1\subset$ 平面 AD_1E ， $BC_1\not\subset$ 平面 AD_1E ，

所以 $BC_1//$ 平面 AD_1E ，所以 BC_1 与平面 AD_1E 的夹角始终为 0° ，

而 B_1C ， A_1C ， AC_1 与平面 AD_1E 的夹角均会因为 E 点位置的不同而夹角不同.

故选： B.



3.【答案】D

【解析】【分析】

本题考查了非线性回归分析，属于基础题.

根据 $b>0$ 及函数的单调性，判断 *w* 随 *x* 增大时的增减性，再判断各个回归方程是否随着解释变量 *x* 的增大趋于一个确定的值，即可得出答案.

【解答】

解：对于 *A*：因为 $y=x$ 在定义域内单调递增且 $b>0$ ，所以 *w* 随着 *x* 的增大而增大，不合题意，故 *A* 错误；

对于 *B*：因为 $y=\ln x$ 在定义域内单调递增且 $b>0$ ，所以 *w* 随着 *x* 的增大而减小，当解释变量 $x\to+\infty$ ， $w\to-\infty$ ，不合题意，故 *B* 错误；

对于 *C*：因为 $y=\sqrt{x}$ 在定义域内单调递增且 $b>0$ ，所以 *w* 随着 *x* 的增大而减小，当解释变量 $x\to+\infty$ ， $w\to-\infty$ ，不合题意，故 *C* 错误；

对于 *D*：因为 $y=e^{-x}=(\frac{1}{e})^{x}$ 在定义域内单调递减且 $b>0$ ，所以 *w* 随着 *x* 的增大而减小，当解释变量 $x\to+\infty$ ， $w\to a$ ，故 *D* 正确；

故选： D.

4.【答案】*C*

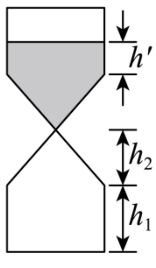
【解析】【分析】

本题考查了简单组合体的体积，圆锥、圆柱的体积公式，属于基础题.

先根据题意求得圆锥高度 h_2 ，再利用体积相等求得初始状态圆柱部分沙子的高度 h' ，由此得解.

【解答】

解: 如图，设初始状态圆柱部分沙子的高度为 h' ，沙漏下半部分的圆柱高度为 h_1 ，圆锥高度为 h_2 ，上、下底面半径为 *r*，



则 $h_1=2cm$ ，又沙漏总高度为 10*cm*，则 $h_2=\frac{1}{2}(10-2h_1)=3cm$ ，

所以 $\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h_2+\pi r^2\cdot h'=\pi r^2\cdot h_1$ ，即 $\frac{1}{3}\pi r^2\times3+\pi r^2\cdot h'=\pi r^2\times2$ ，

解得 $h'=1cm$，

所以初始状态的沙子高度为 $h_2+h'=4cm$.

故选：C.

5.【答案】D

【解析】【分析】

本题考查了三角恒等变换相关知识，属于中档题.

推导出 $\dfrac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta}=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ ，可得出 $\cos(\alpha+2\beta)=0$ ，求出 $\alpha+2\beta$ 的取值范围，即可得解.

【解答】

解：因为 $3sin^2\alpha+2sin^2\beta=1$ ，则 $3sin^2\alpha=1-2sin^2\beta=\cos 2\beta$ ，

由题易得 $2\sin 2\beta=3\sin 2\alpha=6\sin\alpha\cos\alpha$ ，

因为 α 、 β 都是锐角，由题意可得 $\cos 2\beta=3sin^2\alpha>0$ ，

所以，$\dfrac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta}=\dfrac{3\sin\alpha\cos\alpha}{3sin^2\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ ，

所以，$\cos\alpha\cos 2\beta-\sin\alpha\sin 2\beta=\cos(\alpha+2\beta)=0$ ，

因为 α 、 β 都是锐角，则 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ 且 $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ ，则 $0<2\beta<\pi$ ，

所以，$0<\alpha+2\beta<\dfrac{3\pi}{2}$ ，因此，$\alpha+2\beta=\dfrac{\pi}{2}$.

故选：D.

6.【答案】B

【解析】【分析】

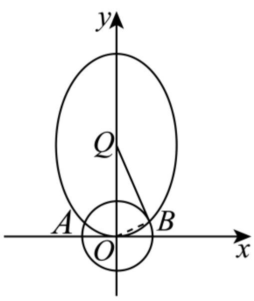
本题考查求椭圆的离心率，属于中档题.

