2023—2024 学年度第一学期期中考试试题

高二数学

一、单选题（本大题共 8 小题，共 40 分．在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 直线 $x+\sqrt{3}y-3=0$ 的倾斜角是（　　）

A. 30°　　B. 60°　　C. 150°　　D. 120°

【答案】C

【解析】

【分析】由斜率可确定直线的倾斜角.

【详解】由 $x+\sqrt{3}y-3=0$ 得 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$，所以该直线的斜率为：$k=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

设直线倾斜角为θ，则 $0°\le\theta<180°$，且 $tan\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\theta=150°$.

故选：C

2. 已知 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.3$，$P(AB)=0.2$，则 $P(A\cup B)=$（　　）

A. 0.5　　B. 0.6　　C. 0.8　　D. 1

【答案】B

【解析】

【分析】依题意根据 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ 计算可得；

【详解】解：因为 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.3$，$P(AB)=0.2$

则 $P(AB)\neq P(A)P(B)$，所以事件 A 与事件 B 不相互独立，

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.3-0.2=0.6$.

故选：B

3. 若直线 $l_1:x+ay+6=0$ 与 $l_2:(a-2)x+3y+2a=0$ 平行，则 l_1 与 l_2 间的距离为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

C. $\sqrt{3}$　　D. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】由两直线平行的判定有$3-a(a-2)=0$且$2a^2-18\neq 0$求参数a，应用平行线距离公式求l_1与l_2间的距离.

【详解】∵直线$l_1: x+ay+6=0$与$l_2:(a-2)x+3y+2a=0$平行，

∴$3-a(a-2)=0$且$2a^2-18\neq 0$，解得$a=-1, l_2:-3x+3y-2=0, x-y+\frac{2}{3}=0$.

∴直线l_1与l_2间的距离$d=\frac{\left|6-\frac{2}{3}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$.

故选：B.

4. 已知等差数列$\{a_n\}$的公差为2，若a_1, a_3, a_4成等比数列，S_n是$\{a_n\}$的前n项和，则S_9等于（　　）

A. -8　　B. -6　　C. 10　　D. 0

【答案】D

【解析】

【分析】由 a_1，a_3，a_4成等比数列，可得$a_3{}^2=a_1a_4$，再利用等差数列的通项公式及其前 n 项和公式即可得出.

【详解】∵a_1，a_3，a_4成等比数列，∴$a_3{}^2=a_1a_4$，

∴$(a_1+2\times 2)^2=a_1\cdot(a_1+3\times 2)$，

化为 $2a_1=-16$，

解得 $a_1=-8$.

∴则 $S_9=-8\times 9+\frac{9\times 8}{2}\times 2=0$，

故选 D.

【点睛】本题考查了等比数列与等差数列的通项公式及其前 n 项和公式，考查了推理能力与计算能力，属于中档题.

5. 若直线l经过点$P(-2,1)$，且直线l的一个法向量为$\vec{v}=(2,-1)$，则直线l的方程为（　　）

A. $x+2y=0$　　　　B. $x+2y-4=0$

C. $2x-y+5=0$　　　　D. $2x+y+3=0$

【答案】C

【解析】

【分析】根据直线l的一个法向量为$\vec{v}=(2,-1)$，得到$k_l=2$，写出直线方程.

【详解】因为直线l的一个法向量为$\vec{v}=(2,-1)$，

所以$k_l=2$，

则直线l的方程为 $y-1=2(x+2)$，即$2x-y+5=0$，

故选：C

6. 在明代程大位所著的《算法统宗》中有这样一首歌谣，“放牧人粗心大意，三畜偷偷吃苗青，苗主扣住牛马羊，要求赔偿五斗粮，三畜户主愿赔偿，牛马羊吃得异样．马吃了牛的一半，羊吃了马的一半．”请问各畜赔多少？它的大意是放牧人放牧时粗心大意，牛、马、羊偷吃青苗，青苗主人扣住牛、马、羊向其主人要求赔偿五斗粮食（1 斗=10 升），三畜的主人同意赔偿，但牛、马、羊吃的青苗量各不相同．马吃的青苗是牛的一半，羊吃的青苗是马的一半．问羊、马、牛的主人应该分别向青苗主人赔偿多少升粮食？（　　）

