



## 第三节 函数的单调性与最值

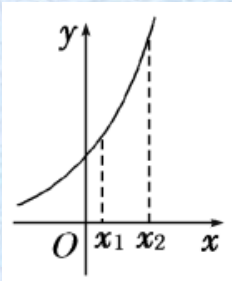
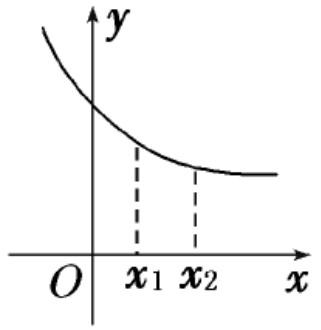
## [备考方向要明了]

考 什 么	怎 么 考
<p>1.了解函数的单调性、最大值、最小值及其几何意义.</p> <p>2.会利用函数的图象了解和研究函数的性质.</p>	<p>1.函数的单调性，是高考考察的重中之重，主要考察求函数的单调区间、利用函数的单调性比较函数值的大小、利用函数单调性求函数值域或最值、利用函数的单调性解不等式等有关问题，如2023年高考T3，T10.</p> <p>2.函数的最值问题是每年高考的必考内容，一般情况下，不会对最值问题单独命题，主要是结合其他知识综合在一起考察，主要考察求最值的基本措施，如2023年高考T19</p>

## 1. 函数的单调性 [归纳 知识整合]

(1) 单调函数的定义:

	增函数	减函数
	一般地, 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $A$ , 区间 $I \subseteq A$ . 假如对于区间 $I$ 内的任意两个值 $x_1, x_2$	
定义	当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$ , 那么就 说 $y = f(x)$ 在区间 $I$ 上是 单调增函数	当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$ , 那么就说 $y = f(x)$ 在区间 $I$ 上 是单调减函数

	增函数	减函数
图象描述	 <p>自左向右看图象是 <u>逐渐上升的</u></p>	 <p>自左向右看图象是 <u>逐渐下降的</u></p>

(2)假如函数 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 上是单调增函数或单调减函数，那么就说函数 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 上具有(严格的)单调性. 单调增区间和单调减区间统称为单调区间.

**[探究]** 1.函数  $y = \frac{1}{x}$  的单调递减区间为  $(-\infty, 0) \cup (0,$

$+\infty)$ , 这种表示法对吗?

**提醒:** 首先函数的单调区间只能用区间表达, 不能用集合或不等式的形式表达; 假如一种函数有多种单调区间应分别写, 分开表达, 不能用并集符号“ $\cup$ ”联结, 也不能用“或”联结.

2. 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上单调递增与函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[a, b]$ 含义相同吗?

提醒: 含义不同.  $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上单调递增并不能排除 $f(x)$ 在其他区间上单调递增, 而 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[a, b]$ 意味着 $f(x)$ 在其他区间上不可能单调递增.

## 2. 函数的最值

前提	设函数 $y=f(x)$ 的定义域为A	
条件	假如存在 $x_0 \in A$ , 使得对于任意的 $x \in A$ , 都有_____	假如存在 $x_0 \in A$ , 使得对于任意的 $x \in A$ , 都有 $f(x) \geq f(x_0)$
结论	称 $f(x_0)$ 为 $y=f(x)$ 的最大值, 记为 <del><math>f(x) \leq f(x_0)</math></del>	称 $f(x_0)$ 为 $y=f(x)$ 的最小值, 记为 $y_{\min} = f(x_0)$

$$y_{\max} = f(x_0)$$

**[探究]** 3.函数的单调性、最大(小)值反应在其

图象上有什么特征?

提醒: 函数的单调性反应在图象上是上升或下降的, 而最大(小)值反应在图象上为其最高(低)点的纵坐标的值.



[自测 牛刀小试]

1. (教材习题改编)函数  $f(x) = \frac{2}{x-1}$ ,  $x \in [2,6]$ , 则下列说法正确的有\_\_\_\_\_.

①函数  $f(x)$  为减函数; ②函数  $f(x)$  为增函数; ③函数  $f(x)$  的最大值为 2; ④函数  $f(x)$  的最小值为  $\frac{2}{5}$ .

解析: 易知函数  $f(x) = \frac{2}{x-1}$  在  $x \in [2,6]$  上为减函数, 故

$$f(x)_{\min} = f(6) = \frac{2}{5}, \quad f(x)_{\max} = f(2) = 2.$$

答案: ①③④

2. 函数  $y=(2k+1)x+b$  在  $(-\infty, +\infty)$  上是减函数, 则

\_\_\_\_\_.

解析: 使  $y=(2k+1)x+b$  在  $(-\infty, +\infty)$  上是减函数,

则  $2k+1<0$ , 即  $k<-\frac{1}{2}$ .

