江苏省淮安市重点中学 2024 年高三单科质检数学试题

注意事项

1．考生要认真填写考场号和座位序号。

2．试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。

3．考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．下列函数中，图象关于y轴对称的为（　　）

A．$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$　　B．$f(x)=\sqrt{7+2x}+\sqrt{7-2x}$，$x\in[-1,2]$

C．$f(x)=\sin 8x$　　D．$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{x^2}$

2．已知 ***P*** 是双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$渐近线上一点，$F_1$，$F_2$是双曲线的左、右焦点，$\angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{2}$，记$PF_1$，***PO***，$PF_2$的斜率为$k_1$，***k***，$k_2$，若$k_1$，**-2*k***，$k_2$成等差数列，则此双曲线的离心率为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{6}$

3．已知复数 z 满足 $i\cdot z=2+i$，则 z 的共轭复数是（）

A．$-1-2i$　　B．$-1+2i$　　C．$1-2i$　　D．$1+2i$

4．《聊斋志异》中有这样一首诗：“挑水砍柴不堪苦，请归但求穿墙术.得诀自诩无所阻，额上坟起终不悟.”在这里，我们称形如以下形式的等式具有“穿墙术”：$2\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\sqrt{2\dfrac{2}{3}}$，$3\sqrt{\dfrac{3}{8}}=\sqrt{3\dfrac{3}{8}}$，$4\sqrt{\dfrac{4}{15}}=\sqrt{4\dfrac{4}{15}}$，$5\sqrt{\dfrac{5}{24}}=\sqrt{5\dfrac{5}{24}}$，则按照以上规律，若$10\sqrt{\dfrac{10}{n}}=\sqrt{10\dfrac{10}{n}}$具有“穿墙术”，则$n=$（　）

A．48　　B．63　　C．99　　D．120

5．设全集$U=\mathbf{R}$，集合$A=\{x\mid \log_2(4-x)\le 1\}$，$B=\{x\mid (x-3)(x-5)>0\}$，则$\left(\complement_U B\right)\cap A=$（　　）

A．$[2,5]$　　B．$[2,3]$　　C．$[2,4)$　　D．$[3,4)$

6．一个正三角形的三个顶点都在双曲线$x^2+ay^2=1$的右支上，且其中一个顶点在双曲线的右顶点，则实数a的取值范围是（　　）

A．$(3,+\infty)$　　B．$(\sqrt{3},+\infty)$　　C．$(-\infty,-\sqrt{3})$　　D．$(-\infty,-3)$

7．若集合 $A=\{x\mid \sin 2x=1\}$，$B=\left\{y\middle|y=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},k\in Z\right\}$，则（　　）

A．$A\cup B=A$　　B．$C_RB\subseteq C_RA$　　C．$A\cap B=\varnothing$　　D．$C_RA\subseteq C_RB$

8．若复数 z 满足 $(1+i)z=|3+4i|$，则 z 的虚部为（　　）

A．5　　B．$\frac{5}{2}$　　C．$-\frac{5}{2}$　　D．-5

9．设集合 $M=\{x|x^2+3x+2>0\}$，集合 $N=\{x\mid(\frac{1}{2})^x\le 4\}$，则 $M\cup N=$（　　）

A．$\{x|x\ge -2\}$　　B．$\{x|x>-1\}$　　C．$\{x|x\le -2\}$　　D．R

10．函数 $f(x)=ax-2$ 与 $g(x)=e^x$ 的图象上存在关于直线 $y=x$ 对称的点，则 a 的取值范围是（　　）

A．$\left(-\infty,\frac{e}{4}\right]$　　B．$\left(-\infty,\frac{e}{2}\right]$　　C．$(-\infty,e]$　　D．$(-\infty,e^2]$

11．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 M 为棱 DD_1 的中点，则平面 ACM 截该正方体的内切球所得截面面积为（　）

A．$\frac{\pi}{3}$　　B．$\frac{2\pi}{3}$　　C．π　　D．$\frac{4\pi}{3}$

12．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{(x-1)\pi}{2},1\le x\le 3\\ 2f(x-2),3<x\le 100\end{cases}$，若函数 $f(x)$ 的极大值点从小到大依次记为 $a_1,a_2\cdots a_n$，并记相应的极大值为 $b_1,b_2,\cdots b_n$，则 $\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)$ 的值为（　　）

A．$2^{50}+2449$　　B．$2^{50}+2549$　　C．$2^{49}+2449$　　D．$2^{49}+2549$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知 $f(x)=\ln x,g(x)=\frac{4e^2}{(x-a)^2}$，如果函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 有三个零点，则实数 a 的取值范围是____________

14．函数 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}x-\sin x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值和最大值分别是____________.

