第一讲　动点存在性问题

点动、线动、形动构成的问题称之为动态几何问题。，成为近年来中考试题的热点。

而在具体的题目中，又分为：动点存在性、动点面积以及动点最值三类问题，寒假课程的前三讲，我们将分别就此三类问题进行讲解。

<table>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">〔1〕能够对点在运动变化过程中相伴随的数量关系、图形位置关系等进行观察研究。
〔2〕掌握动点存在性问题的解题方法
〔3〕通过学习, 体会分类讨论的数学思想的使用，感受到数学知识的内在联系.</td></tr>
<tr><td>教学重点</td><td colspan="4">动点存在性问题的解题方法</td></tr>
<tr><td>教学难点</td><td colspan="4">动点存在性问题的解题方法、分类讨论思想</td></tr>
<tr><td>教学方法建议</td><td colspan="4">讲练结合，讲授、讨论结合.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">选材程度及数量</td><td></td><td>课堂精讲例题</td><td>搭配课堂训练题</td><td>课后作业</td></tr>
<tr><td>A 类</td><td>〔 2 〕道</td><td>〔 0 〕道</td><td>〔 4 〕道</td></tr>
<tr><td>B 类</td><td>〔 3 〕道</td><td>〔 4 〕道</td><td>〔 4 〕道</td></tr>
<tr><td>C 类</td><td>〔 3 〕道</td><td>〔 4 〕道</td><td>〔 4 〕道</td></tr>
</table>

一、知识梳理

在中考中，存在性问题一般分为四类：

1.是否存在三角形〔等腰三角形、直角三角形〕;

2.是否存在四边形〔平行四边形、直角梯形和等腰梯形〕;

3.是否存在三角形与三角形相似或者全等;

4.是否存在三角形与三角形的面积之间有数量关系。

二、方法归纳

在解决动点存在性问题时，一般先假设其存在，得到方程，如果有解，那么存在，反之，那么不存在。而在列方程时，一般要用到特殊三角形以及特殊平行四边形的性质、相似、解直角三角形等知识点，需要注意的是，列方程时，一定要遵循：用两种不同的方法表示同一个量，否那么，将会得到“1=1”之类的恒等式。

对于是否存在三角形，一般按顶点分为三类情况。

而对于是否存在平行四边形那么有两种形式的题目：如果三个定点，就有三种情况，一般利用平移坐标法即可求出答案；如果只有两个定点就应该按与边平行以及与对角线平行两种情况考虑了。

对于等腰梯形，就应该考虑腰长在下底边上的投影了。

对于是否存在三角形与三角形相似或者全等，那么与是否存在三角形一样，分三类情况，当然，如果有一个角是一个定角〔比方直角〕，那么就分为两类情况。

二、课堂精讲例题

(一)是否存在三角形〔等腰三角形、直角三角形〕

例 1．如图，在直角梯形 ABCD 中，AD∥BC，∠C＝90°，BC＝16，DC＝12，AD＝21。动点 P 从点 D 出发，沿射线 DA 的方向以每秒 2 两个单位长的速度运动，动点 Q 从点 C 出发，在线段 CB 上以每秒 1 个单位长的速度向点 B 运动，点 P，Q 分别从点 D，C 同时出发，当点 Q 运动到点 B 时，点 P 随之停止运动。设运动的时间为 t〔秒〕。当 t 为何值时，以 B，P，Q 三点为顶点的三角形是等腰三角形？

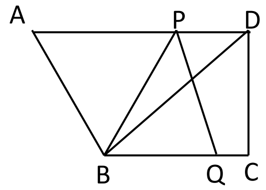

图 1

【难度分级】A 类

〖试题来源〗2005 年河北中考真题。

〖选题意图〗1、使学生掌握存在性问题的一般解题思路；

2、使学生初步体会分类讨论思想在存在性问题中的应用。

〖解题思路〗此题是双动点在线段〔射线〕上运动的存在性问题，根据等腰三角形的特点，B、P、Q 三点均可作为等腰三角形的顶点，所以，以 B、P、Q 三点为顶点的三角形是等腰三角形，分三种情况进行讨论：

①假设 PQ＝BQ、②假设 BP＝BQ、③假设 PB＝PQ

解：由图可知：CM＝PD＝2t，CQ＝t。以 B、P、Q 三点为顶点的三角形是等腰三角形，可以分三种情况：

①假设 PQ＝BQ。在 Rt△PMQ 中，$PQ^2=t^2+12^2$，由 PQ^2＝BQ^2 得 $t^2+12^2=(16-t)^2$，解得 t＝$\frac{7}{2}$；

②假设 BP＝BQ。在 Rt△PMB 中，$BP^2=(16-2t)^2+12^2$。由 BP^2＝BQ^2 得：

$(16-2t)^2+12^2=(16-t)^2$ 即 $3t^2-32t+144=0$。

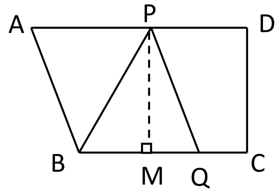

图 2

由于 Δ＝－704＜0

∴ $3t^2-32t+144=0$ 无解，∴PB≠BQ

③假设 PB＝PQ。由 PB^2＝PQ^2，得 $t^2+12^2=(16-2t)^2+12^2$

整理，得 $3t^2-64t+256=0$。解得 $t_1=\frac{16}{3}$，$t_2=16$〔不合题意，舍去〕

综合上面的讨论可知：当 t＝$\frac{7}{2}$秒或$t=\frac{16}{3}$秒时，以 B、P、Q 三点为顶点的三角形是等腰三角形。

【搭配课堂训练题】

1、如图 3，在梯形$ABCD$中，$AD \parallel BC$，$AD=3$，$DC=5$，$AB=4\sqrt{2}$，$\angle B=45°$.动点M从B点出发沿线段BC以每秒 2 个单位长度的速度向终点C运动；动点N同时从C点出发沿线段CD以每秒 1 个单位长度的速度向终点D运动．设运动的时间为t秒．

