南通市2023届高三第二次调研测试数学模拟试题

1. 已知 P，Q 为 R 的两个非空真子集，若 $\complement_R Q \subsetneqq \complement_R P$，则下列结论正确的是(　)

A. $\forall x \in Q$， $x \in P$　　　　B. $\exists x_0 \in \complement_R P$， $x_0 \in \complement_R Q$

C. $\exists x_0 \notin Q$， $x_0 \in P$　　　　D. $\forall x \in \complement_R P$， $x \in \complement_R Q$

【答案】

B

【解析】

【分析】

本题考查元素与集合关系、子集、全称量词与存在量词等概念，属于中档题．

【解答】

解：$\because P$， Q 为 R 的两个非空真子集，$\complement_R Q \subsetneqq \complement_R P$，故 $P \subsetneqq Q$，

对于选项 A：由题意知 P 是 Q 的真子集，故 $\exists\ x \in Q$， $x \notin P$，故不正确，

对于选项 B：由 $\complement_R Q$ 是 $\complement_R P$ 的真子集且 $\complement_R Q$， $\complement_R P$ 都不是空集知，$\exists\ x_0 \in \complement_R P$， $x_0 \in \complement_R Q$，故正确．

对于选项 C：由 $\complement_R Q$ 是 $\complement_R P$ 的真子集知，$\forall\ x \notin Q$， $x \notin P$，故不正确，

对于选项 D：Q 是 $\complement_R P$ 的真子集，故 $\exists\ x \in \complement_R P$， $x \notin \complement_R Q$，故不正确，

故选：B.

2. 已知 $a-b\in[0,1], a+b\in[2,4]$. 则 $4a-2b$ 的取值范围是(　)

A. $[1,5]$　　　B. $[2,7]$　　　C. $[1,6]$　　　D. $[0,9]$

【答案】

B

【解析】

【分析】

本题考查不等式求解不等式的范围，是基础题．

通过 $a-b\in[0,1]$， $a+b\in[2,4]$，推出 $4a-2b=(a+b)+3(a-b)$，然后求解即可．

【解答】

解：$\because a-b\in[0,1]$， $a+b\in[2,4]$，

$4a-2b=(a+b)+3(a-b)$，

$\therefore 4a-2b\in[2,7]$.

故选：B.

3. 三人各抛掷骰子一次，落地时向上的点数能组成等差数列的概率为(　)

A. $\dfrac{7}{36}$　　B. $\dfrac{1}{12}$　　C. $\dfrac{1}{15}$　　D. $\dfrac{1}{18}$

【答案】

A

【解析】

【分析】

本题考查古典概型及其计算，涉及排列组合、等差数列问题，属于中档题.

根据题意，分析可得将一个骰子连续抛掷三次，每次都有 6 种情况，由分步计数原理可得共有 6^3 种情况，进而分两种情况讨论骰子落地时向上的点数能组成等差数列的情况，可得符合条件的情况数目，由古典概型公式计算可得答案.

【解答】

解：根据题意，将一个骰子连续抛掷三次，

每次都有 6 种情况，则共有 $6^3=216$ 种情况，

它落地时向上的点数能组成等差数列，分两种情况讨论：

①若落地时向上的点数若不同，

则为 1，2，3 或 1，3，5，或 2，3，4 或 2，4，6 或 3，4，5 或 4，5，6;

共有 6 种可能，每种可能的点数顺序可以颠倒，

即有 $A_3^3=6$ 种情况;

即有 $6\times6=36$ 种情况，

②若落地时向上的点数全相同，有 6 种情况，

$\therefore$ 共有 $36+6=42$ 种情况，

落地时向上的点数能组成等差数列的概率为 $\dfrac{42}{216}=\dfrac{7}{36}$;

故选 A.

4. 已知复数 z 的实部和虚部均为整数，则满足 $|z-1|\leqslant\left|\dfrac{z}{\bar{z}}\right|$ 的复数 z 的个数为(　)

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2

【答案】

B

【解析】

【分析】

本题考查了复数的概念与分类，复数的模及几何意义，属于中档题.

【解答】

解：设 $z=a+bi(a,b\in Z)$，则 $\overline{z}=a-bi$，$|z-1|=\sqrt{(a-1)^2+b^2}$，$|\frac{z}{\overline{z}}|=\frac{|z|}{|\overline{z}|}=1$. 所以

$(a-1)^2+b^2\leqslant 1$.