答案:  $k<-\frac{1}{2}$

3. 已知函数  $f(x)$  为  $\mathbf{R}$  上的减函数, 则满足  $f\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right) < f(1)$  的实数  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

解析:  $\because$  函数  $f(x)$  为  $\mathbf{R}$  上的减函数,

$$\text{且 } f\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right) < f(1),$$

$$\therefore \left|\frac{1}{x}\right| > 1, \text{ 即 } |x| < 1 \text{ 且 } |x| \neq 0.$$

$$\therefore x \in (-1, 0) \cup (0, 1).$$

答案:  $(-1, 0) \cup (0, 1)$

4. (教材习题改编)若函数  $f(x) = 4x^2 - kx - 8$  在  $[5, 20]$  上是单调递增函数, 则实数  $k$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

解析:  $\because$  函数  $f(x) = 4x^2 - kx - 8$  的对称轴为  $x = \frac{k}{8}$ ,

又函数  $f(x)$  在  $[5, 20]$  上为增函数,

$$\therefore \frac{k}{8} \leq 5, \text{ 即 } k \leq 40.$$

答案:  $(-\infty, 40]$

5. (2023·无锡调研) 已知函数  $y = \log_2(ax - 1)$  在  $(1, 2)$

上单

调递增, 则  $a$  的取值范围为

解析: 令  $m = ax - 1$ , 则函数  $y = \log_2(ax - 1)$  在  $(1, 2)$  上

单调递增等价于  $m = ax - 1$  在  $(1, 2)$  上单调递增, 且  $ax$

$-1 > 0$  在  $(1, 2)$  上恒成立, 所以  $\begin{cases} a > 0, \\ a - 1 \geq 0, \end{cases}$  即  $a \geq 1$ .

答案:  $[1, +\infty)$

## 考点一

## 函数单调性的判断或证明

**[例 1]** 已知函数  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - ax$ , 其中  $a > 0$ .

(1) 若  $2f(1) = f(-1)$ , 求  $a$  的值;

(2) 证明: 当  $a \geq 1$  时, 函数  $f(x)$  在区间  $[0, +\infty)$  上为单调减函数.

**[自主解答]** (1) 由  $2f(1) = f(-1)$ ,

可得  $2\sqrt{2} - 2a = \sqrt{2} + a$ , 得  $a = \frac{\sqrt{2}}{3}$ .

(2)证明：任取  $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ ，且  $x_1 < x_2$ ，

$$f(x_1) - f(x_2) = \sqrt{x_1^2 + 1} - ax_1 - \sqrt{x_2^2 + 1} + ax_2 = \sqrt{x_1^2 + 1} - \sqrt{x_2^2 + 1} - a(x_1 - x_2)$$

$$= \frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}} - a(x_1 - x_2)$$

$$= (x_1 - x_2) \left( \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}} - a \right).$$

$$\because 0 \leq x_1 < \sqrt{x_1^2 + 1}, \quad 0 < x_2 < \sqrt{x_2^2 + 1},$$

$$\therefore 0 < \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}} < 1.$$

$$\text{又} \because a \geq 1, \quad \therefore f(x_1) - f(x_2) > 0,$$

$\therefore f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递减.

## 互动探究

保持本例条件不变，若  $f(x)$  在区间  $[1, +\infty)$  上是增函数，求  $a$  的取值范围.

解：任取  $1 \leq x_1 < x_2$ ， $f(x_1) - f(x_2) =$

$$(x_1 - x_2) \left( \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}} - a \right),$$

$\because f(x)$  单调递增，所以  $f(x_1) - f(x_2) < 0$ .



又  $x_1 - x_2 < 0$ , 那么必须  $\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}} - a > 0$  恒成立.

$$\because 1 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1^2 \geq x_1^2 + 1, 2x_2^2 > x_2^2 + 1,$$

$$\therefore \sqrt{2x_1} \geq \sqrt{x_1^2 + 1}, \sqrt{2x_2} > \sqrt{x_2^2 + 1}.$$

相加得  $\sqrt{2}(x_1 + x_2) > \sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1} \Rightarrow$

$$\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}} > \frac{\sqrt{2}}{2}, \therefore 0 < a \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

## 判断或证明函数的单调性的两种方法

(1)利用定义的基本步骤是:

取值  $\Rightarrow$  作差(商)变形  $\Rightarrow$  确定符号  $\Rightarrow$  得出结论

(2)利用导数的基本步骤是:

求导函数  $\Rightarrow$  确定符号  $\Rightarrow$  得出结论

## 变式训练

1. 讨论函数  $f(x) = \frac{ax}{x^2-1}$  ( $a > 0$ ) 的单调性.

解: 由  $x^2-1 \neq 0$ , 得  $x \neq \pm 1$ , 即

定义域为  $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ .