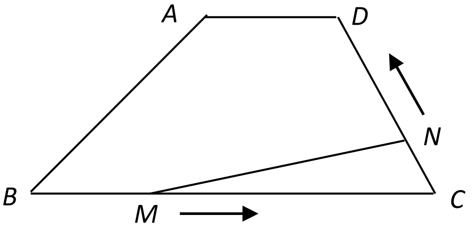

图 3

〔1〕求BC的长．

〔2〕试探究：t为何值时，$\triangle MNC$为等腰三角形．

【难度分级】 B 类

〖试题来源〗 2009 年山东济南中考真题。

〖答案〗

〔1〕如图 4，过A、D分别作$AK \perp BC$于K，$DH \perp BC$于H，那么四边形$ADHK$是矩形

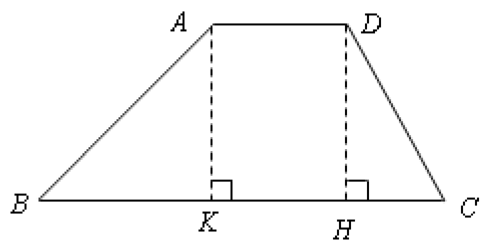

图 4

$\therefore KH=AD=3.$

在$\mathrm{Rt}\triangle ABK$中，

$$AK=AB \cdot \sin 45°=4\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=4$$

$$BK=AB \cdot \cos 45°=4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}=4$$

在$\mathrm{Rt}\triangle CDH$中，由勾股定理得，

$$HC=\sqrt{5^2-4^2}=3$$

$$\therefore BC=BK+KH+HC=4+3+3=10$$

〔3〕分三种情况讨论：

①当$NC=MC$时，如图 5，即$t=10-2t$，$\therefore t=\frac{10}{3}$

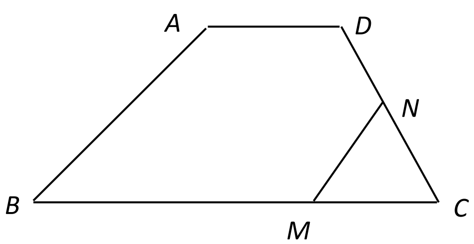

图 5

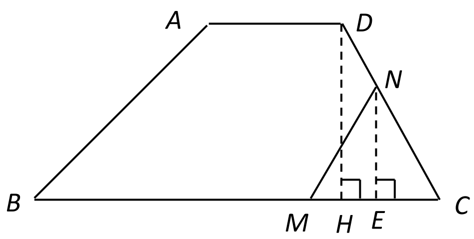

图 6

②当$MN=NC$时，如图6，过N作$NE\perp MC$于E

由等腰三角形三线合一性质得$EC=\frac{1}{2}MC=\frac{1}{2}\left(10-2t\right)=5-t$

$\because \angle C=\angle C$，$\angle DHC=\angle NEC=90°$

$\therefore \triangle NEC\backsim\triangle DHC$

$\therefore \frac{NC}{DC}=\frac{EC}{HC}$　　　　即$\frac{t}{5}=\frac{5-t}{3}$

$\therefore t=\frac{25}{8}$

③当$MN=MC$时，如图7，过M作$MF\perp CN$于F点. $FC=\frac{1}{2}NC=\frac{1}{2}t$

$\because \angle C=\angle C$，$\angle MFC=\angle DHC=90°$

$\therefore \triangle MFC\backsim\triangle DHC$

$\therefore \frac{FC}{HC}=\frac{MC}{DC}$

即$\frac{\frac{1}{2}t}{3}=\frac{10-2t}{5}$

$\therefore t=\frac{60}{17}$

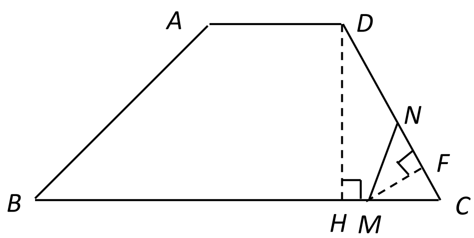

图7

综上所述，当$t=\frac{10}{3}$、$t=\frac{25}{8}$或$t=\frac{60}{17}$时，$\triangle MNC$为等腰三角形。

例2、如图8，在等腰梯形$ABCD$中，$AD\parallel BC$，E是AB的中点，过点E作$EF\parallel BC$交CD于点F．$AB=4$，$BC=6$，$\angle B=60°$.

〔1〕求点E到BC的距离；

〔2〕点P为线段EF上的一个动点，过P作$PM\perp EF$交BC于点M，过M作$MN\parallel AB$交折线ADC于点N，连结PN，设$EP=x$.

①当点N在线段AD上时〔如图9〕，$\triangle PMN$的形状是否发生改变？假设不变，求出$\triangle PMN$的周长；假设改变，请说明理由；

②当点N在线段DC上时〔如图10〕，是否存在点P，使$\triangle PMN$为等腰三角形？假设存在，请求出所有满足要求的x的值；假设不存在，请说明理由.