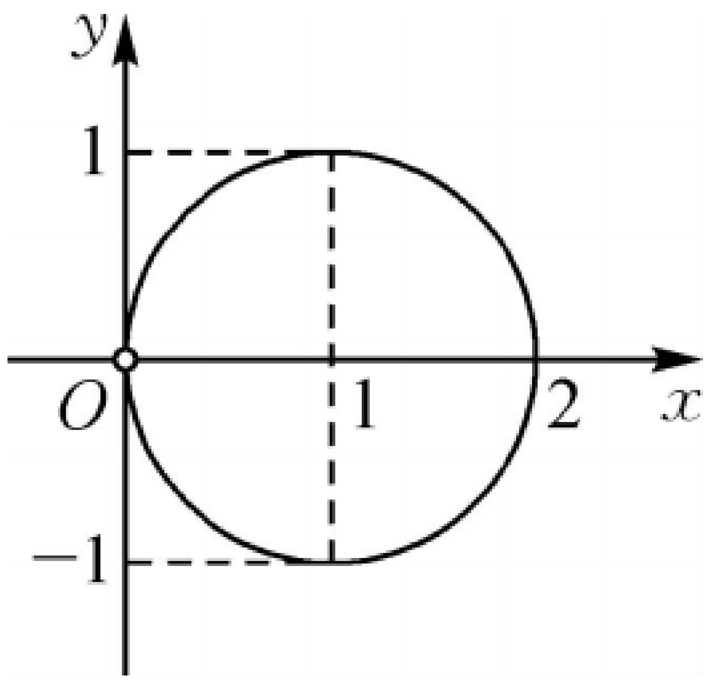
法一：因为 $(a-1)^2\geqslant 0$，所以 $b^2\leqslant 1$，即 $-1\leqslant b\leqslant 1$.

当 $b=\pm 1$ 时，$a-1=0$，即 $a=1$，有两组满足条件 $\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$，$\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$

当 $b=0$ 时，$a-1=0$ 或 $a-1=\pm 1$，所以 $\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$，$\begin{cases}a=2\\b=0\end{cases}$，$\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}$ 但 $a=0$，$b=0$ 时 $\overline{z}=0$，不符合题意

故选 C.

法二：如图，可转化为研究圆面 $(a-1)^2+b^2\leqslant 1$ 内（包括边界）的整点个数 .圆面包括的整点分别为 $(0,0)$，$(1,0)$，$(2,0)$，$(1,1)$，$(1,-1)$，而 $(0,0)$ 不适合 $\overline{z}\neq 0$，则符合题意的整点共有 4 个.故选 B.



5. 1471 年米勒向诺德尔教授提出的有趣问题：在地球表面的什么部位，一根垂直的悬杆看上去最长（即可见角最大）. 后人将其称为 米勒问题 ，是载入数学史上的第一个极值问题.我们把地球表面抽象为平面 α，悬杆抽象为线段 AB（或直线 l 上两点 A，B），则上述问题可以转化为如下的数学模型：如图 1，一条直线 l 垂直于一个平面 α，直线 l 有两点 A，B 位于平面 α 的同侧，求平面上一点 C，使得 $\angle ACB$ 最大.建立如图 2 所示的平面直角坐标系.设 A，B 两点的坐标分别为 $(0,a)$，$(0,b)(0<b<a)$. 设点 C 的坐标为 $(c,0)$，当 $\angle ACB$ 最大时，$c=$（　）

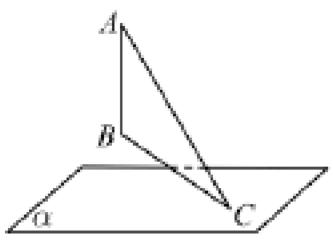


图1

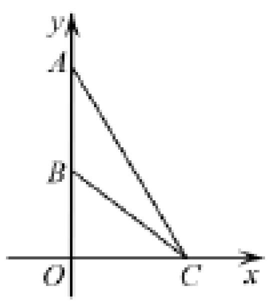


图2

A. $2ab$　　B. $\sqrt{ab}$　　C. $2\sqrt{ab}$　　D. ab

【答案】

B

【解析】

【分析】

本题考查了两角和与差的正切函数公式，利用基本不等式求最值，正切函数的单调性，属于中档题．

首先根据条件得到 $\tan\angle ACB=\tan(\angle OCA-\angle OCB)=\dfrac{\frac{a}{c}-\frac{b}{c}}{1+\frac{ab}{c^2}}=\dfrac{a-b}{c+\frac{ab}{c^2}}$，再根据基本不等式可求得

$\tan\ \angle ACB$ 的最大值，根据正切函数的单调性，即可判定答案 ．

【解答】

解:由题意可知 $\angle ACB$ 是锐角，且 $\angle ACB=\angle OCA-\angle OCB$，而 $\tan\ \angle OCA=\dfrac{a}{c}$，$\tan\ \angle OCB=\dfrac{b}{c}$，

所以 $\tan\ \angle ACB=\tan\ (\angle OCA-\angle OCB)=\dfrac{\frac{a}{c}-\frac{b}{c}}{1+\frac{ab}{c^2}}=\dfrac{a-b}{c+\frac{ab}{c}}$，

而 $c+\dfrac{ab}{c}\geqslant 2\sqrt{ab}$ ，当且仅当 $c=\dfrac{ab}{c}$ ，即 $c=\sqrt{ab}$ 时取等号，

所以当 $c=\sqrt{ab}$ 时， $\tan\angle ACB=\dfrac{a-b}{c+\frac{ab}{c^2}}\leqslant\dfrac{a-b}{2\sqrt{ab}}$ ，此时 $\angle ACB$ 最大，

故选： B.