15．已知两个单位向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|$，则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为____________.

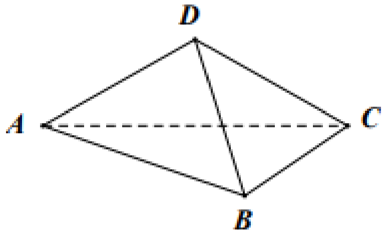
16．已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点为 $F(-\sqrt{3},0)$，A、B 为双曲线上关于原点对称的两点，AF

的中点为H，BF的中点为K，HK的中点为G，若$|HK|=2|OG|$，且直线AB的斜率为$\frac{\sqrt{2}}{4}$，则

$|AB|=$__________，双曲线的离心率为__________.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（12分）如图，在四面体$DABC$中，$AB\perp BC$，$DA=DC=DB$.



（1）求证:平面$ABC\perp$平面ACD；

（2）若$AD=2$，$AB=2BC$，$\angle CAD=30^\circ$，求四面体$ABCD$的体积.

18.（12分）已知函数$f\left(x\right)=\left|2x-a\right|+\left|x-1\right|\left(a\in R\right)$.

（Ⅰ）当$a=1$时，求不等式$f\left(x\right)\geq 1$的解集；

（Ⅱ）若存在$x\in \mathbf{R}$满足不等式$f\left(x\right)<4$，求实数a的取值范围.

19.（12分）在直角坐标系xOy中，已知点$M\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$C_1$的参数方程为$\begin{cases}x=\frac{1}{2}+t\\ y=\sqrt{3}t\end{cases}$（$t$为参数），以坐标原点$O$为极点，$x$轴的正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线$C_2$的极坐标方程为$\frac{3}{\rho^2}=2+\cos^2\theta$.

（1）求C_1的普通方程和C_2的直角坐标方程；

（2）设曲线C_1与曲线C_2相交于A，B两点，求$\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}$的值.

20.（12分）**[2018·石家庄一检]**已知函数$f\left(x\right)=x\left(\ln x-ax\right)\left(a\in R\right)$.

（1）若$a=1$，求函数$f\left(x\right)$的图像在点$\left(1,f\left(1\right)\right)$处的切线方程；

（2）若函数$f\left(x\right)$有两个极值点x_1，x_2，且$x_1<x_2$，求证：$f\left(x_2\right)>-\frac{1}{2}$.

21.（12分）已知函数$f(x)=x^2+\ln x$.

（1）若函数$g(x)=f(x)+\left(a-1\right)\ln x$的图象与$x$轴有且只有一个公共点，求实数$a$的取值范围；

（2）若 $f(x)-\left(2m-1\right)x<\left(1-m\right)x^{2}$ 对任意 $x\in\left(1,+\infty\right)$ 成立，求实数 m 的取值范围.

22．（10 分）在$\triangle ABC$中，角 **A**、**B**、**C** 的对边分别为 **a**、**b**、**c**，且$\dfrac{\sin C-\sqrt{3}\sin B}{\sin A+\sin B}=\dfrac{a-b}{c}$.

（1）求角 A 的大小；

（2）若$2\sin A\sin B=1+\cos C$，$\angle BAC$的平分线与BC交于点 **D**，与$\triangle ABC$的外接圆交于点 **E**（异于点 **A**），$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AD}$，求$\lambda$的值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

图象关于y轴对称的函数为偶函数,用偶函数的定义及性质对选项进行判断可解.

【详解】

图象关于y轴对称的函数为偶函数；

A 中，$x\in\mathbf{R}$，$f(-x)=\dfrac{-x}{\sqrt{(-x)^2+1}}=-f(x)$，故$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$为奇函数；

B 中，$f(x)=\sqrt{7+2x}+\sqrt{7-2x}$的定义域为$\left[-1,2\right]$，

不关于原点对称，故为非奇非偶函数；

C 中，由正弦函数性质可知，$f(x)=\sin 8x$为奇函数；

D 中，$x\in\mathbf{R}$且$x\neq 0$，$f(-x)=\dfrac{e^{-x}+e^{x}}{(-x)^2}=f(x)$，故$f(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{x^2}$为偶函数.

故选：D.

【点睛】

本题考查判断函数奇偶性. 判断函数奇偶性的两种方法:

(1)定义法：对于函数$f(x)$的定义域内任意一个x都有$f(x)=-f(-x)$，则函数$f(x)$是奇函数；都有$f(x)=f(-x)$，则函数$f(x)$是偶函数

(2)图象法：函数是奇(偶)函数$\Leftrightarrow$函数图象关于原点(y轴)对称.