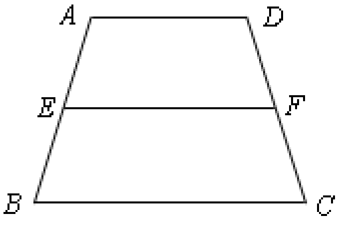

图8

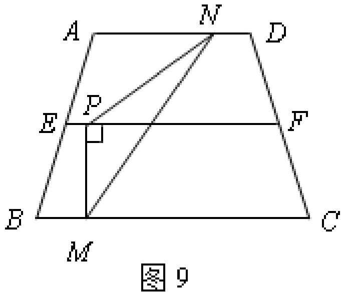

图9

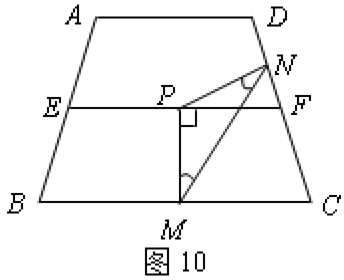

图10

【难度分级】C 类

〖试题来源〗2009 年江西南昌中考真题。

〖选题意图〗1、使学生掌握存在性问题的一般解题思路；

2、提高学生对中位线、等腰三角形的性质、相似、解直角三角形等知识点的综合应用能力。

〖解题思路〗〔1〕可通过构建直角三角形然后运用勾股定理求解.

〔2〕①△PMN 的形状是否会变化，关键在于△PMN 的三条边长是否会发生变化，由于点 P 在 EF 上运动，所以 PM 是恒定不变的，而 MN∥AB, 使得四边形 ABMN 成为了平行四边形，因而 MN 也不变，所以此题也就转变为 PN 是否变化的问题了，这时候就要着重考虑∠B=60° 这一条件了，可做 PH⊥MN 于 H，PH 是△PMH 和△PHN 的公共边，在 RT△PHM 中，有 PM 的值，∠PMN 的度数也不难求出，那么就能求出 MH 和 PH 的值，也就求出 HN 和 PN 的值了，有了 PN，PM，MN 的值，就能求出△MPN 的周长了.

②此题分三种情况进行讨论：

1. PM=PN．这种情况同①的计算方法.

2. MP=MN 时，MC=MN=MP，这样有了 MC 的值，x 也就能求出来了

3. NP=NM 时，我们不难得出∠PMN=120° ，又因为∠MNC=60° 因此∠PNM+∠MNC=180 度. 这样点 P 与 F 就重合了，△PMC 是个直角三角形，然后根据三角函数求出 MC 的值，然后就能求出 x 了.

综合上面的分析把△PMC 是等腰三角形的情况找出来就行了。

解:〔1〕如图 11，过点 E 作 $EG\perp BC$ 于点 G.

$\because E$ 为 AB 的中点，

$\therefore BE=\frac{1}{2}AB=2.$

在 $Rt\triangle EBG$ 中，$\angle B=60°, \therefore \angle BEG=30°.$

$\therefore BG=\frac{1}{2}BE=1$，$EG=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}.$

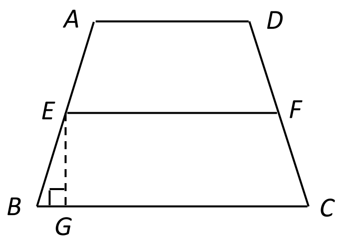

图 11

即点 E 到 BC 的距离为 $\sqrt{3}$.

〔2〕①当点 N 在线段 AD 上运动时，$\triangle PMN$ 的形状不发生改变.

$\because PM\perp EF$，$EG\perp EF, \therefore PM \parallel EG.$

$\because EF \parallel BC, \therefore EP=GM$ ，$PM=EG=\sqrt{3}.$

同理 $MN=AB=4.$

如图 12，过点 P 作 $PH\perp MN$ 于 H ，$\because MN \parallel AB,$

$\therefore \angle NMC=\angle B=60°$，$\angle PMH=30°.$

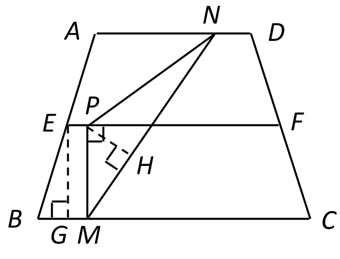

图 12

$\therefore PH=\frac{1}{2}PM=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore MH=PM\cdot\cos 30^\circ=\frac{3}{2}$.

那么 $NH=MN-MH=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$.

在 $Rt\triangle PNH$ 中，$PN=\sqrt{NH^2+PH^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{7}$.

$\therefore \triangle PMN$ 的周长$=PM+PN+MN=\sqrt{3}+\sqrt{7}+4$.

②当点 N 在线段 DC 上运动时，$\triangle PMN$ 的形状发生改变，但 $\triangle MNC$ 恒为等边三角形.

当 $PM=PN$ 时，如图 13，作 $PR\perp MN$ 于 R，那么 $MR=NR$.

类似①，$MR=\frac{3}{2}$.

$\therefore MN=2MR=3$.

$\because \triangle MNC$ 是等边三角形，$\therefore MC=MN=3$.

此时，$x=EP=GM=BC-BG-MC=6-1-3=2$.

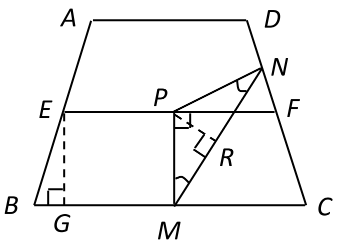

图 13

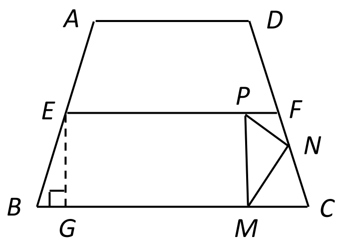

图 14

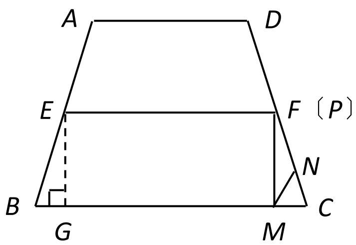

图 15

当 $MP=MN$ 时，如图 14，这时 $MC=MN=MP=\sqrt{3}$.