A. $\frac{25}{7},\frac{50}{7},\frac{100}{7}$　　B. $\frac{25}{14},\frac{25}{7},\frac{50}{7}$　　C. $\frac{100}{7},\frac{200}{7},\frac{400}{7}$　　D. $\frac{50}{7},\frac{100}{7},\frac{200}{7}$

【答案】D

【解析】

【分析】设羊户赔粮a_1升,马户赔粮a_2升,牛户赔粮a_3升,易知a_1,a_2,a_3成等比数列,$q=2,a_1+a_2+a_3=50$,结合等比数列的性质可求出答案.

【详解】设羊户赔粮a_1升,马户赔粮a_2升,牛户赔粮a_3升,则a_1,a_2,a_3成等比数列,且公比

$q=2, a_1+a_2+a_3=50$，则 $a_1\left(1+q+q^2\right)=50$，故 $a_1=\frac{50}{1+2+2^2}=\frac{50}{7}, a_2=2a_1=\frac{100}{7}$，$a_3=2^2a_1=\frac{200}{7}$.

故选:D.

【点睛】本题考查数列与数学文化,考查了等比数列的性质,考查了学生的运算求解能力,属于基础题.

7. 点 $P\left(2,3\right)$ 到直线 $l: ax+y-2a=0$ 的距离为 d，则 d 的最大值为（　）

A. 3　　　B. 4　　　C. 5　　　D. 7

【答案】A

【解析】

【分析】首先确定直线所过的定点，然后确定 d 的最大值即可.

【详解】直线方程即 $y=-a\left(x-2\right)$，据此可知直线恒过定点 $M\left(2,0\right)$，

当直线 $l\perp PM$ 时，d 有最大值，

结合两点之间距离公式可得 d 的最大值为 $\sqrt{\left(2-2\right)^2+\left(3-0\right)^2}=3$.

本题选择 A 选项.

【点睛】本题主要考查直线恒过定点问题，两点之间距离公式及其应用等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

8. 曲线 $y=1+\sqrt{4-x^2}$ 与直线 $kx-y-2k+4=0$ 有两个交点时，实数 k 取值范围是（　）

A. $\left(\frac{5}{12},\frac{3}{4}\right]$　　　B. $\left(\frac{5}{12},\frac{3}{4}\right)$　　　C. $\left(\frac{1}{3},\frac{3}{4}\right]$　　　D. $\left(0,\frac{5}{12}\right)$

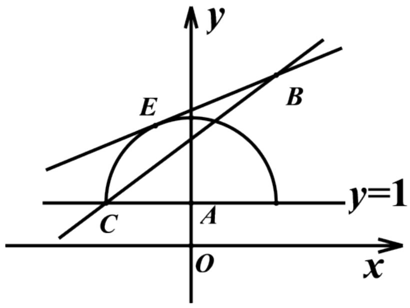
【答案】A

【解析】

【分析】曲线 $y=1+\sqrt{4-x^2}$ 即 $x^2+(y-1)^2=4$，$(y\geq 1)$，表示以 $A(0,1)$ 为圆心，以 2 为半径的圆位于直线 $y=1$ 上方的部分（包含圆与直线 $y=1$ 的交点 C 和 D），是一个半圆，如图直线 $y=k(x-2)+4$ 过定点 $B(2,4)$，要有 2 个交点，直线要在 BC，BE

之间，求出两直的斜率可得结果

【详解】解：曲线 $y=1+\sqrt{4-x^2}$ 即 $x^2+(y-1)^2=4$，$(y\geq1)$，表示以 $A(0,1)$ 为圆心，以 2 为半径的圆位于直线 $y=1$ 上方的部分（包含圆与直线 $y=1$ 的交点 C 和 D），是一个半圆，如图：



直线 $y=k(x-2)+4$ 过定点 $B(2,4)$，设半圆的切线 BE 的切点为 E，

则 BC 的斜率为 $k_{BC}=\dfrac{4-1}{2+2}=\dfrac{3}{4}$.

