第1章 质点振动

1.1 质点的自由振动

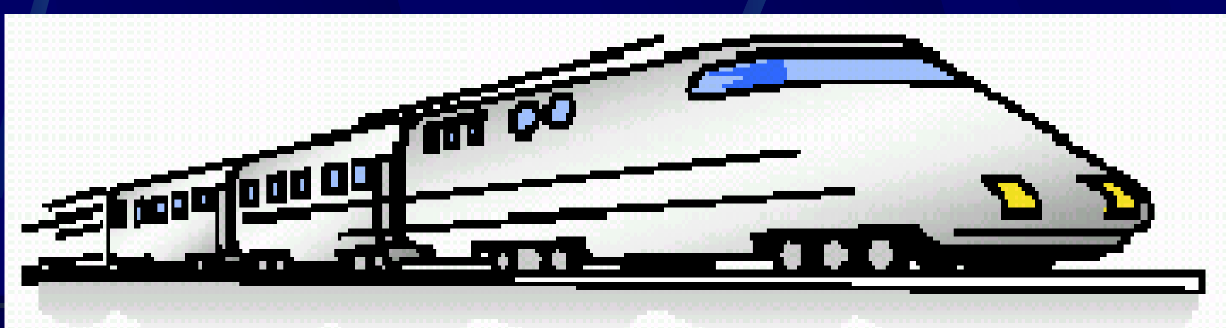
1.2 质点的衰减振动

1.3 质点的强迫振动

1.4 质点振动学的应用

在学习声学时，为什么需要先学振动知识?

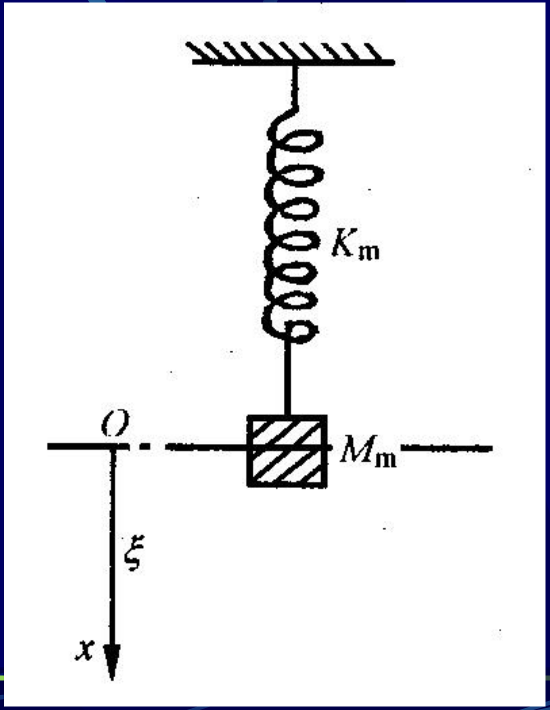
- ❑绝大部分声音来自结构振动
- ❑振动与声波均属于机械波,它们遵从相同的物理规律



1.1 质点的自由振动

当占有一定空间的振动系统的物理性质大致各点相同时，可用质点振动来近似。决定一个系统是不是质点振动系统，不是看它的绝对几何尺寸，而是看物体线度与振动传播波长的比值。