此时，$x=EP=GM=6-1-\sqrt{3}=5-\sqrt{3}$.

当 $NP=NM$ 时，如图 15，$\angle NPM=\angle PMN=30^\circ$.

那么 $\angle PMN=120^\circ$，又 $\angle MNC=60^\circ$，

$\therefore \angle PNM+\angle MNC=180^\circ$.

因此点 P 与 F 重合，$\triangle PMC$ 为直角三角形.

$\therefore MC=PM\cdot\tan 30^\circ=1$.

此时，$x=EP=GM=6-1-1=4$.

综上所述，当 $x=2$ 或 4 或 $\left(5-\sqrt{3}\right)$ 时，$\triangle PMN$ 为等腰三角形.

【搭配课堂训练题】

1、如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle A=90^\circ$，$AB=6$，$AC=8$，$D，E$ 分别是边 $AB，AC$ 的中点，点 P 从点 D 出发沿 DE 方向运动，过点 P 作 $PQ\perp BC$ 于 Q，过点 Q 作 $QR\parallel BA$ 交 AC 于 R，当点 Q 与点 C 重合时，点 P 停止运动．设 $BQ=x$，$QR=y$．

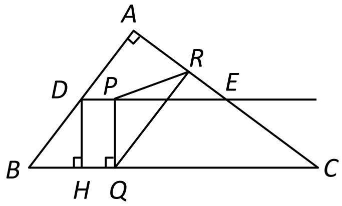

图 16

〔1〕求点 D 到 BC 的距离 DH 的长；

〔2〕求 y 关于 x 的函数关系式〔不要求写出自变量的取值范围〕；

〔3〕是否存在点 P，使 $\triangle PQR$ 为等腰三角形？假设存在，请求出所有满足要求的 x 的值；假设不存在，请说明理由．

【难度分级】C 类

〖试题来源〗2008 浙江温州中考数学试卷

〖解题思路〗〔1〕由△BHD∽△BAC,可得 DH;

〔2〕)由△RQC∽△ABC,可得 y 关于 x 的函数关系式；

〔3〕按 PQ=PR、PQ=QR、QR=PR 三种情况分类讨论，由腰相等列方程可得 x 的值；

解：〔1〕Q $\angle A=\mathrm{Rt}\angle$，$AB=6$，$AC=8$，$\therefore BC=10$．

Q 点 D 为 AB 中点，$\therefore BD=\dfrac{1}{2}AB=3$．

Q $\angle DHB=\angle A=90^\circ$，$\angle B=\angle B$．$\therefore\triangle BHD\backsim\triangle BAC$，$\therefore\dfrac{DH}{AC}=\dfrac{BD}{BC}$，

$\therefore DH=\dfrac{BD}{BC}\cdot AC=\dfrac{3}{10}\times 8=\dfrac{12}{5}$

〔2〕Q $QR\parallel AB$，$\therefore\angle QRC=\angle A=90^\circ$．Q $\angle C=\angle C$，$\therefore\triangle RQC\backsim\triangle ABC$，

$\therefore\dfrac{RQ}{AB}=\dfrac{QC}{BC}$，$\therefore\dfrac{y}{6}=\dfrac{10-x}{10}$，即 y 关于 x 的函数关系式为：$y=-\dfrac{3}{5}x+6$．

〔3〕存在. 按腰相等分三种情况：

①当 $PQ=PR$ 时，过点 P 作 $PM\perp QR$ 于 M，

那么 $QM=RM$．

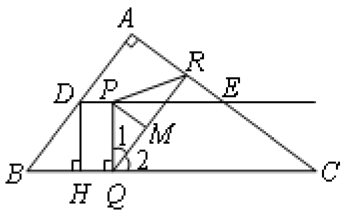

图17

Q $\angle 1+\angle 2=90^\circ$，　　$\angle C+\angle 2=90^\circ$，

$\therefore\angle 1=\angle C$．

$\therefore \cos\angle 1=\cos C=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$，$\therefore \frac{QM}{QP}=\frac{4}{5}$，

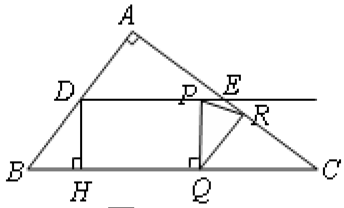

图18

$\therefore \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{5}x+6\right)}{\frac{12}{5}}=\frac{4}{5}$，$\therefore x=\frac{18}{5}$.

②当 $PQ=RQ$ 时，$-\frac{3}{5}x+6=\frac{12}{5}$，

$\therefore x=6$.

③当 $PR=QR$ 时，那么 R 为 PQ 中垂线上的点，

于是点 R 为 EC 的中点，

$\therefore CR=\frac{1}{2}CE=\frac{1}{4}AC=2$.

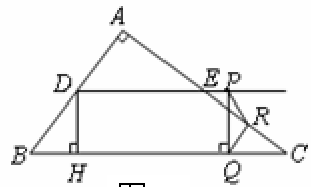

图19

$\because \tan C=\frac{QR}{CR}=\frac{BA}{CA}$，

$\therefore \frac{-\frac{3}{5}x+6}{2}=\frac{6}{8}$，$\therefore x=\frac{15}{2}$.

综上所述，当 x 为 $\frac{18}{5}$ 或 6 或 $\frac{15}{2}$ 时，$\triangle PQR$ 为等腰三角形.