6. 在三棱锥 $A-BCD$ 中， $AD\perp$ 平面 BCD，$\angle ABD+\angle CBD=\dfrac{\pi}{2},BD=BC=1$，则已知三棱锥

$A-BCD$ 外接球表面积的最小值为（ ）

A. $\dfrac{2\sqrt{5}+1}{4}\pi$　　B. $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\pi$　　C. $\dfrac{2\sqrt{5}-1}{4}\pi$　　D. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\pi$

【答案】

B

【解析】

【分析】

本题考查三棱锥的外接球，考查线面垂直的性质，基本不等式的应用等知识，属于难题．

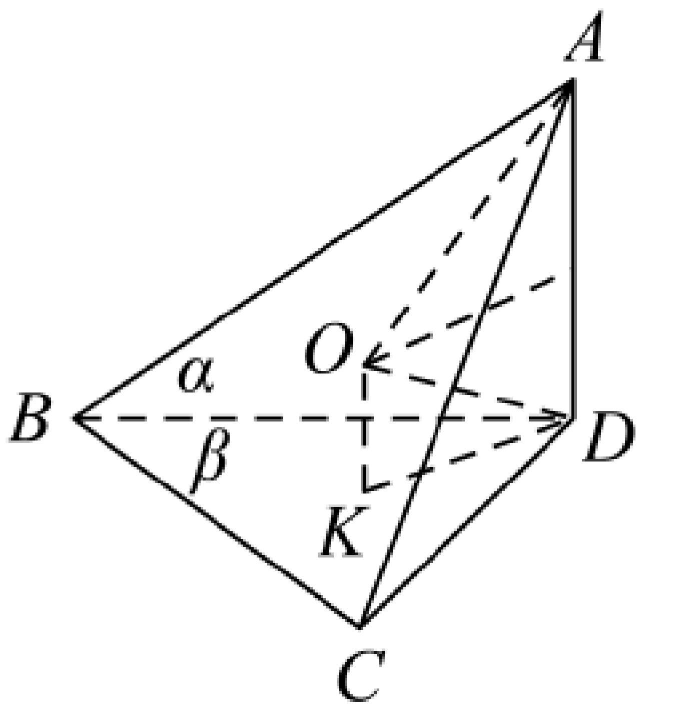
设 $\angle ABD=\alpha$ ， $\angle CBD=\beta$ ，求得 $\triangle BCD$ 的外接圆的半径为 $r=\dfrac{1}{2\cos\frac{\beta}{2}}$ ，结合图形求得三棱锥外接

球半径 $R^2=r^2+(\dfrac{AD}{2})^2=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{3-2\cos\beta}{4(1-\cos^2\beta)}$ ，然后换元利用基本不等式及不等式的性质得 R^2 的最小

值，从而可得面积的最小值.

【解答】

解：如图，



设$\angle ABD=\alpha$，$\angle CBD=\beta$，K为$\triangle BCD$的外心，O为三棱锥$A-BCD$外接球的球心，则$OK\perp$平面BCD，又$AD\perp$平面BCD，所以$OK//AD$，$KD\subset$平面BCD，则$OK\perp DK$，四边形$OKDA$是直角梯形，

设$OK=h$，$DK=r$，$OD=R$，

由$AD\perp$平面BCD，$BD\subset$平面BCD，得$AD\perp BD$，

则$AD=\tan\alpha=\dfrac{1}{\tan\beta}$，$CD=2\sin\dfrac{\beta}{2}$，$2r=\dfrac{2\sin\dfrac{\beta}{2}}{\sin\beta}$，即$r=\dfrac{1}{2\cos\dfrac{\beta}{2}}$，

又$\begin{cases}h^2+r^2=R^2\\(AD-h)^2+r^2=R^2\end{cases}$，则$h=\dfrac{1}{2}AD$，

$R^2=r^2+(\dfrac{AD}{2})^2=\dfrac{1}{4\cos^2\dfrac{\beta}{2}}+\dfrac{1}{4\tan^2\beta}=\dfrac{1}{2(1+\cos\beta)}+\dfrac{\cos^2\beta}{4(1-\cos^2\beta)}=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{3-2\cos\beta}{4(1-\cos^2\beta)}$，