- 自由振动方程



振动系统元件

质量块M_m

弹簧（弹性系数或劲度系数K_m ）

系统受力分析：弹力 F_K

牛顿第二定律

$$M_m \frac{d^2\xi}{dt^2} = F_K$$

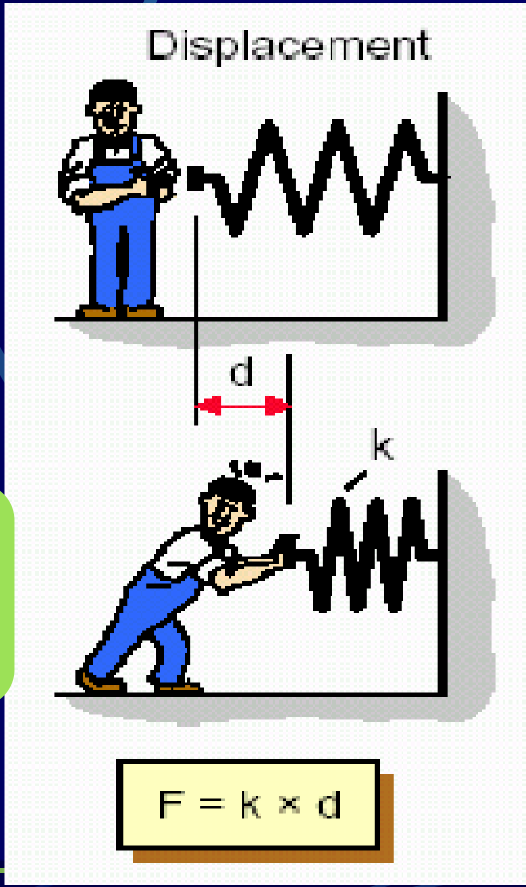
虎克定律：弹簧在弹性限度内

$$F_K = -K_m \xi$$

自由振动方程

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \omega_0^2 \xi = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_m}{M_m}}$$



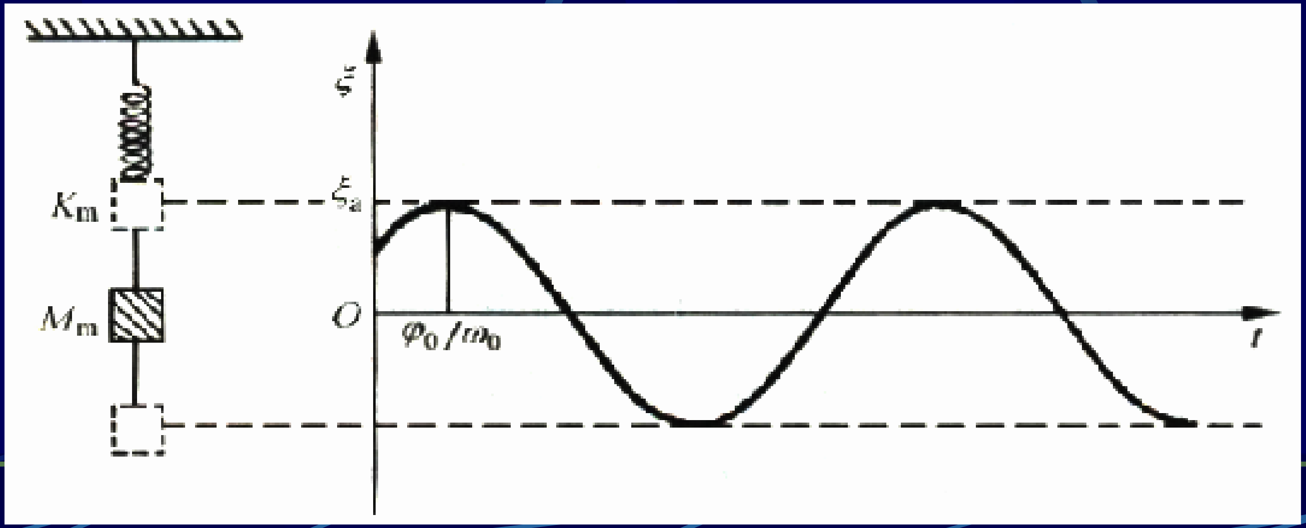
方程的解

$$\xi(t)=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t\equiv C\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$$