例 3、如图，直线 $y=\frac{1}{2}x+1$ 与 y 轴交于点 A，与 x 轴交于点 D，抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 与直线交于 A、E 两点，与 x 轴交于 B、C 两点，且 B 点坐标为（1，0）。

⑴求该抛物线的解析式；

⑵动点 P 在 x 轴上移动，当△PAE 是直角三角形时，求点 P 的坐标 P。

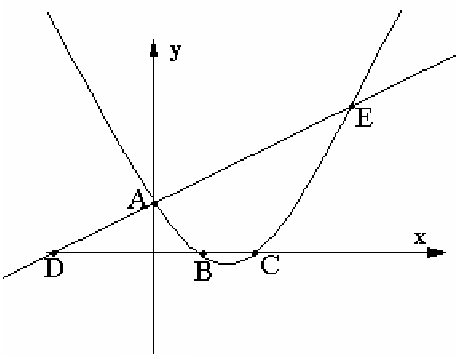

图20

【难度分级】B 类

〖试题来源〗2009 年四川眉山中考真题。

〖选题意图〗1、使学生掌握存在性问题的一般解题思路；

2、提高学生对相似的综合应用能力。

〖解题思路〗〔1〕先求点 A 坐标，然后代入二次函数解析式，列方程求解；

〔2〕与解决等腰三角形的存在性问题一样，按顶点分为三种情况，利用相似或者射影定理即可解决。

解;〔1〕将 A〔0，1〕、B〔1，0〕坐标代入 $y=\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 得 $\begin{cases} c=1 \\ \frac{1}{2}+b+c=0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b=-\frac{3}{2} \\ c=1 \end{cases}$

∴抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+1$

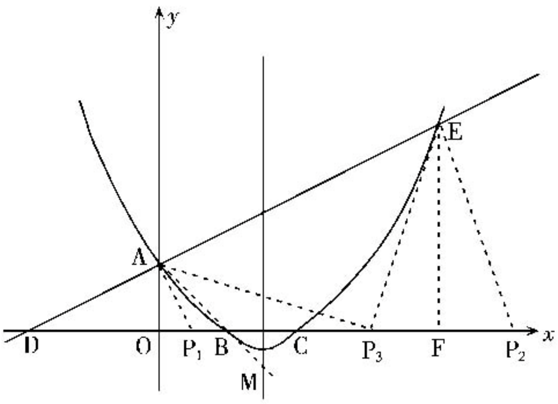

图21

〔2〕设点 E 的横坐标为 m，那么它的纵坐标为 $\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}m+1$

即 E 点的坐标〔m，$\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}m+1$〕又∵点 E 在直线 $y=\frac{1}{2}x+1$ 上

∴ $\frac{1}{2}m^2-\frac{3}{2}m+1=\frac{1}{2}m+1$　　解得 $m_1=0$〔舍去〕，$m_2=4$

∴E 的坐标为〔4，3〕〔Ⅰ〕当 A 为直角顶点时

过 A 作 AP_1⊥DE 交 x 轴于 P_1 点，设 P_1〔a,0〕　　易知 D 点坐标为〔－2，0〕

由 Rt△AOD∽Rt△P_1OA 得 $\frac{DO}{OA}=\frac{OA}{OP_1}$

即 $\frac{2}{1}=\frac{1}{a}$，∴a＝$\frac{1}{2}$　　∴P_1〔$\frac{1}{2}$，0〕

〔Ⅱ〕同理，当 E 为直角顶点时，P_2 点坐标为〔$\frac{11}{2}$，0〕

〔Ⅲ〕当 P 为直角顶点时，过 E 作 EF⊥x 轴于 F，设 P_3〔b,3〕由∠OP_3A+∠FP_3E＝90°，得∠OP_3A＝∠FEP_3　　Rt△AOP_3∽Rt△P_3FE

由 $\frac{AO}{P_3F}=\frac{OP_3}{EF}$ 得 $\frac{1}{4-b}=\frac{b}{3}$　解得 $b_1=3$，$b_2=1$

∴此时的点 P_3 的坐标为〔1，0〕或〔3，0〕

综上所述，满足条件的点 P 的坐标为〔$\frac{1}{2}$，0〕或〔1，0〕或〔3，0〕或〔$\frac{11}{2}$，0〕

【搭配课堂训练题】

1、抛物线 $y=kx^2+2kx-3k$，交 x 轴于 A、B 两点(A 在 B 的左边)，交 y 轴于 C 点，且 y 有最大值 4.

(1)求抛物线的解析式；

(2)在抛物线上是否存在点 P，使△PBC 是直角三角形?假设存在，求出 P 点坐标；假设不存在，说明

理由.

【难度分级】B 类

〖试题来源〗2006 内蒙古包头市中考数学试卷

〖解题思路〗〔1〕根据二次函数的最值$\frac{4ac-b^2}{4a}=4$且 k<0，求出 k 即可；

〔2〕分三类情况讨论①当∠C=90°时，作 PC⊥BC 交抛物线于 P 点，并做 PD⊥y 轴于 D 点，设 P〔x，$-x^2-2x+3$〕，根据△OBC∽△DCP，列方程，求出即可；②当∠B=90°时，作 PB⊥BC 交抛物线于 P 点，并作 PE⊥x 轴于点 E，设 P〔x，$-x^2-2x+3$〕，根据△OBC∽△EPB，列方程求出即可；③当∠P=90°时，点 P 应在以 BC 为直径的圆周上，根据图象得出结论.

