

专题 09 指数与指数函数

【考点预测】

1.指数及指数运算

(1)根式的定义：

一般地，如果 $x^n = a$ ，那么 x 叫做 a 的 n 次方根，其中 $(n > 1, n \in \mathbb{N}^*)$ ，记为 $\sqrt[n]{a}$ ， n 称为根指数， a 称为根底数.

(2)根式的性质：

当 n 为奇数时，正数的 n 次方根是一个正数，负数的 n 次方根是一个负数.

当 n 为偶数时，正数的 n 次方根有两个，它们互为相反数.

(3)指数的概念：指数是幂运算 $a^n (a \neq 0)$ 中的一个参数， a 为底数， n 为指数，指数位于底数的右上角，幂运算表示指数个底数相乘.

(4)有理数指数幂的分类

①正整数指数幂 $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ 个 } a} (n \in \mathbb{N}^*)$ ；②零指数幂 $a^0 = 1 (a \neq 0)$ ；

③负整数指数幂 $a^{-n} = \frac{1}{a^n} (a \neq 0, n \in \mathbb{N}^*)$ ；④0 的正分数指数幂等于 0，0 的负分数指数幂没有意义.

(5)有理数指数幂的性质

① $a^m a^n = a^{m+n} (a > 0, m, n \in \mathbb{Q})$ ；② $(a^m)^n = a^{mn} (a > 0, m, n \in \mathbb{Q})$ ；

③ $(ab)^m = a^m b^m (a > 0, b > 0, m \in \mathbb{Q})$ ；④ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} (a > 0, m, n \in \mathbb{Q})$.

2.指数函数

$y = a^x$		
	$0 < a < 1$	$a > 1$
图 象		
性 质	①定义域 \mathbb{R} ，值域 $(0, +\infty)$	
	② $a^0 = 1$ ，即时 $x = 0$ ， $y = 1$ ，图象都经过 $(0, 1)$ 点	
	③ $a^x = a$ ，即 $x = 1$ 时， y 等于底数 a	
	④在定义域上是单调减函数	在定义域上是单调增函数

- A. $(-\infty, -2]$ B. $(-\infty, -1]$ C. $[-2, 0) \cup (0, 2)$ D. $[-2, 0) \cup (2, +\infty)$

例 5. (2023·全国·高三专题练习) 化简:

$$(1) (\sqrt[3]{2} \times \sqrt{3})^6 + (-2018)^0 - 4 \times \left(\frac{16}{49}\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt[4]{(3-\pi)^4}$$

$$(2) \frac{\sqrt{a^3 b^2} \sqrt[3]{ab^2}}{\left(\sqrt[4]{ab^{\frac{1}{2}}}\right)^4 a^{-\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}} (a > 0, b > 0).$$

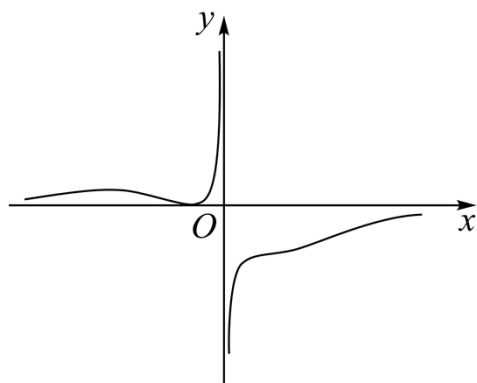
$$(3) \frac{a^{\frac{3}{2}} - 1}{a + a^{\frac{1}{2}} + 1} - \frac{a + a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + 1} + \frac{a - 1}{a^{\frac{1}{2}} - 1}.$$

【方法技巧与总结】

利用指数的运算性质解题. 对于形如 $a^{f(x)} = b$, $a^{f(x)} > b$, $a^{f(x)} < b$ 的形式常用“化同底”转化, 再利用指数函数单调性解决; 或用“取对数”的方法求解. 形如 $a^{2x} + Ba^x + C = 0$ 或 $a^{2x} + Ba^x + C \dots 0$ ($a > 0$) 的形式, 可借助换元法转化二次方程或二次不等式求解.