——振动称为简谐振动

有关物理参数：位移振幅：C; 圆频率：ω_0; 初相位：φ_0

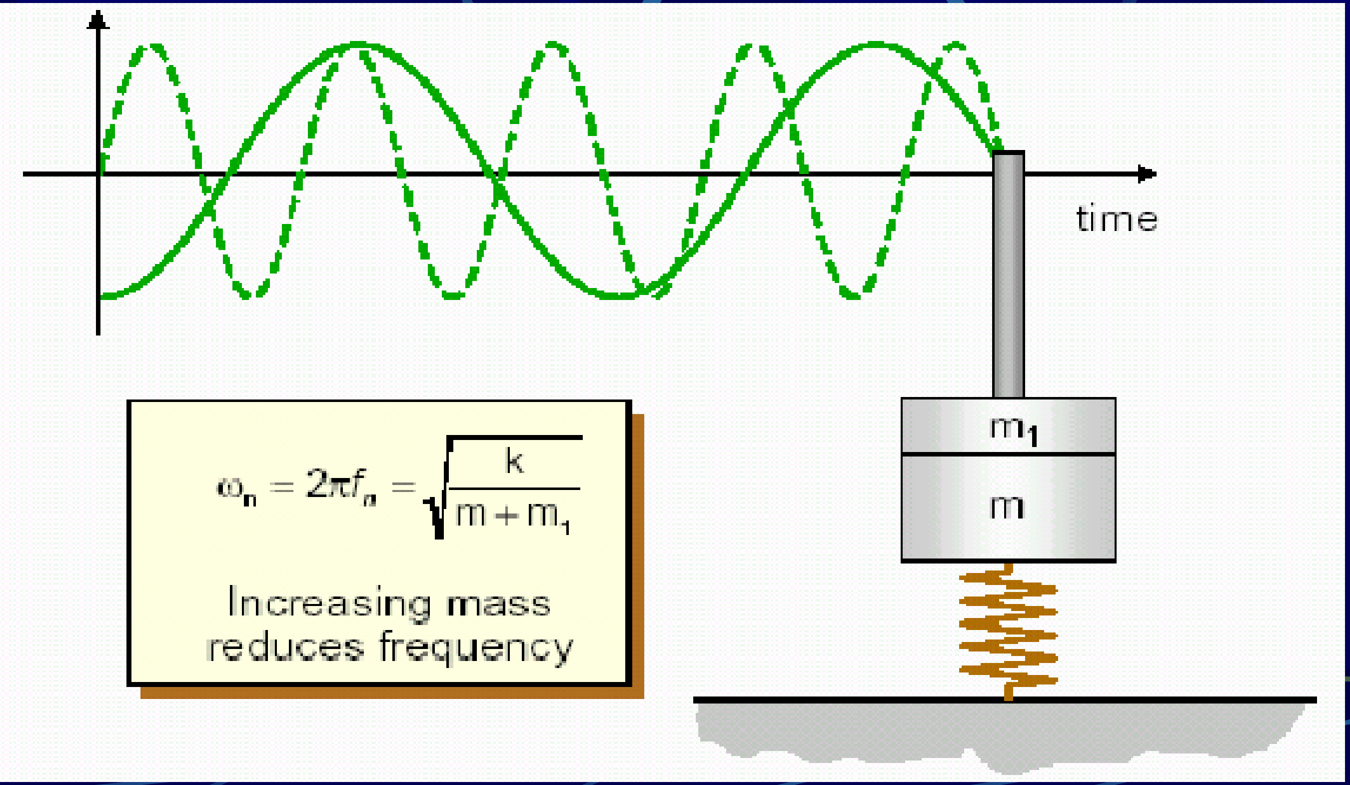
周期：$T=2\pi/\omega_0$; 频率：$f=1/T$



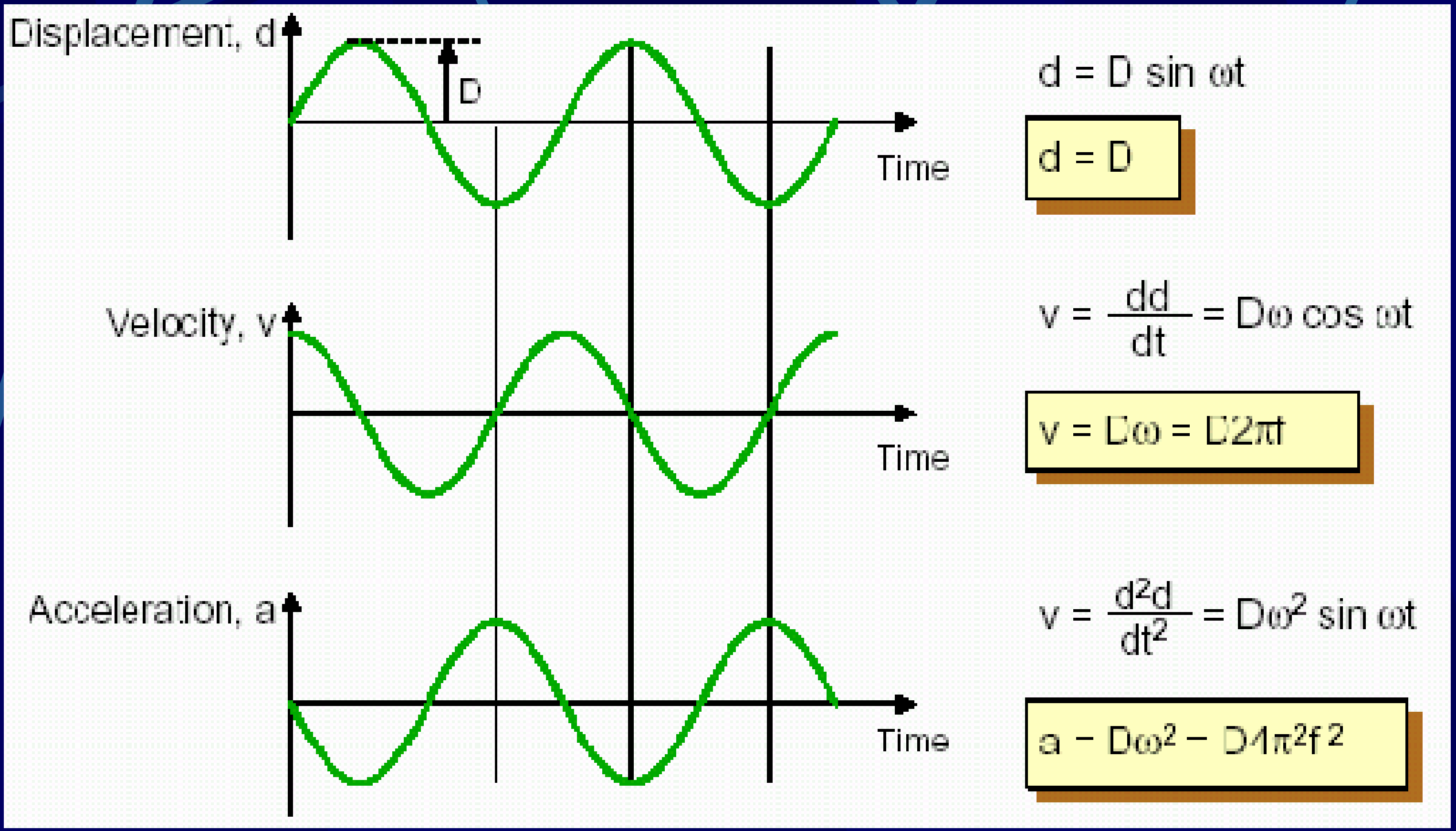
系统的固有频率

$$f=\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_m}{M_m}}$$