令$t=3-2\cos\beta$，则$\cos\beta=\dfrac{3-t}{2}$，$t\in(1,3)$，

$R^2=-\dfrac{1}{4}-\dfrac{t}{t^2-6t+5}=-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{t+\dfrac{5}{t}-6}\geqslant-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2\sqrt{t\cdot\dfrac{5}{t}}-6}=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2(3-\sqrt{5})}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{8}$，当且仅当$t=\dfrac{5}{t}$，

即$t=\sqrt{5}$时等号成立，

所以三棱锥$A-BCD$外接球表面积$S=4\pi R^2\geqslant4\pi\times\dfrac{\sqrt{5}+1}{8}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\pi$，

故选B.

7. 已知双曲线$C_1: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$和椭圆$C_2: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的右焦点分别为$F, F'$，

$A(-a,0), B(a,0)$，P, Q分别为C_1, C_2上第一象限内不同于B的点，若

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\lambda\left(\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}\right)(\lambda \in R)$，$\overrightarrow{PF}=\sqrt{3}\overrightarrow{QF'}$，则四条直线$PA, PB, QA, QB$的斜率之和为（ ）

A. 1　　B. 0　　C. -1　　D. 不确定值

【答案】

B

【解析】

【分析】

本题考查椭圆方程、双曲线方程，直线与圆锥曲线的综合知识，考查逻辑推理、运算求解能力，考查数形结合、等价转化等数学思想，属于较难题.

依题意，先证明O、P、Q三点共线，是解题的关键，又$PF//QF'$，且$|PF|=\sqrt{3}|QF'|$，利用相似比可得$\lambda=\sqrt{3}$，进一步得到$a^2=2b^2$，再利用点在曲线上代入方程得出相应等式，利用O、P、Q三点共线得$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$，最后利用斜率公式代入得$k_1+k_2+k_3+k_4=0.$

【解答】

解：设O为原点，则$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PO}$，$\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}=2\overrightarrow{QO}.$

而$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\lambda\left(\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}\right)$，得$\overrightarrow{PO}=\lambda\overrightarrow{QO}$，

于是O、P、Q三点共线，因为$\overrightarrow{PF}=\sqrt{3}\overrightarrow{QF'}$，

所以$PF//QF'$，且$|PF|=\sqrt{3}|QF'|$，

得$\lambda=\frac{|OP|}{|OQ|}=\frac{|PF|}{|QF'|}=\frac{|OF|}{|OF'|}=\sqrt{3}$，$\therefore \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=3, \therefore a^2=2b^2$

设$P(x_1, y_1)$、$Q(x_2, y_2)$，点P在双曲线$\frac{x^2}{2b^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的上，有$\frac{x_1^2}{2b^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$，

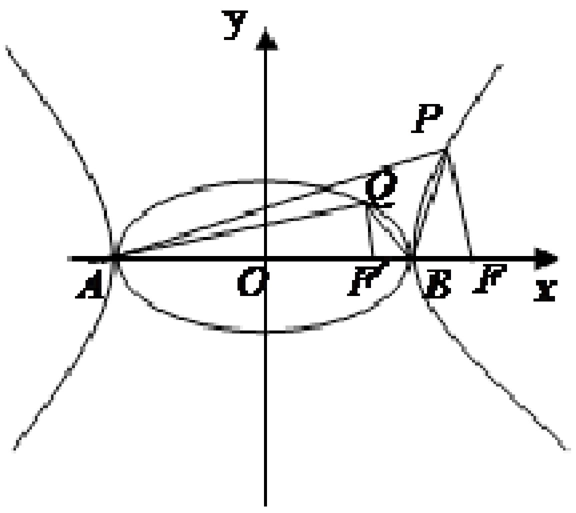
则$x_1^2-2b^2=2y_1^2.$

设直线PA, PB, QA, QB的斜率分别是k_1, k_2，k_3, k_4，

所以$k_1+k_2=\frac{y_1}{x_1+a}+\frac{y_1}{x_1-a}=\frac{2x_1y_1}{x_1^2-2b^2}=\frac{x_1}{y_1}$　①

又由点 Q 在椭圆 $\frac{x^2}{2b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上，有 $x_2^2-2b^2=-2y_2^2$. 同理可得 $k_3+k_4=-\frac{x_2}{y_2}$ ②

$\because O$、P、Q 三点共线，$\therefore \frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$. 由①、②得 $k_1+k_2+k_3+k_4=0$.