如图，建立平面直角坐标系，即可求出 Q 、 B 的坐标，设椭圆方程为 $\dfrac{(y-3)^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$ ，$(a>b>0)$ ，

将 B 点坐标代入方程求出 b^2 ，即可求出离心率，从而得解.

【解答】

解：如图，建立平面直角坐标系，



连接 OB ，依题意 $|OB|=1$ ，$|BQ|=2\sqrt{2}$ ，且 $\angle OBQ=\dfrac{\pi}{2}$ ，

所以 $|OQ|=\sqrt{|OB|^2+|BQ|^2}=3$ ，所以 $Q(0,3)$ ，

设椭圆方程为 $\frac{(y-3)^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ ， $(a>b>0)$ ，则 $a=3$ ，

又 $x_B=\frac{1\times2\sqrt{2}}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，所以 $y_B=\sqrt{1-x_B^2}=\frac{1}{3}$ ，所以 $B\left(\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{1}{3}\right)$ ，

则 $\frac{(\frac{1}{3}-3)^2}{3^2}+\frac{(\frac{2\sqrt{2}}{3})^2}{b^2}=1$ ，解得 $b^2=\frac{72}{17}$ ，

所以 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\frac{9\sqrt{17}}{17}$ ，

所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{3\sqrt{17}}{17}$ ，所以 $\frac{3}{e}=\sqrt{17}$ ，则 $\left[\frac{3}{e}\right]=4$.故选：*B*

7.【答案】*D*

【解析】【分析】

本题考查向量数量积的坐标运算，属于中档题.

由平面向量数量积的几何意义分析可知，当点 *P* 运动到点 *D* 时， $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}$ 取得最大值，然后建立平面直角坐标系利用坐标计算即可.

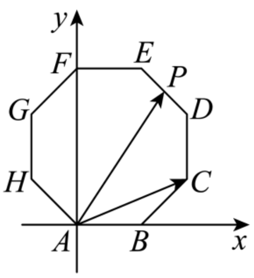
【解答】

解： $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}=\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AP}\right|\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AP}\rangle$ ，

由平面向量数量积的几何意义可知，当 $\left|\overrightarrow{AP}\right|\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AP}\rangle$ 最大时，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}$ 最大，

由图可知当点 *P* 运动到点 *D* 时， $\left|\overrightarrow{AP}\right|\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AP}\rangle$ 取得最大.

如图：建立平面直角坐标系，



则 $A(0,0)$ ， $C\left(2+\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ ， $D\left(2+\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right)$ ，

所以 $\overrightarrow{AC}=\left(2+\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ ， $\overrightarrow{AD}=\left(2+\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right)$.

所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}$ 的最大值为 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\left(2+\sqrt{2}\right)=8+6\sqrt{2}$，

故选： D.

8.【答案】*D*

【解析】【分析】

本题考查等差数列的性质，奇函数性质的应用，属于中档题.

【解答】

解：$\because f(x)=2x-\cos x$，

$\therefore$ 可令 $g(x)=2x+\sin x$，则其是定义在 R 上的奇函数，

$\because \{a_n\}$ 是公差为 $\dfrac{\pi}{8}$ 的等差数列，$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_5)=5\pi$

$\therefore g(a_1-\dfrac{\pi}{2})+g(a_2-\dfrac{\pi}{2})+\cdots+g(a_5-\dfrac{\pi}{2})=0$，

$\because a_3=\dfrac{\pi}{2}$，$a_1=\dfrac{\pi}{4}$，$a_5=\dfrac{3\pi}{4}$

$\therefore [f(a_3)]^2-a_1a_5=\pi^2-\dfrac{\pi}{4}\times\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{13\pi^2}{16}$.

9.【答案】BD

【解析】【分析】

本题考查了百分位数、极差、平均数、众数、方差，属于中档题.

对于 A，可采用特值法，对于 B，根据平均数和百分位数，即可判断，对于 C，可采用特值法，对于 D，可假设这 8 个数没有 6 点，根据题设推出矛盾，即可判断.

【解答】

解：不妨设 $1\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant x_4\leqslant x_5\leqslant x_6\leqslant x_7\leqslant x_8\leqslant 6$，则

对于 A，这 8 个数可以是 $1,2,2,2,3,3,4,5$，故不一定出现点数 6，故 A 错误.