——影响固有频率的因素：劲度和质量



位移、速度、加速度的区别与联系



❑自由振动的能量

动能

$$E_k = \frac{1}{2} M_m v^2;$$

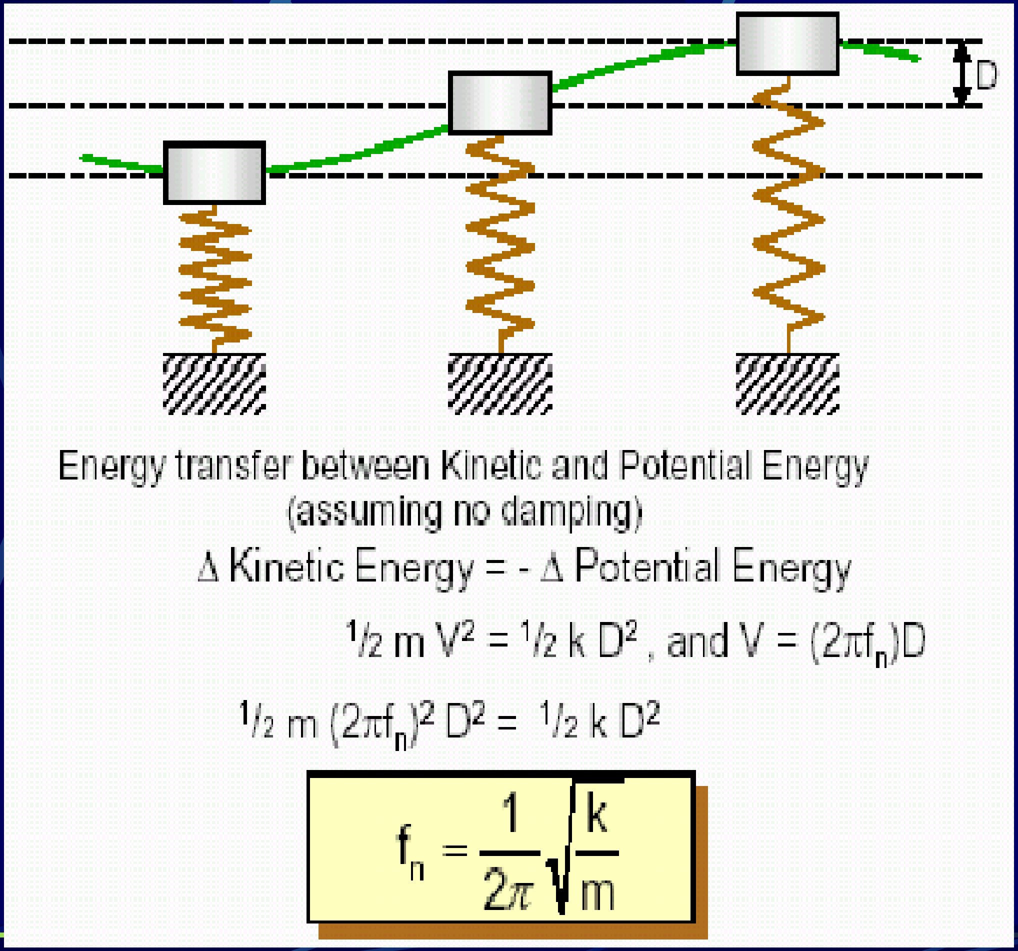
势能

$$E_p = \frac{1}{2} K_m \xi^2;$$

总的振动能

$$E_t = E_k + E_p$$

$$= \frac{1}{2} M_m v^2 + \frac{1}{2} K_m \xi^2$$