8. 【答案】

C

【解析】略

9. 下列命题中正确是( )

A. 中位数就是第 50 百分位数

B. 已知随机变量 $X \backsim B(n,\frac{1}{2})$，若 $D(2X+1)=5$，则 $n=10$

C. 已知随机变量 $\xi \backsim N(\mu,\sigma^2)$，且函数 $f(x)=P(x<\xi<x+2)$ 为偶函数，则 $\mu=1$

D. 已知采用分层抽样得到的高三年级男生、女生各 100 名学生的身高情况为：男生样本平均数 172，方差为 120，女生样本平均数 165，方差为 120，则总体样本方差为 132.25.

【答案】

ACD

【解析】

【分析】

本题考查百分位数、二项分布反差，正态分布，样本方差，属于中档题.

【解答】

中位数就是第 50 百分位数，选项 A 正确;

对选项 B，$X \backsim B(n,\frac{1}{2})$，则 $D(2X+1)=4D(X)=4\times n\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=n=5$，故 B 错误;

对选项 C，$\xi \backsim N(\mu,\sigma^2)$，函数 $f(x)=P(x<\xi<x+2)$ 为偶函数，则

$f(-x)=P(-x<\xi<-x+2)=f(x)=P(x<\xi<x+2)$，区间 $(-x,2-x)$ 与 $(x,2+x)$ 关于

$x=\mu$ 对称，故 $\mu=\frac{-x+x+2}{2}=\frac{x+2-x}{2}=1$，选项 C 正确;

对选项 D，分层抽样的平均数 $\overline{z}=\dfrac{100}{100+100}\times172+\dfrac{100}{100+100}\times165=\dfrac{337}{2}$，按分成抽样样

本方差的计算公式 $S^2=\dfrac{1}{2}[120+(172-\dfrac{337}{2})^2]+[120+(165-\dfrac{337}{2})^2]=132.25.$

答案选： ACD

10. 重庆荣昌折扇是中国四大名扇之一，始于 1551 年明代嘉靖年间，明末已成为贡品人朝，产品以其精湛的工业制作而闻名于海内外．经历代艺人刻苦钻研、精工创制，荣昌折扇逐步发展成为具有独特风格的中国传统工艺品，其精雅宜士人，其华灿宜艳女，深受各阶层人民喜爱．古人曾有诗赞曰： 开合清风纸半张，随机舒卷岂寻常；金环并束龙腰细，玉栅齐编凤翅长，偏称游人携袖里，不劳侍女执花傍；宫罗旧赐休相妒，还汝团圆共夜凉 图 1 为荣昌折扇，其平面图为图 2 的扇形 COD，其中 $\angle COD=\dfrac{2\pi}{3}$， $OC=3OA=3$，动点 P 在 CD 上(含端点)，连结 OP 交扇形 OAB 的弧 AB 于点 Q，且 $\overrightarrow{OQ}=x\overrightarrow{OC}+y\overrightarrow{OD}$，则下列说法正确的是(　)

图 1

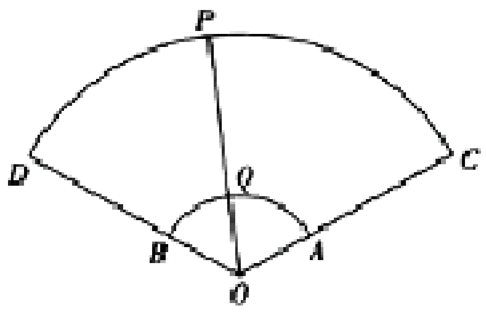


图 2

A. 若 $y=x$，则 $x+y=\dfrac{2}{3}$　　　　B. 若 $y=2x$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=0$

C. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PQ}\ldots-2$　　　　D. $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\ldots\dfrac{11}{2}$

【答案】

ABD

【解析】

【分析】

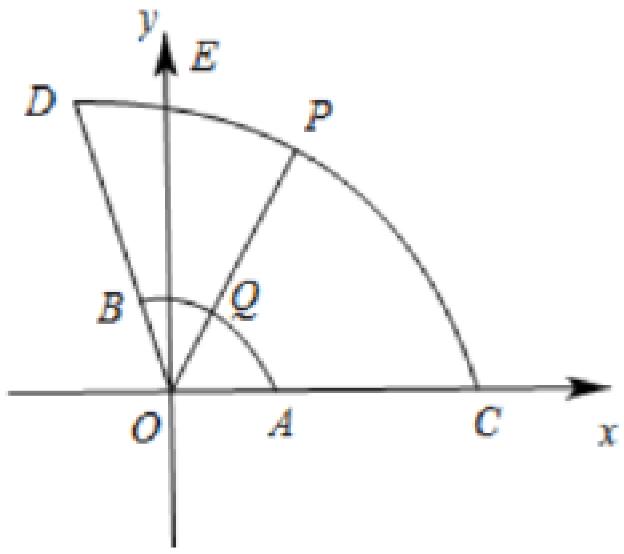
本题考查了三角函数与向量的综合．

建立平面直角坐标系，表示出相关点的坐标，设 $Q(\cos\theta,\sin\theta),\theta\in[0,\dfrac{2\pi}{3}]$，可得 $P(3\cos\theta,3\sin\theta)$，

由 $\overrightarrow{OQ}=x\overrightarrow{OC}+y\overrightarrow{OD}$，结合题中条件可判断 A，B；表示出相关向量的坐标，利用数量积的运算律，结合三角函数的性质，可判断 C，D.