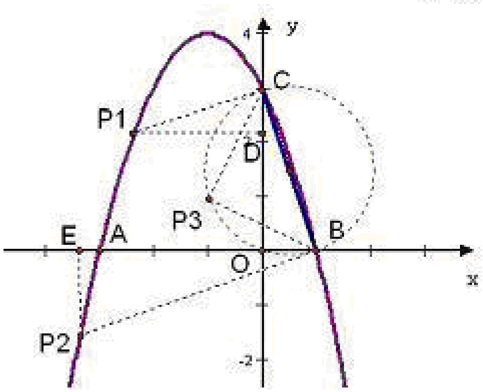

图22

解：〔1〕∵y 有最大值 4，∴$\frac{4k\cdot(-3k)-(2k)^2}{4k}=4$且$k<0$

解得$k=-1$，∴$y=-x^2-2x+3$

〔2〕根据直角的可能性分三种情况：①当∠C=90°时，作 PC⊥BC 交抛物线于 P 点，并做 PD⊥y 轴于 D 点。

设$P(x,-x^2-2x+3)$，∵△OBC∽△DCP，∴$\frac{CO}{BO}=\frac{DP}{CD}$，即$\frac{3}{1}=\frac{-x}{3-(-x^2-2x+3)}$

∴$x_1=0$〔舍去〕，$x_2=-\frac{7}{3}$，∴$P(-\frac{7}{3},\frac{20}{9})$

②当∠B=90°时，作 PB⊥BC 交抛物线于 P 点，并作 PE⊥x 轴于点 E，设$P(x,-x^2-2x+3)$

∵△OBC∽△EPB，∴$\frac{CO}{BO}=\frac{EB}{EP}$，即$\frac{3}{1}=\frac{1-x}{-(-x^2-2x+3)}$

∴$x_1=1$〔舍去〕，$x_2=-\frac{10}{3}$，∴$P(-\frac{10}{3},-\frac{13}{9})$

③当∠P=90°时，点 P 应在以 BC 为直径的圆周上，如图，与抛物线无交点，故不存在。

综上所述，这样的点 P 有两个：$P_1(-\frac{7}{3}，\frac{20}{9})$，$P_2(-\frac{10}{3}，-\frac{13}{9})$。

〔二〕是否存在四边形〔平行四边形、直角梯形和等腰梯形〕

例 4、如图，抛物线 $y=ax^2+bx-3$ 与 x 轴交于 $A,\ B$ 两点，与 y 轴交于 C 点，且经过点 $(2,-3a)$，对称轴是直线 $x=1$，顶点是 M .

（1） 求抛物线对应的函数表达式；

（2） 经过 C,M 两点作直线与 x 轴交于点 N，在抛物线上是否存在这样的点 P，使以点 $P,\ A,\ C,\ N$ 为顶点的四边形为平行四边形？假设存在，请求出点 P 的坐标；假设不存在，请说明理由；

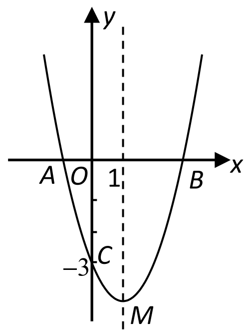

图 23

【难度分级】 B 类

〖试题来源〗 2009 年山东烟台中考真题。

〖选题意图〗 ①使学生理解并掌握平移坐标法的使用。

②使学生掌握三点情况下，解决存在平行四边形问题的一般解法

〖解题思路〗〔1〕. 依题意联立方程组求出 a，b 的值后可求出函数表达式.

〔2〕易得 A、C、N 三点坐标分别为：A$(-1,0)$、C$(0,-3)$、$(-3,0)$

利用平移坐标法，很容易就可得到三种情况下 P 点的坐标，然后检验即可。

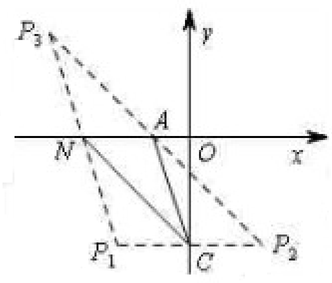

图24

解：〔1〕根据题意，得 $\begin{cases}-3a=4a+2b-3,\\ -\dfrac{b}{2a}=1.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=-2.\end{cases}$

$\therefore$ 抛物线对应的函数表达式为 $y=x^2-2x-3$.

〔2〕存在.

由于 A、C、N 三点坐标已经确定，要使得四边形 ACNP 是平行四边形，有三种情况：

①以 CN 为对角线，平移可得 $P_1(-2,-3)$

②以 AC 为对角线，平移可得 $P_2(2,-3)$

③以 AN 为对角线，平移可得 $P_3(-4,3)$

经检验只有 $P_2(2,-3)$ 在抛物线上，所以 $P(2,-3)$

例 5、如图，抛物线 $y=x^2-2x-3$ 与 x 轴交 A、B 两点〔A 点在 B 点左侧〕，直线 l 与抛物线交于 A、C 两点，其中 C 点的横坐标为 2．

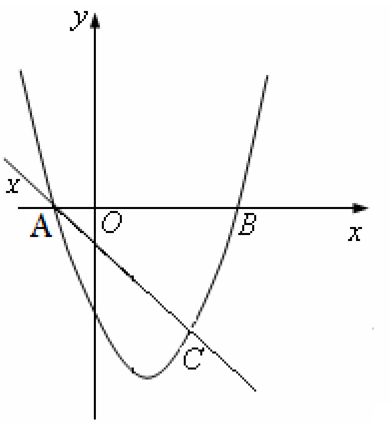

图25

〔1〕求 A、B 两点的坐标及直线 AC 的函数表达式；

〔2〕点 G 是抛物线上的动点，在 x 轴上是否存在点 F，使 A、C、F、G 这样的四个点为顶点的四边形是平行四边形？如果存在，求出所有满足条件的 F 点坐标；如果不存在，请说明理由．