① 当  $x \in (-1, 1)$  时, 设  $-1 < x_1 < x_2 < 1$ ,

$$\begin{aligned} \text{则 } f(x_1) - f(x_2) &= \frac{ax_1}{x_1^2-1} - \frac{ax_2}{x_2^2-1} \\ &= \frac{ax_1x_2^2 - ax_1 - ax_2x_1^2 + ax_2}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)} = \frac{a(x_2-x_1)(x_1x_2+1)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}. \end{aligned}$$

$$\because -1 < x_1 < x_2 < 1,$$

$$\therefore x_2 - x_1 > 0, \quad x_1x_2 + 1 > 0, \quad (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1) > 0.$$

又  $a > 0$ ,  $\therefore f(x_1) - f(x_2) > 0$ , 函数  $f(x)$  在  $(-1, 1)$  上为减函数.

② 设  $1 < x_1 < x_2$ , 则  $f(x_1) - f(x_2)$

$$= \frac{ax_1}{x_1^2 - 1} - \frac{ax_2}{x_2^2 - 1} = \frac{a(x_2 - x_1)(x_1x_2 + 1)}{(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)},$$

$\because 1 < x_1 < x_2, \therefore x_1^2 - 1 > 0, x_2^2 - 1 > 0,$

$x_2 - x_1 > 0, x_1x_2 + 1 > 0.$

$\therefore f(x_1) - f(x_2) > 0$ , 即  $f(x_1) > f(x_2)$ .

$\therefore f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上为减函数,

又函数  $f(x)$  是奇函数,

$\therefore f(x)$  在  $(-\infty, -1)$  上是减函数.

## 考点二

## 求函数的单调区间

**[例 2]** 求下列函数的单调区间.

(1)  $y = -x^2 + 2|x| + 3$ ;

(2)  $y = \log_2(x^2 - 1)$ .

**[自主解答]** (1)依题意, 可得

当  $x \geq 0$  时,  $y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4$ ;

当  $x < 0$  时,  $y = -x^2 - 2x + 3 = -(x+1)^2 + 4$ .

由二次函数的图象知,

函数  $y = -x^2 + 2|x| + 3$  在  $(-\infty, -1]$ ,  $[0, 1]$  上是增函数,  
在  $[-1, 0]$ ,  $[1, +\infty)$  上是减函数.

$$(2) \because y = \log_2(x^2 - 1),$$

$\therefore$  该函数的定义域为  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ .

又  $\because y = \log_2(x^2 - 1)$  可看作由  $y = \log_2\mu$  和  $\mu = x^2 - 1$  两个函数复合而成的, 且  $y = \log_2\mu$  在  $\mu \in (0, +\infty)$  上为增函数,

而  $\mu = x^2 - 1$  在  $(-\infty, -1)$  上为减函数且  $\mu > 0$ ,

在  $(1, +\infty)$  上为增函数且  $\mu > 0$ .

$\therefore$  当  $x \in (-\infty, -1)$  时,  $y = \log_2(x^2 - 1)$  为减函数,

当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $y = \log_2(x^2 - 1)$  为增函数.

---

## [方法·规律]

---

### 1. 求函数单调区间应注意的问题

函数的单调区间是函数定义域的子集或真子集，求函数的单调区间必须首先拟定函数的定义域，求函数的单调区间的运算应该在函数的定义域内进行。

---

---

[方法·规律]

---

## 2. 求复合函数 $y=f[g(x)]$ 的单调区间的环节

(1) 拟定定义域.

(2) 将复合函数分解成基本初等函数： $y=f(u)$ ， $u=g(x)$ .

(3) 分别拟定这两个函数的单调区间.

(4) 若这两个函数同增或同减，则 $y=f[g(x)]$ 为增函数；若一增一减，则 $y=f[g(x)]$ 为减函数，即“同增异减”.

---



## 变式训练

2. 求函数  $y = \sqrt{x^2 + x - 6}$  的单调区间.

解: 令  $u = x^2 + x - 6$ ,  $y = \sqrt{x^2 + x - 6}$  可以看作有  $y = \sqrt{u}$  与  $u = x^2 + x - 6$  的复合函数.

由  $u = x^2 + x - 6 \geq 0$ , 得  $x \leq -3$  或  $x \geq 2$ .

$\because u = x^2 + x - 6$  在  $(-\infty, -3]$  上是减函数,

在  $[2, +\infty)$  上是增函数, 而  $y = \sqrt{u}$  在  $(0, +\infty)$  上是增函数.

$\therefore y = \sqrt{x^2 + x - 6}$  的单调减区间为  $(-\infty, -3]$ , 单调增区间为  $[2, +\infty)$ .

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/057131200050006163>