【解答】

解：如图，作 $OE \perp OC$，分别以 OC，OE 为 x，y 轴建立平面直角坐标系，



则 $A(1,0), C(3,0), B(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}), D(-\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2})$，

设 $Q(\cos\theta,\sin\theta),\theta\in[0,\frac{2\pi}{3}]$，则 $P(3\cos\theta,3\sin\theta)$，

由 $\overrightarrow{OQ}=x\overrightarrow{OC}+y\overrightarrow{OD}$ 可得 $\cos\theta=3x-\frac{3}{2}y,\sin\theta=\frac{3\sqrt{3}}{2}y$，且 $x>0$， $y>0$，

若 $y=x$，则 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=(3x-\frac{3}{2}x)^2+(\frac{3\sqrt{3}}{2}x)^2=1$，

解得 $x=y=\frac{1}{3}$，（负值舍去），故 $x+y=\frac{2}{3}$，A 正确；

若 $y=2x$，则 $\cos\theta=3x-\frac{3}{2}y=0,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=(1,0)\cdot(0,1)=0$，故 B 正确；

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PQ}=(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})\cdot(2\cos\theta,2\sin\theta)=\sqrt{3}\sin\theta-3\cos\theta=2\sqrt{3}\sin(\theta-\frac{\pi}{3})'$

由于 $\theta\in[0,\frac{2\pi}{3}]$，故 $\theta-\frac{\pi}{3}\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$，故 $2\sqrt{3}\sin(\theta-\frac{\pi}{3})\ldots-3$，故 C 错误；

由于 $\overrightarrow{PA}=(3\cos\theta-1,3\sin\theta),\overrightarrow{PB}=(3\cos\theta+\frac{1}{2},3\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2})$，

故 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(3\cos\theta-1,3\sin\theta)\cdot(3\cos\theta+\frac{1}{2},3\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{17}{2}-3\sin(\theta+\frac{\pi}{6})$，

而 $\theta+\frac{\pi}{6}\in[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$，

故 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\frac{17}{2}-3\sin(\theta+\frac{\pi}{6})\ldots\frac{17}{2}-3=\frac{11}{2}$，故 D 正确，

故选 ABD.

11. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2,AA_1=3,AD=4$，则下列命题为真命题的是（ ）

A. 若直线 AC_1 与直线 CD 所成的角为 φ，则 $\tan\varphi=\frac{5}{2}$

B. 若经过点 A 的直线 l 与长方体所有棱所成的角相等，且 l 与面 BCC_1B_1 交于点 M，则 $AM=2\sqrt{3}$

C. 若经过点 A 的直线 m 与长方体所有面所成的角都为 θ，则 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. 若经过点 A 的平面 β 与长方体所有面所成的二面角都为 μ，则 $\sin\mu=\frac{\sqrt{6}}{2}$

【答案】

ABC

【解析】

【分析】

本题考查异面直线所成角及线面夹角以及二面角求解，属于较难题.

A 根据长方体的性质找到直线 AC_1 与直线 CD 所成角的平面角即可;

B 构建空间直角坐标系，根据线线角相等，结合空间向量夹角的坐标表示

求 $\cos<\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{AM}>=\cos<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}>=\cos<\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AM}>$，即可求 M 坐标，进而确定线段长;

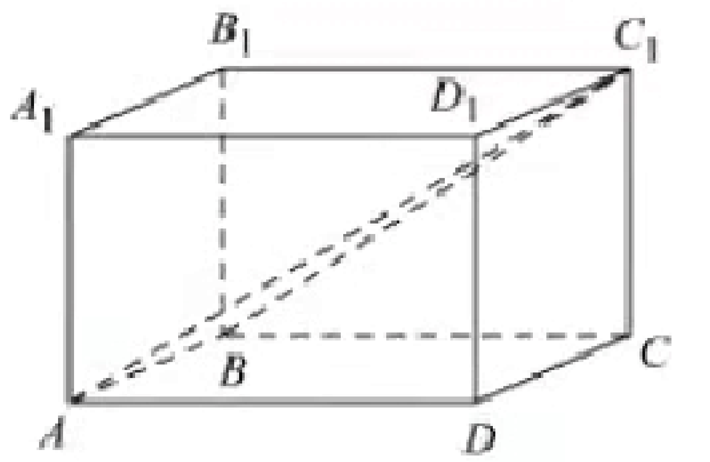
C、D 将长方体补为以 4 为棱长的正方体，根据描述找到对应的直线 m，平面 β，结合正方体性质求线面角、面面角的正弦值.