【难度分级】 C 类

〖试题来源〗 2007 年浙江义乌中考真题。

〖选题意图〗 使学生掌握两点情况下，解决存在平行四边形问题的一般解法

〖解题思路〗〔1〕、根据，列方程求出 A、B、C 三点坐标，继而可以很容易求出 AC 的解析式。

〔2〕、A、C 两点坐标，分两种情况：

①以 AC 为对角线时，

②以 AC 为一边时，

解：〔1〕令 y=0，解得 $x_1=-1$ 或 $x_2=3$

∴A〔-1，0〕B〔3，0〕；

将 C 点的横坐标 x=2 代入 $y=x^2-2x-3$ 得 y=-3，∴C〔2，-3〕

∴直线 AC 的函数解析式是 y=-x-1

〔2〕

AC 为对角线时，如图 26 所示

AF=CG=2，A 点的坐标为〔-1，0〕，

因此 F 点的坐标为〔1，0〕；

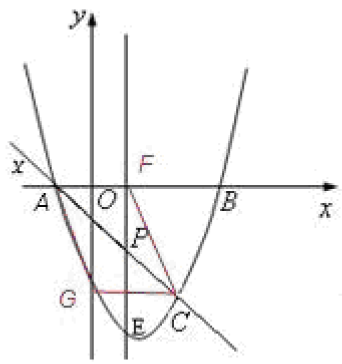

图26

AC 为一边时，做 AC 的平行线，得到如图 27、28、29 所示：

①如图 27，连接 C 与抛物线和 y 轴的交点 G，那么 CG∥x 轴，此时 AF=CG=2，因此 F 点的坐标是〔-3，0〕；

②如图 28，此时 C，G 两点的纵坐标关于 x 轴对称，因此 G 点的纵坐标为 3，代入抛物线中即可得出 G 点的坐标为〔$1\pm\sqrt{7}$，3〕，由于直线

GF 的斜率与直线 AC 的相同，因此可设直线 GF 的解析式为 y=−x+h，将 G 点代入后可得出直线的解析式为 y=−x+7．因此直线 GF 与 x 轴的交点 F 的坐标为〔$4+\sqrt{7}$，0〕；

③如图 29，同②可求出 F 的坐标为〔$4-\sqrt{7}$ ，0〕；

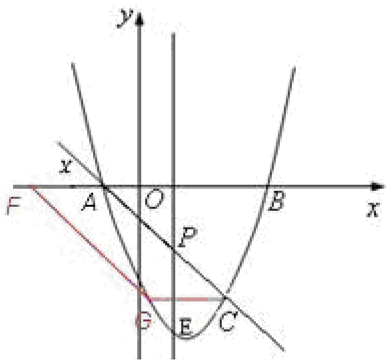

图27

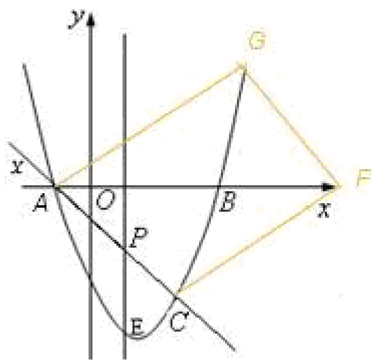

图28

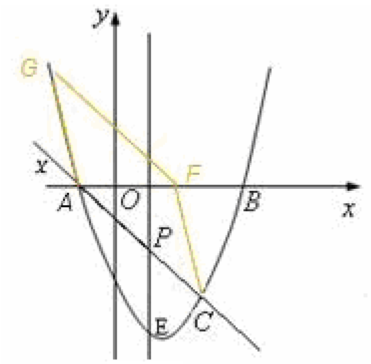

图29

综上，存在 4 个这样的点 F，分别是 $F_1(1,0),F_2(-3,0),F_3(4+\sqrt{7},o),F_4(4-\sqrt{7},0)$

【搭配课堂训练题】

1、抛物线：$y_1=-\frac{1}{2}x^2+2x$

〔1〕求抛物线 y_1 的顶点坐标.

〔2〕将抛物线 y_1 向右平移 2 个单位，再向上平移 1 个单位，得到抛物线 y_2，求抛物线 y_2 的解析式.

〔3〕如以下图，抛物线 y_2 的顶点为 P，x 轴上有一动点 M，在 y_1、y_2 这两条抛物线上是否存在点 N，使 O〔原点〕、P、M、N 四点构成以 OP 为一边的平行四边形，假设存在，求出 N 点的坐标；假设不存在，请说明理由.

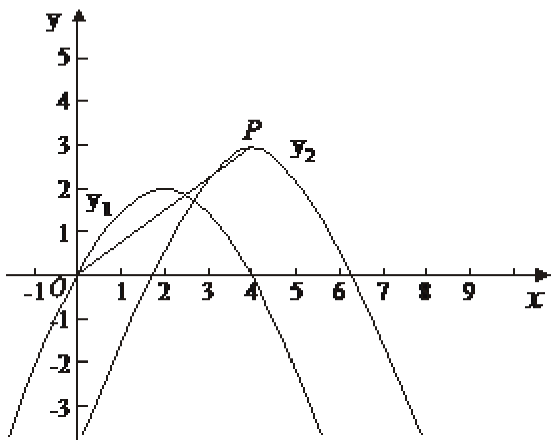

图30

【难度分级】B 类

〖试题来源〗2009 年福建南平中考真题

〖解题思路〗

〔1〕、利用顶点公式计算；

〔2〕、二次函数的平移;左加右减，上加下减。

〔3〕O、P 两个定点，不过，题目强调以 OP 为一边的平行四边形，所以，只要 MN∥OP，考虑到点 M 在 X 轴上，因此按点 N 在 y_1 或者 y_2 上两种情况讨论。

解：〔1〕依题意 $a=-\frac{1}{2},b=2,c=0$

$$\therefore -\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2\times(-\frac{1}{2})}=2\text{，}\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{0-2^2}{4\times(-\frac{1}{2})}=2$$