设切线 BE 的斜率为 k'，$k'>0$，则切线 BE 的方程为 $y-4=k'(x-2)$，根据圆心 A 到线 BE 距离等于半径得

$2=\dfrac{\left|0-1+4-2k'\right|}{\sqrt{1+k'^2}}$，$k'=\dfrac{5}{12}$，

由题意可得 $k'<k\leq k_{BC}$，$\therefore\dfrac{5}{12}<k\leq\dfrac{3}{4}$，

故选：A．

二、多选题（本大题共 4 小题，共 20.0 分．在每小题有多项符合题目要求）

9. 下列说法正确的是（　　）

A. 任意一条直线都有倾斜角，但不一定有斜率

B. 点 $(0,2)$ 关于直线 $y=x+1$ 的对称点为 $(1,1)$

C. 经过点 $(1,1)$ 且在 x 轴和 y 轴上截距都相等的直线方程为 $x+y-2=0$

D. 直线 $x-y-2=0$ 与两坐标轴围成的三角形的面积是 2

【答案】ABD

【解析】

【分析】A 选项，利用斜率定义可知，当倾斜角为 90°时，斜率不存在；B 选项求解点关于直线的对称点，满足两点的斜率与 $y=x+1$ 乘积为-1，中点在已知直线 $y=x+1$ 上，进而求出对称点；C 选项要考虑截距均为 0 的情况，D 选项求出与坐标轴的交点坐标，进而求出围成的三角形的面积.

【详解】当倾斜角为 90°时，斜率不存在，故 A 选项正确；设 $(0,2)$ 关于直线 $y=x+1$ 的对称点为 (m,n)，则满足 $\begin{cases}\dfrac{n-2}{m}=-1\\ \dfrac{n+2}{2}=\dfrac{m}{2}+1\end{cases}$，解得：$\begin{cases}m=1\\ n=1\end{cases}$，故点 $(0,2)$ 关于直线 $y=x+1$ 的对称点为 $(1,1)$，B 正确；当在 x 轴和 y 轴上截距都等于 0 时，此时直线为 $y=x$，故 C 错误；直线 $x-y-2=0$ 与两坐标轴的交点坐标为 $(2,0)$ 与 $(0,-2)$，故与两坐标轴围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$，D 正确

故选：ABD

10. 甲、乙两人练习射击，命中目标的概率分别为 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$，甲、乙两人各射击一次，下列说法正确的是（　　）

A. 目标恰好被命中一次的概率为 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

B. 目标恰好被命中两次的概率为 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$

C. 目标被命中的概率为 $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$

D. 目标被命中的概率为 $1-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}$

【答案】BD

【解析】

【分析】利用独立事件的概率乘法公式和互斥事件、对立事件的概率公式可判断各选项的正误.

【详解】甲、乙两人练习射击，命中目标的概率分别为 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$，甲、乙两人各射击一次，

在 A 中，目标恰好被命中一次的概率为 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$，故 A 错误；

在 B 中，由相互独立事件概率乘法公式得：目标恰好被命中两次的概率为$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，故 B 正确；

在 CD 中，目标被命中的概率为$1-\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$，故 C 错误，D 正确.

故选：BD.

11. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，下列说法正确的（　　）

A. 若$S_n=n^2+1$，则$\{a_n\}$是等差数列

B. 若$S_n=3^n-1$，则$\{a_n\}$是等比数列

C. 若$\{a_n\}$是等差数列，则$S_9=9a_5$

D. 若$\{a_n\}$是等比数列，且$a_1>0,q>0$，则$S_1\cdot S_3>S_2^2$

【答案】BC

【解析】

【分析】对于 A，求出a_1，a_2，a_3即可判断；

对于 B，利用$a_n=S_n-S_{n-1}$求出通项公式，再验证是否满足$a_1=2$，即可判断；

对于 C，根据等差数列的求和公式即可判断；

对于 D，当$q=1$时，可得$S_1\cdot S_3-S_2^2=-a_1^2<0$，即可判断.