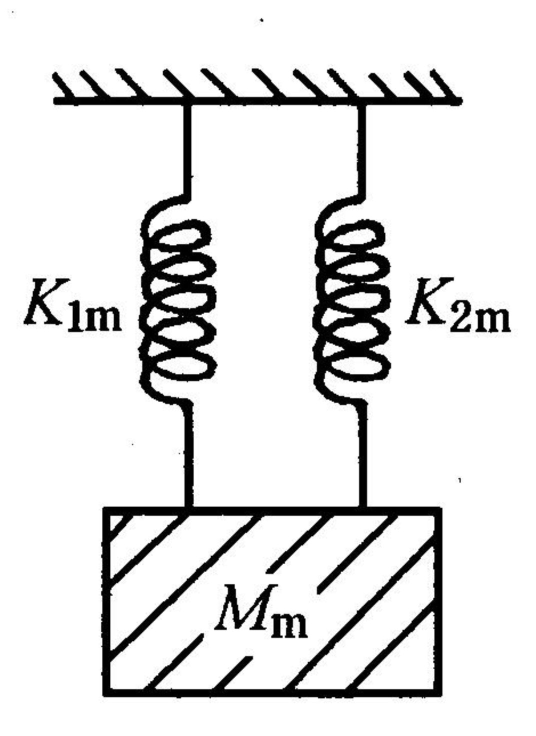
□弹簧的并联与串联

- 并联：二个弹簧的位移相等

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi$$

因此，运动方程为

$$M_m \frac{d^2\xi}{dt^2} = -K_{m1}\xi_1 - K_{m2}\xi_2$$
$$= -(K_{m1} + K_{m2})\xi \equiv -K_m\xi$$