对于 B，因为平均数为 3.5，所以 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8=3.5\times 8=28$，

又第 75 百分位数为 3.5，所以 $x_6+x_7=7$，所以 $x_6=3, x_7=4$，

所以 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_8=21$，且 $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant x_4\leqslant x_5\leqslant 3, 4\leqslant x_8\leqslant 6$，

所以 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\leqslant 15$，所以 $x_8\geqslant 6$. 所以一定出现点数 6，故 B 正确.

对于 C，这 8 个数可以是 $1,1,1,3,3,5,5,5$，故不一定出现点数 6，故 C 错误.

$\dfrac{1}{8}(1+1+1+3+3+5+5+5)=3$，

$s^2=\dfrac{1}{8}\left[(1-3)^2+(1-3)^2+(1-3)^2+(3-3)^2+(3-3)^2+(5-3)^2+(5-3)^2+(5-3)^2\right]=3$

对于 D，因为平均数为 4.75，所以 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8=4.75\times 8=38$，

又众数为 4，假设这 8 个数没有 6 点，则和最大的情况为 $4+4+4+4+4+5+5+5=35<38$，和题设矛盾，故一定出现点数 6. 故 D 正确.

故选：BD.

10.【答案】BD

【解析】【分析】

本题考查了复合函数的单调性及奇偶性，利用导数研究恒成立与存在性问题，基本不等式求取值范围，属于中档题.

根据函数的奇偶性可得 $f(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}, g(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$，可以判断 A，结合指数函数的单调性，可以判断 B，求导，结合基本不等式，可以判断 C，利用基本不等式，可以判断 D.

【解答】

解：由 $f(x)+g(x)=2^x$ 得 $f(-x)+g(-x)=2^{-x}$，

由于函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别为奇函数和偶函数，所以 $-f(x)+g(x)=2^{-x}$，

因此 $f(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}, g(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$，

对于 A，$f(x)-g(x)=-2^{-x}$，故 A 错误，

对于 B，由于函数 $y=2^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增，$y=2^{-x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递减，

所以 $f(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增，故 B 正确，

对于 C，$f'(x)=\dfrac{2^x\ln 2+2^{-x}\ln 2}{2}=\dfrac{(2^x+2^{-x})\ln 2}{2}\geqslant\dfrac{2\sqrt{2^x\times 2^{-x}}\ln 2}{2}=\ln 2,$ 当且仅当 $x=0$ 时取等号，

而 $\ln 2<1$，所以 C 错误，

对于 D，$g(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}\geqslant\dfrac{2\sqrt{2^x\times 2^{-x}}}{2}=1$，当且仅当 $x=0$ 时取等号，所以 D 正确，

故选：BD

11.【答案】BC

【解析】【分析】

本题主要考查函数的综合应用，解决本题的关键是由 $ae^b<be^a<-e^{a+b+1}$ 得 $a<0$，$b<0$，$\dfrac{a}{e^a}<\dfrac{b}{e^b}<-e$，进而利用导数工具得到 a，b 的大小关系以及取值范围.

先将已知不等式变形为 $\dfrac{a}{e^a}<\dfrac{b}{e^b}<-e$，然后构造函数 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$，利用导数研究 $f(x)$ 的单调性，从而得出 a，b 的大小关系以及取值范围，最后利用不等式的性质及函数的单调性对各选项作出判断.

【解答】

解：由 $ae^b<be^a<-e^{a+b+1}$ 得 $a<0$，$b<0$，$\dfrac{a}{e^a}<\dfrac{b}{e^b}<-e$，令 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$，

则 $f'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$，易知 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递增，

因为 $f(-1)=\dfrac{-1}{e^{-1}}=-e$，所以可得 $a<b<-1$，故 *A* 选项错误；

所以 $\dfrac{a}{b}>1$，故 *B* 选项正确；

因为 $a+1<0$，$b+1<0$，所以 $(a+1)(b+1)>0$，

即 $ab+a+b+1>0$，故 *C* 选项正确；

令 $g(x)=xe^{x}$，则 $g'(x)=e^{x}(x+1)$，

当 $x<-1$ 时，$g'(x)<0$，

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，

于是有 $g(a)>g(b)$，即 $ae^{a}>be^{b}$，故 *D* 选项错误.

故选：*BC*

12.【答案】*AD*

【解析】【分析】

本题考查球的切、接问题，考查空间几何体的截面问题，属于较难题.