【详解】解：对于 A，若$S_n=n^2+1$，则$a_1=S_1=2$，$a_2=S_2-S_1=3$，$a_3=S_3-S_2=5$，

则$\{a_n\}$不是等差数列，A 错误；

对于 B，若$S_n=3^n-1$，则$a_1=S_1=2$，当$n\geq 2$时，

$a_n=S_n-S_{n-1}=3^n-1-(3^{n-1}-1)=2\times 3^{n-1}$，满足$a_1=2$，

所以$a_n=2\times 3^{n-1}$，则$\{a_n\}$是等比数列，B 正确；

对于 C，$\{a_n\}$是等差数列，则$S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=9a_5$，C 正确；

对于 D，若$\{a_n\}$是等比数列，当$q=1$时，则$S_1\cdot S_3-S_2^2=3a_1^2-4a_1^2=-a_1^2<0$，D 错误.

故选：BC.

12. 已知圆 $M: x^2+(y-2)^2=1$，点 P 为 x 轴上一个动点，过点 P 作圆 M 的两条切线，切点分别为 A，B，直线 AB 与 MP 交于点 C，则下列结论正确的是（　　）

A. 四边形 $PAMB$ 周长的最小值为 $2+\sqrt{3}$

B. $|AB|$ 的最大值为 2

C. 若 $P(1,0)$，则三角形 PAB 的面积为 $\frac{8}{5}$

D. 若 $Q(\frac{\sqrt{15}}{4},0)$，则 $|CQ|$ 的最大值为 $\frac{9}{4}$

【答案】CD

【解析】

【分析】首先设 $|MP|=t$，

对于选项 A，根据题意，表达四边形 $PAMB$ 周长关于 t 的函数，由 t 的取值范围求函数的最小值可判断 A 错误；

对于选项 B，根据等面积法，求出 $|AB|$ 关于 t 的函数关系，由 t 的取值范围求函数的最大值可判断 B 错误；

对于选项 C，根据题意，计算 $\triangledown PAB$ 的底和高，求出面积判断 C 正确；

对于选项 D，设动点 $P(m,0)$，求出切线 AB 的方程与直线 PM 的方程，二者联立消去 m 得到二者交点 C 的轨迹是圆，$|CQ|$ 的最大值为圆心 O_1 与 Q 距离加半径，可判断 D 正确.

【详解】对于选项 A，设 $|MP|=t$，则 $|BP|=|AP|=\sqrt{|MP|^2-|MA|^2}=\sqrt{t^2-1}$，

则四边形 $PAMB$ 周长为 $2\sqrt{t^2-1}+2$，则当 t 最小时周长最小，又 t 最小值为 2，

所以四边形 $PABM$ 周长最小为 $2\sqrt{3}+2$，故 A 错误；

对于选项 B，$S_{四边形PAMB}=2S_{\triangle MAP}=\frac{1}{2}|MP||AB|$，即 $2\times\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{t^2-1}=\frac{1}{2}t|AB|$，

所以 $|AB|=\frac{2\sqrt{t^2-1}}{t}=2\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}$，因为 $t\ldots 2$，所以 $|AB|\in\left[\sqrt{3},2\right)$，故 B 错误；

对于选项 C，因为 $P(1,0)$，所以 $|MP|=\sqrt{5}$，即 $t=\sqrt{5}$，所以 $|AB|=2\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$，

$|AC|=\frac{1}{2}|AB|=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$|AP|=\sqrt{t^2-1}=2$，$|PC|=\sqrt{AP^2-AC^2}=\frac{4}{\sqrt{5}}$，