题型二: 指数函数的图像及性质

例 6. (2023·浙江绍兴·模拟预测) 函数 $f(x) = \frac{(x+m)^2}{a^x - a^{-x}}$, 的图象如图所示, 则 ()



- A. $m < 0, 0 < a < 1$ B. $m < 0, a > 1$ C. $m > 0, 0 < a < 1$ D. $m > 0, a > 1$

例 7. (2023·全国·高三专题练习) 函数 $f(x) = |2^x - 1| - m$ 恰有一个零点, 则 m 的取值范围是 ()

- A. $(1, +\infty)$ B. $\{0\} \cup (1, +\infty)$ C. $\{0\} \cup [1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

例 8. (2023·四川省泸县第二中学模拟预测 (文)) 函数 $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$, 下列关于函数 $f(x)$ 的说法错误的是

()

- A. 函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称
B. 函数 $f(x)$ 的值域为 $(0, 1)$
C. 不等式 $f(x) > \frac{1}{2}$ 的解集是 $(0, +\infty)$
D. $f(x)$ 是增函数

例 9. (2023·河南·三模 (文)) 已知 $f(x-1)$ 为定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, $f(1)=0$, 且 $f(x)$ 在 $[-1, 0)$ 上单调递增, 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 则不等式 $f(2^x - 5) < 0$ 的解集为 ()

- A. $(2, \log_2 6)$ B. $(-\infty, 1) \cup (2, \log_2 6)$
C. $(\log_2 6, +\infty)$ D. $(1, 2) \cup (\log_2 6, +\infty)$

例 10. (2023·新疆阿勒泰·三模 (理)) 函数 $y = a^{x-1} + 1$ 图象过定点 A, 点 A 在直线 $mx + ny = 3$ ($m > 1, n > 0$) 上, 则 $\frac{1}{m-1} + \frac{2}{n}$ 最小值为_____.

例 11. (2023·北京·高三专题练习) 已知 $f(x) = 2^{2x} + 2^{x+1} - a2^x + 1$ (其中 $a \in \mathbf{R}$ 且 a 为常数) 有两个零点, 则实数 a 的取值范围是_____.

例 12. (2023·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x) = 2^x + k \cdot 2^{-x}$ (k 为常数, $k \in \mathbf{R}$) 是 \mathbf{R} 上的奇函数.

(1) 求实数 k 的值;

(2) 若函数 $y = f(x)$ 在区间 $[1, m]$ 上的值域为 $\left[n, \frac{15}{4}\right]$, 求 $m+n$ 的值.

【方法技巧与总结】

解决指数函数有关问题, 思路是从它们的图像与性质考虑, 按照数形结合的思路分析, 从图像与性质找到解题的突破口, 但要注意底数对问题的影响.

题型三：指数函数中的恒成立问题

例 13. (2023·北京·高三专题练习) 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 且当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = 2^{-x}$, 若对任意的 $x \in [m, m+1]$, 不等式 $f(x) \geq f^2(x-m)$ 恒成立, 则正数 m 的取值范围为 ()

- A. $m \geq 1$ B. $m > 1$ C. $0 < m < 1$ D. $0 < m \leq 1$

例 14. (2023·北京·高三专题练习) 已知函数 $f(x) = 3^x - 3^{-x}$.

(1) 利用函数单调性的定义证明 $f(x)$ 是单调递增函数;

(2) 若对任意 $x \in [-1, 1]$, $[f(x)]^2 + mf(x) \geq -4$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

例 15. (2023·全国·高三专题练习 (文)) 已知函数 $f(x) = a - \frac{3}{2^x + 1}$ (a 为实常数).

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由;

(2) 当 $f(x)$ 为奇函数时, 对任意 $x \in [1, 6]$, 不等式 $f(x) \geq \frac{u}{2^x}$ 恒成立, 求实数 u 的最大值.

例 16. (2023·全国·高三专题练习 (文)) 已知函数 $f(x) = 4^x - a \cdot 2^{x+1} + 1$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $x \in [0, 2]$ 上有最大值 -8 , 求实数 a 的值;

(2) 若方程 $f(x) = 0$ 在 $x \in [-1, 2]$ 上有解, 求实数 a 的取值范围.

例 17. (2023·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x)=x^2$, $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-m$

- (1) 当 $x \in [-1, 3]$ 时, 求 $f(x)$ 的值域;
- (2) 若对 $\forall x \in [0, 2]$, $g(x) \leq 1$ 成立, 求实数 m 的取值范围;
- (3) 若对 $\forall x_1 \in [0, 2]$, $\exists x_2 \in [-1, 3]$, 使得 $g(x_1) \leq f(x_2)$ 成立, 求实数 m 的取值范围.

【方法技巧与总结】

已知不等式能恒成立求参数值(取值范围)问题常用的方法:

- (1) 函数法: 讨论参数范围, 借助函数单调性求解;
- (2) 分离参数法: 先将参数分离, 转化成求函数的值域或最值问题加以解决;
- (3) 数形结合法: 先对解析式变形, 进而构造两个函数, 然后在同一平面直角坐标系中画出函数的图象, 利用数形结合的方法求解.

