专题五 数列

第一讲　等差数列、等比数列

（一）高考考点解读

高考考点

1. 等差（比）数列的基本运算
2. 等差（比）数列的判断与证明
3. 等差（比）数列的性质

考点解读

1. 在等差（比）数列中，$a_1, a_n, S_n, n, d(q)$ 这五个量中已知其中的三个量，求另外两个量，

2. 考查等差（比）数列的通项公式，前n项和公式，

考查方程的思想以及运算能力

考点解读

3. 以递推数列为载休，考查等差（比）数列的定义或等差（比）中项

4. 以递堆数列为命题背景考查等差（比）数列的证明方法

考点解读

5. 等差（比）数列项或和的一些简单性质的应用

6. 常与数列的项或前 n 项和结合考查等差（比）数列的性质

（二）核心知识整合

考点1：等差（比）数列的基本运算

1.等差数列

(1)等差数列通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d$.

(2)等差数列前 n 项和公式：$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$.

(3)等差中项公式：$2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*，n\geq 2)$.

2.等比数列

(1)等比数列通项公式：$a_n = a_1 q^{n-1}$.

(2)等比数列前n项和公式：$S_n = \begin{cases} na_1 (q=1) \\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{a_1 - a_n q}{1-q} (q \neq 1) \end{cases}$.

(3)等比中项公式：$a = a_{n-1} \cdot a_{n+1} (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2)$

3.数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 与通项 a_n 之间的关系

$$a_n=\begin{cases}S_1, & n=1,\\ S_n-S_{n-1}, & n\geq 2\end{cases}$$

4.重要结论

通项公式的推广：

等差数列中，$a_n=a_m+(n-m)d$；

等比数列中，$a_n=a_m\cdot q^{n-m}$．

解题技巧

在等差(比)数列问题中最基本的量是首项a_1和公差d(公比q)，

在解题时往往根据已知条件建立关于这两个量的方程组，

从而求出这两个量，那么其他问题也就会迎刃而解，

这就是解决等差、等比数列问题的基本量的方法，这其中蕴含着方程思想的运用.

提醒

应用等比数列前n项和公式时，务必注意公比q的取值范围.

典例

1.在等差数列 $\{a_n\}$ 中,若 $\frac{a_9}{a_8}<-1$,且它的前 n 项和 S_n 有最小值,则当 $S_n>0$ 时,n 的最小值为( )

A.14 B.15 C.16 D.17

√

解析

数列 $\{a_n\}$ 是等差数列,它的前 n 项和 S_n 有最小值,$\therefore$ 公差 $d>0$,首项 $a_1<0$,$\{a_n\}$ 为递增数列,又

$\frac{a_9}{a_8}<-1$,得 $\therefore a_8 \cdot a_9<0, a_8+a_9>0$,知 $a_8<0$,由等差数列的性质

$2a_8=a_1+a_{15}<0, a_8+a_9=a_1+a_{16}>0$ □ $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$,$\therefore$ $S_n>0$ 时,n 的最小值为 16.

故选 C.

变式

2.已知在正项等比数列$\{a_n\}$中，且 $a_3a_5=4$ a_4 a_6+1 a_7 成等差数列，则该数列的公比 q 为(　　).

A. $\frac{1}{4}$　B. $\frac{1}{2}$　C. 2　D. 4

√

解析

$\{a_n\}$ 是正项等比数列，且 $a_3a_5=4$

$\therefore q>0$　$a_4^2=a_3a_5=4$　$\therefore a_4=2$

a_4　a_6+1　a_7 成等差数列，　$\therefore a_4+a_7=2(a_6+1)$　$\therefore 2+2q^3=4q^2+2$　$\therefore q=2$

故选C

（二）核心知识整合

考点 2：等差（比）数列的判断与证明

1.若$\{a_n\}$，$\{b_n\}$均是等差数列，S_n是$\{a_n\}$的前 n 项和，

则$\{ma_n+kb_n\}$，$\{\frac{S_n}{n}\}$仍为等差数列，其中 m，k 为常数.

2．若$\{a_n\}$，$\{b_n\}$均是等比数列，则$\{ca_n\}(c\neq 0)$，$\{|a_n|\}$，$\{a_n\cdot b_n\}$，$\{ma_nb_n\}$(m 为常数)，

$\{a_n^2\}$，$\{\frac{1}{a_n}\}$仍为等比数列.