【解答】

解：A：如下图，直线 AC_1 与直线 CD 所成角，

即为直线 AC_1 与直线 AB 所成角 $\angle BAC_1$，

则 $\tan\varphi=\tan\angle BAC_1=\frac{BC_1}{AB}=\frac{5}{2}$，正确;



B：构建如下图示的坐标系，

过 A 的直线 l 与长方体所有棱所成的角相等，

与面 BCC_1B_1 交于 $M(x,2,z)$ 且 x，$z>0$，

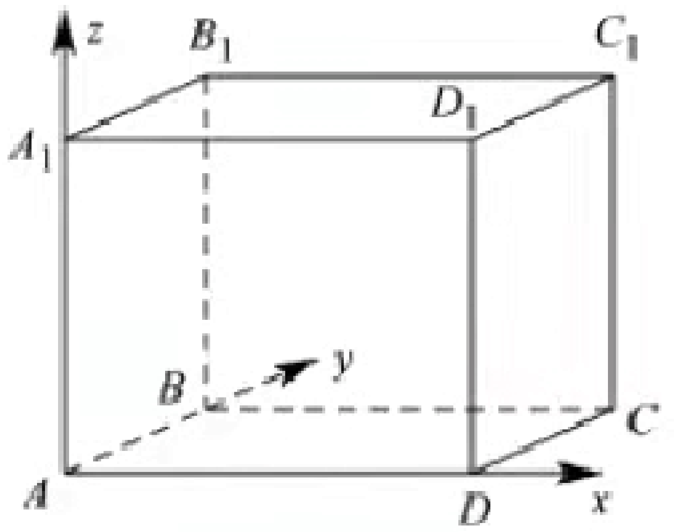
又 $\overrightarrow{AA_1}=(0,0,3)$，$\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{AD}=(4,0,0)$，

则 $\cos<\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AM}>=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+4+z^2}}$

$=\cos<\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}>=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+4+z^2}}$

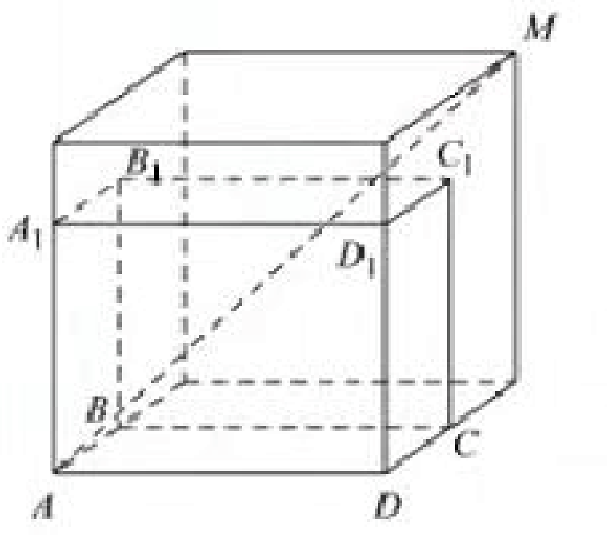
$=\cos<\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AM}>=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4+z^2}}$，

故 $x=z=2$，则 $AM=2\sqrt{3}$，正确.



C：如下图，过 A 的直线 m 与长方体所有面所成的角都为 θ，
则直线 m 为以 4 为棱长的正方体的体对角线 AM，

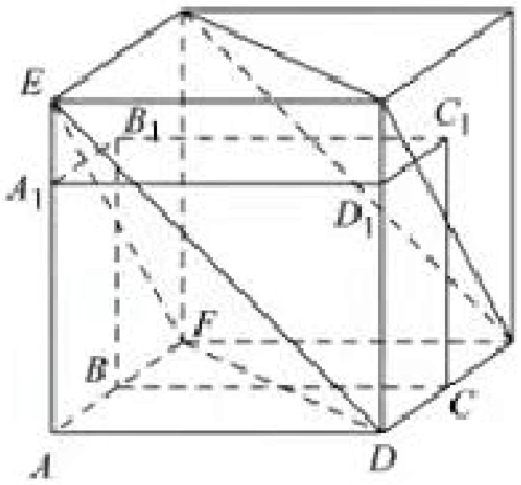
故 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，正确;



D：如下图，过 A 的平面 β 与长方体所有面所成的二面角都为 μ，

只需面 β 与以 4 为棱长的正方体中相邻的三条棱顶点所在平面平行，

如平面 EDF，故 $\cos\mu=\dfrac{S_{\triangle EDF}}{3S_{\triangle ADE}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\sin\mu=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，错误.