$$K_m = K_{m1} + K_{m2}$$

——两根弹簧的并接使系统的弹性增大

- 串联：二个弹簧中的弹性力相等

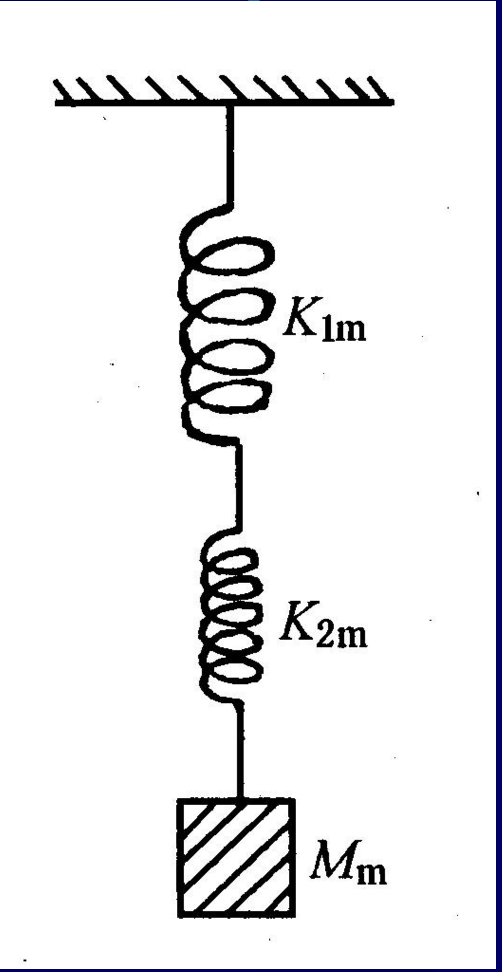
$$F_{K1}=-K_{m1}\xi_1=-K_{m2}\xi_2=F_{K2}$$

因此，运动方程为

$$M_m\frac{d^2\xi}{dt^2}=F_K=F_{K1}=F_{K2}$$

$$M_m\frac{d^2\xi}{dt^2}=-K_{m1}\xi_1;M_m\frac{d^2\xi}{dt^2}=-K_{m2}\xi_2$$

$$\frac{M_m}{K_{m1}}\frac{d^2\xi}{dt^2}=-\xi_1;\frac{M_m}{K_{m2}}\frac{d^2\xi}{dt^2}=-\xi_2$$



二式相加，并且注意到 $\xi = \xi_1 + \xi_2$

$$M_m\left(\frac{1}{K_{m1}} + \frac{1}{K_{m2}}\right)\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\xi \quad \Rightarrow \quad \frac{M_m}{K_m}\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\xi$$

因此，等效劲度系数满足

$$\frac{1}{K_m} = \frac{1}{K_{m1}} + \frac{1}{K_{m2}} \quad \Rightarrow \quad K_m = \frac{K_{m1}K_{m2}}{K_{m1} + K_{m2}}$$

——两根弹簧的串联使系统的弹性减小

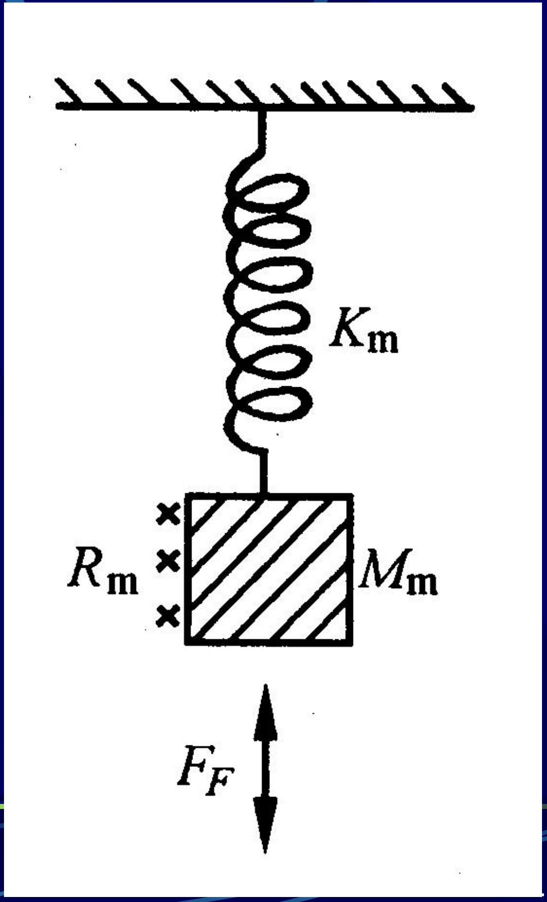
1.2 质点的衰减振动

任何实际的机械系统在作自由振动时都会出现逐渐 衰减的过程，亦即系统在 振动时始终会受到阻尼力的作用

- 阻力的性质

（1）一般来说阻力应是速度的函数；

（2）我们限于讨论小振动，可以认为阻力与速度成线性关系。



振动系统中的阻力为

$$F_R = -R_m \frac{d\xi}{dt}$$

——R_m称为阻力系数或力阻

运动方程

$$M_m \frac{d^2\xi}{dt^2} + R_m \frac{d\xi}{dt} + K_m \xi = 0$$

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\delta \frac{d\xi}{dt} + \omega_0^2 \xi = 0$$

$$\delta = \frac{R_m}{2M_m}$$

——衰减系数

❑衰减振动的一般规律

设二阶齐次常微分方程的解为

$$\xi = \xi_0 \exp(i\gamma t)$$

$$(-\gamma^2 + 2i\delta\gamma + \omega_0^2)\xi_0 \exp(i\gamma t) = 0$$

$$\gamma^2 - 2i\delta\gamma - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \gamma = i\delta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