对于 *A*，平面 *ABC* 截勒洛四面体所得截面面积为三个半径为 4，圆心角为 60° 的扇形的面积减去两个边长为 4 的正三角形的面积；对于 *B*，利用余弦定理求出弧 *AB* 所对的圆心角的余弦值，根据弧长公式进行判断; 对于 *C*，设弧 *AB* 的中点是 *M*，线段 *AB* 的中点是 *N*，设弧 *CD* 的中点是 *H*，线段 *CD* 的中点是 *G*，则根据图形的对称性，四点 M,N,G,H 共线，计算 *MH* 即可判断; 对于 *D*，设点 *E* 为该球与勒洛四面体的一个切点，先求出正四面体的外接球半径 *r*，则内切球半径为 $BE-r$.

【解答】

解：对于 *A*，平面 *ABC* 截勒洛四面体所得截面如图甲，它的面积为三个半径为 4，圆心角为 60° 的扇形的面积减去两个边长为 4 的正三角形的面积，

即 $3\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{3}\times 4^{2}-2\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 4^{2}=8\pi-8\sqrt{3}$，故 *A* 正确；

对于 *B*，如图乙，取 *CD* 中点 *G*，

在 $\triangle ABG$ 中，$AG=BG=2\sqrt{3}$，$AB=4$，

记该勒洛四面体上以 *C*，*D* 为球心的两球交线为弧 *AB*，

则该弧是以 *CD* 的中点 *G* 为圆心，以 $2\sqrt{3}$ 为半径的圆弧，

设圆心角为$\angle AGB=\alpha$，

则$\cos\alpha=\dfrac{\left(2\sqrt{3}\right)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2-4^2}{2\times2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$，

可知$\alpha\cdot2\sqrt{3}\neq\dfrac{4}{3}\pi$，所以弧长不等于$\dfrac{4\pi}{3}$，故 *B* 错误；

对于 *C*，如图丙，设弧 *AB* 的中点是 *M*，线段 *AB* 的中点是 *N*，

设弧 *CD* 的中点是 *H*，线段 *CD* 的中点是 *G*，

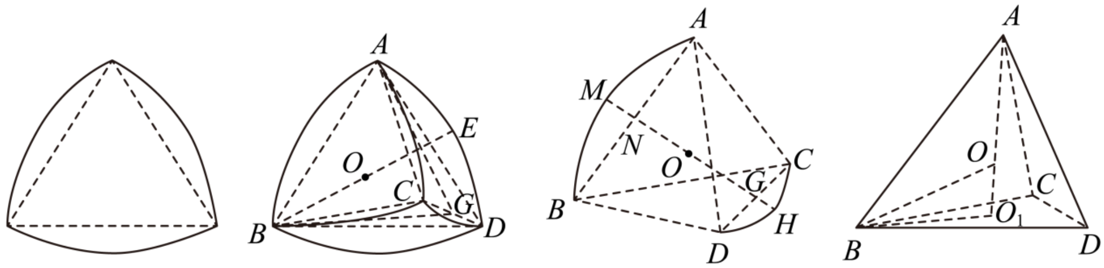
则根据图形的对称性，四点M,N,G,H共线且过正四面体 *ABCD* 的中心 *O*，

则$MG=GA=NH=2\sqrt{3}$，

$NG=\sqrt{AG^2-AN^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-2^2}=2\sqrt{2}$，

$MN=GH=2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$，$MH=4\sqrt{3}-2\sqrt{2}$，

即勒洛四面体表面上任意两点间距离可能大于 4，最大值为$4\sqrt{3}-2\sqrt{2}$，故 *C* 错误；



甲　　　乙　　　丙　　　丁

对于 *D*，勒洛四面体能容纳的最大球，与勒洛四面体的弧面相切，如图乙，其中点 *E* 为该球与勒洛四面体的一个切点，

由对称性可知 *O* 为该球的球心，内半径为 *OE*，连接 *BE*，易知 *B*，*O*，*E* 三点共线，

设正四面体 *ABCD* 的外接球半径为 *r*，

如图丁，设 *A* 在底面 *BCD* 的投影为O_1，则O_1为正$\triangle BCD$的中心，且 *A*，*O*，O_1三点共线，

$BO_1=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，$AO_1=\sqrt{AB^2-BO_1^2}=\sqrt{4^2-\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$，

则$\left(\dfrac{4\sqrt{6}}{3}-r\right)^2+\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2=r^2$，解得：$r=\sqrt{6}$，

所以$BE=4$，$OB=r=\sqrt{6}$，内半径$OE=4-\sqrt{6}$，故 *D* 正确.

故选：AD.

13.【答案】38

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/048034130040006040