2、B

【解析】

求得双曲线的一条渐近线方程，设出 P 的坐标，由题意求得 $P(a,b)$，运用直线的斜率公式可得 k_1，k，k_2，再由等差数列中项性质和离心率公式，计算可得所求值.

【详解】

设双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一条渐近线方程为 $y=\frac{b}{a}x$，

且 $P(m,\frac{b}{a}m)$，由 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{2}$，可得以 O 为圆心，c 为半径的圆与渐近线交于 P，

可得 $m^2+(\frac{b}{a}m)^2=c^2$，可取 $m=a$，则 $P(a,b)$，

设 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，则 $k_1=\frac{b}{a+c}$，$k_2=\frac{b}{a-c}$，$k=\frac{b}{a}$，

由 k_1，$-2k$，k_2 成等差数列，可得 $-4k=k_1+k_2$，

化为 $-\frac{4}{a}=\frac{2a}{a^2-c^2}$，即 $c^2=\frac{3}{2}a^2$，

可得 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

故选：B.

【点睛】

本题考查双曲线的方程和性质，主要是渐近线方程和离心率，考查方程思想和运算能力，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

3、D

【解析】

两边同乘-i，化简即可得出答案.

【详解】

i•z＝2+i 两边同乘-i 得 z=1-2i,共轭复数为 1+2i，选 D.

【点睛】

$z=a+bi(a,b\in R)$ 的共轭复数为 $\overline{z}=a-bi$

4、C

【解析】

观察规律得根号内分母为分子的平方减 1，从而求出 n.

【详解】

解：观察各式发现规律，根号内分母为分子的平方减 1

所以 $n=10^2-1=99$

故选：C.

【点睛】

本题考查了归纳推理，发现总结各式规律是关键，属于基础题.

5、D

【解析】

求解不等式，得到集合 A，B，利用交集、补集运算即得解

【详解】

由于 $\log_2(4-x)\le 1 \therefore 2\le x<4$

故集合 $A=\left[2,4\right)$

$\left(x-3\right)\left(x-5\right)>0 \therefore x<3$ 或 $x>5$

故集合 $B=\left(-\infty,3\right)\cup\left(5,+\infty\right)$

$\therefore$ $\left(\complement_U B\right)\cap A=\left[3,4\right)$

故选：D

【点睛】

本题考查了集合的交集和补集混合运算，考查了学生概念理解，数学运算的能力，属于中档题.

6、D

【解析】

因为双曲线分左右支，所以 $a<0$，根据双曲线和正三角形的对称性可知：第一象限的顶点坐标为 $(1+t$，$\frac{\sqrt{3}}{3}t)(t>0)$，将其代入双曲线可解得.

【详解】

因为双曲线分左右支，所以 $a<0$，

根据双曲线和正三角形的对称性可知：第一象限的顶点坐标为 $(1+t$，$\frac{\sqrt{3}}{3}t)(t>0)$，将其代入双曲线方程得：

$(1+t)^2+a(\frac{\sqrt{3}}{3}t)^2=1$，

即 $t=\dfrac{-2}{\frac{1}{3}a+1}$，由 $t>0$ 得 $a<-3$.

故选：D.

【点睛】

本题考查了双曲线的性质，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

7、**B**

【解析】

根据正弦函数的性质可得集合A，由集合性质表示形式即可求得$A\subseteq B$，进而可知满足$C_RB\subseteq C_RA$.

【详解】

依题意，$A=\{x\mid \sin 2x=1\}=\left\{x\mid x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,k\in Z\right\}$；

而$B=\left\{y\mid y=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2},k\in Z\right\}$

$=\left\{x\mid x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2n\pi}{2},n\in Z\text{或}x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{(2n+1)\pi}{2},n\in Z\right\}$

$=\left\{x\mid x=\dfrac{\pi}{4}+n\pi,n\in Z\text{或}x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{(2n+1)\pi}{2},n\in Z\right\}$，

故$A\subseteq B$，

则$C_RB\subseteq C_RA$.

故选：**B.**

【点睛】

本题考查了集合关系的判断与应用，集合的包含关系与补集关系的应用，属于中档题.

8、**C**

【解析】

把已知等式变形，再由复数代数形式的乘除运算化简得答案.