故选 ABC.

12. 过平面内一点 P 作曲线 $y=|\ln x|$ 两条互相垂直的切线 l_1、l_2，切点为 P_1、P_2（P_1、P_2 不重合），设直线 l_1、l_2 分别与 y 轴交于点 A、B，则下列结论正确的是(　)

A. P_1、P_2 两点的纵坐标之积为定值　　B. 直线 P_1P_2 的斜率为定值

C. 线段 AB 的长度为定值　　D. 三角形 ABP 面积的取值范围为 $(0,1)$

【答案】

BCD

【解析】

【分析】

本题考查了导数的几何意义，利用导数判断函数的单调性以及最值，直线的斜率公式，属于较难题.

A.由条件可知两条直线的斜率存在时，斜率之积为 -1，讨论 P_1,P_2 的位置，即可判断；

B.由两点 P_1,P_2 的坐标，表示直线 P_1P_2 的斜率，即可判断；

C.分别求切线方程，并表示点 A,B 的坐标，即可求线段 AB 的长度；

D.根据切线方程，求交点 P 的横坐标，因为 $|AB|$ 为定值，即转化为求点 P 的横坐标的取值范围，即可得解.

【解答】

解：因为 $y=|\ln x|=\begin{cases}-\ln x,0<x<1\\ \ln x,x\geqslant 1\end{cases}$，

所以，当 $0<x<1$ 时，$y'=-\dfrac{1}{x}$；当 $x..1$ 时，$y'=\dfrac{1}{x}$，

不妨设点 P_1，P_2 的横坐标分别为 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，

若 $0<x_1<x_2,,1$ 时，直线 l_1，l_2 的斜率分别为 $k_1=-\dfrac{1}{x_1}$，$k_2=-\dfrac{1}{x_2}$，此时 $k_1k_2=\dfrac{1}{x_1x_2}>0$，不合题意；

若 $x_2>x_1..1$ 时，则直线 l_1，l_2 的斜率分别为 $k_1=\dfrac{1}{x_1}$，$k_2=\dfrac{1}{x_2}$，此时 $k_1k_2=\dfrac{1}{x_1x_2}>0$，不合题意.

所以$0<x_1\leqslant 1<x_2$或$0<x_1<1\leqslant x_2$，则$k_1=-\frac{1}{x_1}$，$k_2=\frac{1}{x_2}$，

由题意可得$k_1k_2=-\frac{1}{x_1x_2}=-1$，可得$x_1x_2=1$，

若$x_1=1$，则$x_2=1$；若$x_2=1$，则$x_1=1$，不合题意，所以$0<x_1<1<x_2$，选项A对；

对于选项B，易知点$P_1(x_1,-\ln x_1)$，$P_2(x_2,\ln x_2)$，

所以，直线P_1P_2的斜率为$k_{P_1P_2}=\frac{\ln x_2+\ln x_1}{x_2-x_1}=\frac{\ln(x_1x_2)}{x_2-x_1}=0$，选项$B$对；

对于选项C，直线l_1的方程为$y+\ln x_1=-\frac{1}{x_1}(x-x_1)$，令$x=0$可得$y=1-\ln x_1$，即点$A(0,1-\ln x_1)$，

直线l_2的方程为$y-\ln x_2=\frac{1}{x_2}(x-x_2)$，令$x=0$可得$y=\ln x_2-1=-\ln x_1-1$，即点$B(0,-\ln x_1-1)$，

所以，$|AB|=|(1-\ln x_1)-(-1-\ln x_1)|=2$，选项$C$对；

对于选项D，联立$\begin{cases} y=-\frac{1}{x_1}x+1-\ln x_1 \\ y=\frac{1}{x_2}x+\ln x_2-1 \end{cases}$可得$x_P=\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}=\frac{2x_1}{x_1^2+1}$，

令$f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$，其中$x\in(0,1)$，则$f'(x)=\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}>0$，

所以，函数$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，则当$x\in(0,1)$时，$f(x)\in(0,1)$，

所以，$S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|x_P|=\frac{2x_1}{x_1^2+1}\in(0,1)$，选项$D$对.

故选BCD.

13. 若函数$f(x)=\sin(x+\varphi)+\cos x$，$(0<\varphi<\pi)$的最大值为2，则常数$\varphi$的一个取值为_________.

【答案】

$\frac{\pi}{2}$

【解析】

【分析】

本题考查三角恒等变换，辅助角公式，三角函数最值，以及考查运算能力，属于中档题.

由两角和差公式，及辅助角公式化简得$f(x)=\sqrt{\cos^2\varphi+(1+\sin\varphi)^2}\sin(x+\theta)$，其中