所以三角形 PAB 的面积为 $\frac{1}{2}|AB||PC|=\frac{8}{5}$，故 C 正确；

对于选项 D，设 $P(m,0)$， $A\left(x_1,y_1\right)$，则切线 PA 的方程为 $x_1x+\left(y_1-2\right)\left(y-2\right)=1$，

又因为直线 PA 过点 $P(m,0)$，代入可得 $x_1m+\left(y_1-2\right)\left(0-2\right)=1$ 化简得 $mx_1-2y_1+3=0$

设 $B\left(x_2,y_2\right)$，同理可得 $mx_2-2y_2+3=0$，

因此点 A,B 都过直线 $mx-2y+3=0$，即直线 AB 的方程为 $mx-2y+3=0$，

MP 的方程为 $y=-\frac{2}{m}x+2$，

二者联立得，$\begin{cases} y=-\frac{2}{m}x+2 & ① \\ mx-2y+3=0 & ② \end{cases}$，

由①式解出 $m=\frac{2x}{2-y}$，代入②式并化简得 $x^2+y^2-\frac{7}{2}y+3=0$，

配方得 $x^2+(y-\frac{7}{4})^2=\frac{1}{16}$， $y\neq 2$，

所以点 C 的轨迹是以 $(0,\frac{7}{4})$ 为圆心， $\frac{1}{4}$ 为半径的圆，

设其圆心为 O_1，所以 $|CQ|$ 的最大值为 $|O_1Q|+R=\sqrt{(\frac{\sqrt{15}}{4})^2+(\frac{7}{4})^2}+\frac{1}{4}=2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$，故 D 正确.

故选：CD.

【点睛】本题综合性较强，难度较大，具备运动变化的观点和函数思想是解题的关键，对于 AB 选项，设变量 $|MP|=t$，用 t 分别表达周长函数和距离函数求最值，对于 D 选项，设出动点 $P\left(m,0\right)$，分别表达直线 AB 和 MP 的方程，联立消去 m，得到动点 C 的轨迹，进一步求解答案.

三、填空题（本大题共 4 小题，共 20 分）

13. 对某班一次测验成绩进行统计，如下表所示：

分数段	$\left[40,50\right)$	$\left[50,60\right)$	$\left[60,70\right)$	$\left[70,80\right)$	$\left[80,90\right)$	$\left[90,100\right]$
频率	0.03	0.04	0.17	0.36	0.25	0.15

则该班成绩在$\left[80,100\right]$内的概率为_________.

【答案】0.4 ##$\frac{2}{5}$

【解析】

【分析】根据测验成绩进行统计表，即可求得成绩在$\left[80,100\right]$内的概率，得到答案.

【详解】根据测验成绩进行统计表，可得该班成绩在$\left[80,100\right]$内的概率为

$0.25+0.15=0.4$.

故答案为：0.4

14. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=3+2^n$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为___________.

【答案】$a_n=\{\begin{matrix}5,n=1\\2^{n-1},n\geq 2\end{matrix}$

【解析】

【详解】当$n=1$时，$a_1=S_1=3+2^1=5$；当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=3+2^n-\left(3+2^{n-1}\right)=2^{n-1}$；所以$a_n=\{\begin{matrix}5,n=1\\2^{n-1},n\geq 2\end{matrix}$.

15. 已知$a>0$，$b>0$，直线l_1：$\left(a-1\right)x+y-1=0$，l_2：$x+2by+1=0$，且$l_1\perp l_2$，则$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$的最小值为_________.

【答案】8

【解析】

【分析】根据两条直线的一般式方程及垂直关系，求出a，b满足的条件，再由基本不等式求出最小值即可.

【详解】因为$l_1\perp l_2$，所以$\left(a-1\right)\times 1+1\times 2b=0$，即$a+2b=1$，

因为$a>0$，$b>0$，所以

$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(a+2b\right)=2+2+\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}\geq 4+2\sqrt{\frac{4b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=8$，

当且仅当$\frac{4b}{a}=\frac{a}{b}$，即$a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{4}$时等号成立，