【详解】

由（**1+*i***）***z***=**|3+4*i*|**$=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

得$z=\dfrac{5}{1+i}=\dfrac{5(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{5}{2}-\dfrac{5}{2}i$，

$\therefore z$的虚部为$-\dfrac{5}{2}$.

故选***C***.

【点睛】

本题考查复数代数形式的乘除运算，考查复数的基本概念，是基础题.

9、**D**

【解析】

试题分析：由题 $M=\left\{x\left|x^2+3x+2\right\rangle 0\right\}=\left\{x\mid x\left\langle -2或x\right\rangle -1\right\}$，

$N=\left\{x\mid (\frac{1}{2})^x\le 4\right\}=\left\{x\mid (\frac{1}{2})^x\le \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right\}=N=\left\{x\mid x\ge -2\right\}$，$\therefore M\cup N=R$，选 **D**

考点：集合的运算

10、**C**

【解析】

由题可知，曲线 $f\left(x\right)=ax-2$ 与 $y=\ln x$ 有公共点，即方程 $ax-2=\ln x$ 有解，可得 $a=\dfrac{2+\ln x}{x}$ 有解，令

$h\left(x\right)=\dfrac{2+\ln x}{x}$，则 $h'\left(x\right)=\dfrac{-1-\ln x}{x^2}$，对 x 分类讨论，得出 $x=\dfrac{1}{e}$ 时，$h\left(x\right)$ 取得极大值 $h\left(\dfrac{1}{e}\right)=e$，也即为最大值，

进而得出结论.

【详解】

解：由题可知，曲线 $f\left(x\right)=ax-2$ 与 $y=\ln x$ 有公共点，即方程 $ax-2=\ln x$ 有解，

即 $a=\dfrac{2+\ln x}{x}$ 有解，令 $h\left(x\right)=\dfrac{2+\ln x}{x}$，则 $h'\left(x\right)=\dfrac{-1-\ln x}{x^2}$，

则当 $0<x<\dfrac{1}{e}$ 时，$h'\left(x\right)>0$；当 $x>\dfrac{1}{e}$ 时，$h'\left(x\right)<0$，

故 $x=\dfrac{1}{e}$ 时，$h\left(x\right)$ 取得极大值 $h\left(\dfrac{1}{e}\right)=e$，也即为最大值，

当 x 趋近于 0 时，$h\left(x\right)$ 趋近于 $-\infty$，所以 $a\le e$ 满足条件.

故选：**C.**

【点睛】

本题主要考查利用导数研究函数性质的基本方法，考查化归与转化等数学思想，考查抽象概括、运算求解等数学能力，属于难题.

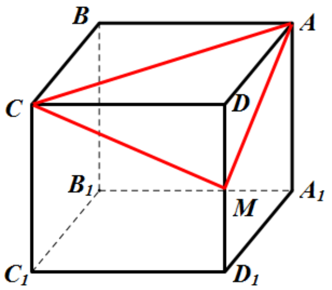
11、**A**

【解析】

根据球的特点可知截面是一个圆，根据等体积法计算出球心到平面 ACM 的距离，由此求解出截面圆的半径，从而截面面积可求.

【详解】

如图所示：



设内切球球心为O，O到平面ACM的距离为d，截面圆的半径为r，

因为内切球的半径等于正方体棱长的一半，所以球的半径为1，

又因为$V_{O-AMC}=V_{M-AOC}$，所以$\frac{1}{3}\times d\times S_{\triangle AMC}=\frac{\sqrt{2}}{3}\times S_{\triangle AOC}$，

又因为$S_{\triangle AMC}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{6},S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 1=\sqrt{2}$，

所以$\frac{1}{3}\times d\times\sqrt{6}=\frac{2}{3}$，所以$d=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以截面圆的半径$r=\sqrt{1^2-d^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以截面圆的面积为$S=\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{\pi}{3}$.

故选：**A.**

【点睛】

本题考查正方体的内切球的特点以及球的截面面积的计算，难度一般.任何一个平面去截球，得到的截面一定是圆面，截面圆的半径可通过球的半径以及球心到截面的距离去计算.

12、**C**

【解析】

对此分段函数的第一部分进行求导分析可知，当$x=2$时有极大值$f(2)=1$，而后一部分是前一部分的定义域的循环，而值域则是每一次前面两个单位长度定义域的值域的 **2** 倍，故此得到极大值点a_n的通项公式$a_n=2n$，且相应极大值$b_n=2^{n-1}$，分组求和即得

【详解】

当$1\le x\le 3$时，$f'(x)=\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi x-\pi}{2}\right)$，

显然当$x=2$时有，$f'(x)=0$，

∴经单调性分析知