如果 $\delta > \omega_0$ $\quad \gamma_\pm = i(\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})$

$$\xi_\pm = \xi_{0\pm} \exp\left[-(\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t\right]$$

——非振动情况！

假定 $\omega_0 > \delta$

$$\omega_0' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$$\xi = \left[\xi_{0+} \exp(i\omega_0' t) + \xi_{0-} \exp(-i\omega_0' t)\right] e^{-\delta t}$$

实数形式

$$\xi = A e^{-\delta t} \cos(\omega_0' t - \varphi_0)$$

分析：

（1） 衰减模量：振动位移振幅衰减到初始值的1/e倍的时间

$$\tau = \delta^{-1} = \frac{2M_m}{R_m}$$

（2）小阻尼对振动频率的影响：

$$\omega_0' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0\sqrt{1-\frac{\delta^2}{\omega_0^2}} \approx \omega_0\left(1-\frac{\delta^2}{\omega_0^2}\right)$$

如果: $\delta \ll \omega_0$

$$\omega_0' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0\sqrt{1-\frac{\delta^2}{\omega_0^2}} \approx \omega_0$$

——小阻尼对振动频率的影响很小!

（3）小阻尼对振动幅度的影响：相隔一个周期的相邻两次振动振幅的比值

$$\eta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{\xi_0 e^{-\delta t}}{\xi_0 e^{-\delta(t+T)}} = e^{\delta T}$$

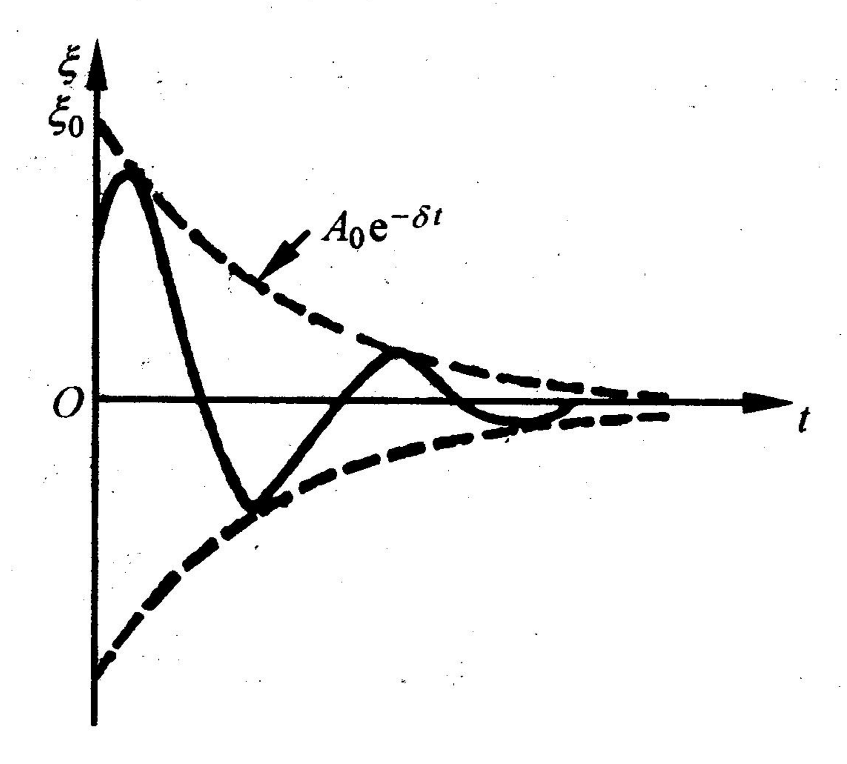
例:

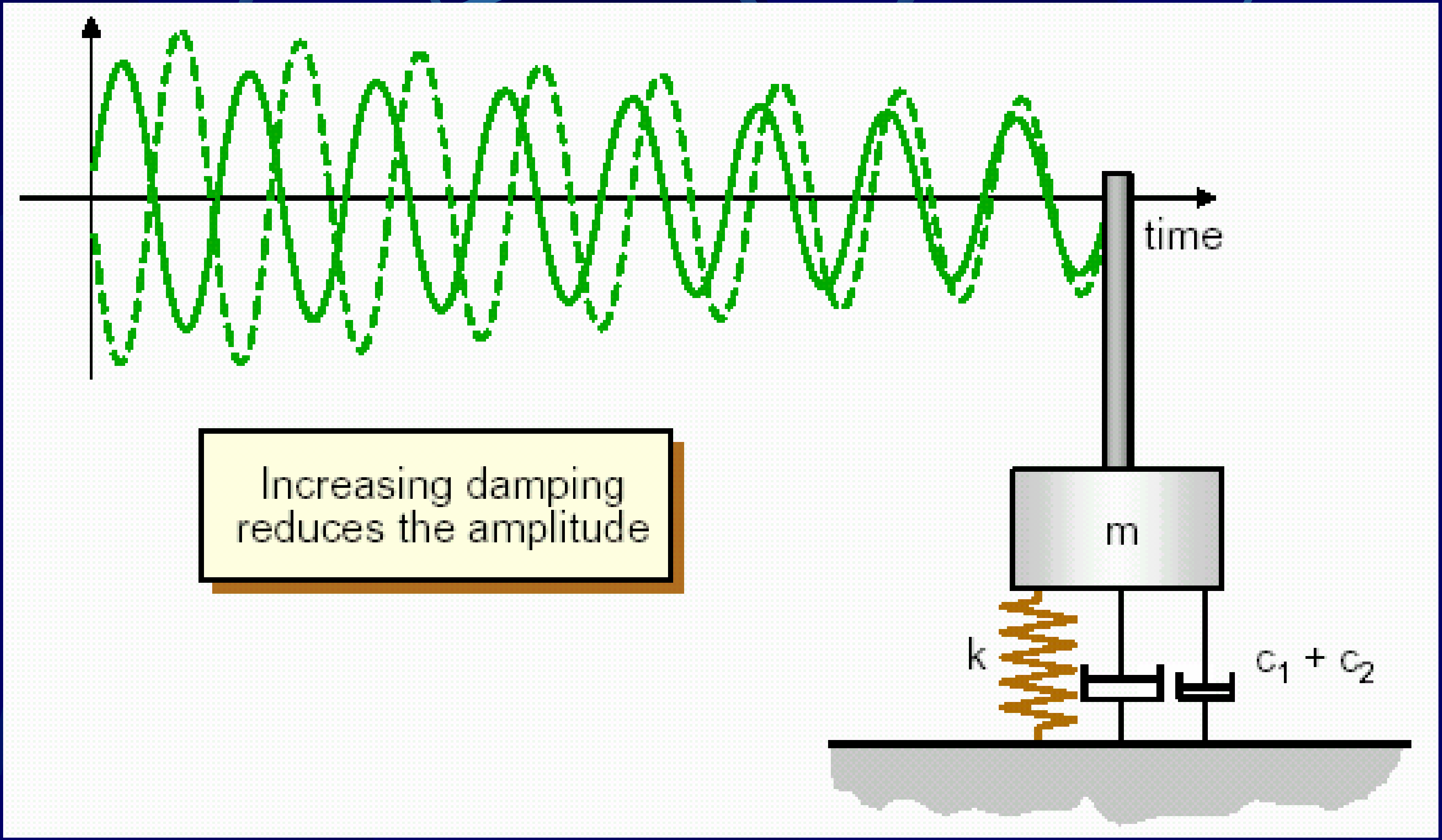
$$\frac{\delta}{\omega_0} = 0.05 \ll 1 \Rightarrow \omega_0' = \omega_0\sqrt{1-\frac{\delta^2}{\omega_0^2}} \approx \omega_0$$

$$\eta = e^{\delta T} e^{2\pi\delta/\omega_0} = e^{0.1\pi} \approx 1.3$$

——可见，振幅的衰减却很快!

振幅的衰减以几何级数规律进行 !




time
Increasing damping
reduces the amplitude
m
k
c1 + c2