∴顶点坐标是〔2，2〕

〔2〕根据题意可知

y_2解析式中的二次项系数为$-\frac{1}{2}$

且y_2的顶点坐标是〔4，3〕

∴$y_2=-\frac{1}{2}(x-4)^2+3$，即：$y_2=-\frac{1}{2}x^2+4x-5$

〔3〕符合条件的N点存在

如图31：假设四边形$OPMN$为符合条件的平行四边形，那么$OP \parallel MN$，且$OP=MN$

$\therefore \angle POA=\angle BMN$，

作$PA\perp x$轴于点A，$NB\perp x$轴于点B

$\therefore \angle PAO=\angle MBN=90^0$，

那么有$\Delta POA\cong\Delta NMB$〔AAS〕$\therefore PA=BN$

∵点P的坐标为〔4,3〕$\therefore NB=PA=3$

∵点N在抛物线y_2上，且P点为y_1、y_2的最高点

∴符合条件的N点只能在x轴下方

① 点 N 在抛物线 y_1上，那么有：$-\frac{1}{2}x^2+2x=-3$

解得：$x=2-\sqrt{10}$或$x=2+\sqrt{10}$

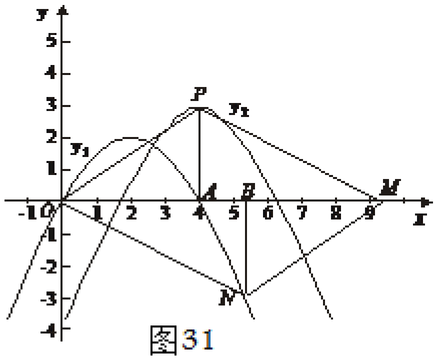

图31

② 点 N 在抛物线 y_2上，那么有：$-\frac{1}{2}(x-4)^2+3=-3$

解得：$x=4-2\sqrt{3}$或$x=4+2\sqrt{3}$

∴符合条件的N点有四个：

$N_1(2-\sqrt{10},-3)$; $N_2(4-2\sqrt{3},-3)$; $N_3(2+\sqrt{10},-3)$; $N_4(4+2\sqrt{3},-3)$。

例 6、梯形 ABCD 中，AD∥BC，∠B=90°，AD=24cm，AB=8cm，BC=26cm，动点 P 从点 A 开始，沿 AD 边，以 1 厘米/秒的速度向点 D 运动；动点 Q 从点 C 开始，沿 CB 边，以 3 厘米/秒的速度向 B 点运动。P、Q 两点分别从 A、C 同时出发，当其中一点到达端点时，另一点也随之停止运动。假设运动时间为 t 秒，问：

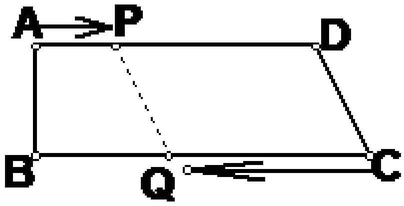

图32

〔1〕t 为何值时，四边形 PQCD 是直角梯形？

〔2〕t 为何值时，四边形 PQCD 是等腰梯形？

【难度分级】A 类

〖试题来源〗经典例题

〖选题意图〗使学生掌握是否存在等腰梯形的一般解法。

〖解题思路〗〔1〕在 AD∥BC，∠C≠90° 的情况下，要使四边形 PQCD 成为直角梯形，只要 PQ⊥BC，所以 AP=BQ，即 $t=26-3t$，所以 $t=\frac{13}{2}$

〔2〕、要使得四边形 PQCD 成为等腰梯形，那么必须 PQ=CD 且 PQ 不平行 CD, 解决此问题，一般有两种方法。

方法 1：用勾股定理表示出 PQ 的长，根据 PQ=CD 列方程求解，可以求出两个解，必须舍去使 PQ∥DC 的解。此解法比拟麻烦，而且容易出错。

方法 2：如图 33，如果四边形 PQCD 成为等腰梯形，那么 QF=CE，反之也成立，所以，根据 QC=QF+EF+EC=QF+PD+CE 列方程得：$2+24-t+2=3t$，所以 $t=7$。此方法计算简单，不易错。

解：〔1〕∵AD∥BC 且∠C≠90°

∴要使四边形 PQCD 成为直角梯形

那么 PQ⊥BC

∴　AP=BQ，即 $t=26-3t$

∴ $t=\frac{13}{2}$

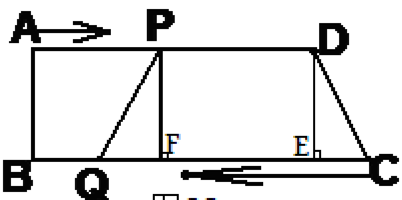

图33

〔2〕如图 33，∵四边形 PQCD 成为等腰梯形

那么 QF=CE

又∵QC=QF+EF+EC=QF+PD+CE

∴ $2+24-t+2=3t$

∴ $t=7$

【搭配课堂训练题】

1、二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过点 A(3，0)，B(2，-3)，C(0，-3)．

(1)求此函数的解析式及图象的对称轴；

(2)点 P 从 BBC 向 C 点运动，点 Q 从 O 点出发以相同的速度沿线段 OA 向 A 点运动,其中一个动点到达端点时，另一个也随之停止运动．设运动时间为 t 秒．当 t 为何值时，四边形 $ABPQ$

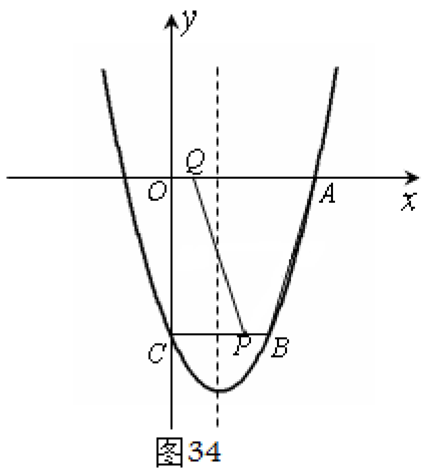

图34