题型四: 指数函数的综合问题

例 18. (2023·天津河西·二模) 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足: ① $f(2-x)+f(x)=0$; ②

$$f(x-2)-f(-x)=0; \text{ ③在 } [-1, 1] \text{ 上的解析式为 } f(x)=\begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} x, & x \in [-1, 0] \\ 1-x, & x \in (0, 1] \end{cases}, \text{ 则函数 } f(x) \text{ 与函数 } g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$$

的图象在区间 $[-3, 3]$ 上的交点个数为()

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

例 19. (2023·北京·二模) 若函数 $f(x)=\begin{cases} 2^x+3, & x \leq 0 \\ (x-2)^2, & 0 < x \leq a \end{cases}$ 的定义域和值域的交集为空集, 则正数 a 的取值

范围是()

- A. $(0, 1]$ B. $(0, 1)$
C. $(1, 4)$ D. $(2, 4)$

例 20. (2023·甘肃省武威第一中学模拟预测 (文)) 已知函数 $f(x)=\frac{4}{2^x+2}+\sin \pi x$, 则

$$f\left(\frac{1}{2022}\right)+f\left(\frac{2}{2022}\right)+\cdots+f\left(\frac{4043}{2022}\right)=\text{_____}.$$

例 21. (2023·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R , 满足 $f(x+1)=2f(x-1)$, 且当 $x \in (-1,1]$ 时, $f(x)=2^{x-1}$, 则 $f(2020)=$ _____.

例 22. (2023·辽宁·建平县实验中学模拟预测) 已知函数 $f(x)=\begin{cases} 10^{x-2}-10^{2-x}, & x \leq 2 \\ |x-3|-1, & x > 2 \end{cases}$, 则不等式

$f(x)+f(x-1)<0$ 的解集为_____.

例 23. (2023·江西·二模(文)) 设函数 $f(x)=\begin{cases} 2^{-|x-a|}, & x \leq 1 \\ -\frac{1}{2}x+1, & x > 1 \end{cases}$, 若 $f(1)$ 是函数 $f(x)$ 的最大值, 则实数 a 的取值范围为_____.

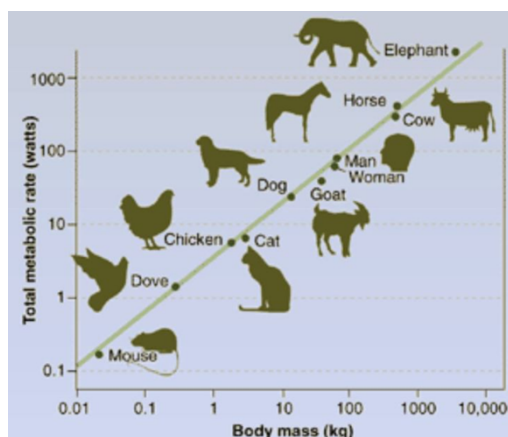
【过关测试】

一、单选题

1. (2023·北京通州·模拟预测) 已知函数 $f(x) = 3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x$, 则 $f(x)$ ()

- A. 是偶函数, 且在 \mathbf{R} 是单调递增
B. 是奇函数, 且在 \mathbf{R} 是单调递增
C. 是偶函数, 且在 \mathbf{R} 是单调递减
D. 是奇函数, 且在 \mathbf{R} 是单调递减

2. (2023·安徽淮南·二模(理)) 1947年, 生物学家 Max Kleiber 发表了一篇题为《body size and metabolic rate》的论文, 在论文中提出了一个克莱伯定律: 对于哺乳动物, 其基础代谢率与体重的 $\frac{3}{4}$ 次幂成正比, 即 $F = c_0 M^{\frac{3}{4}}$, 其中 F 为基础代谢率, M 为体重. 若某哺乳动物经过一段时间生长, 其体重为原来的 10 倍, 则基础代谢率为原来的 (参考数据: $\sqrt[4]{10} \approx 1.7783$) ()



- A. 5.4 倍
B. 5.5 倍
C. 5.6 倍
D. 5.7 倍

3. (2023·陕西·西安中学模拟预测(文)) 英国著名数学家布鲁克-泰勒以微积分学中将函数展开成无穷级数的定理著称于世. 在数学中, 泰勒级数用无限连加式来表示一个函数, 泰勒提出了适用于所有函数的泰勒级数, 并建立了如下指数函数公式: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$, 其中 $x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$, 则 \sqrt{e} 的近似值为 (精确到 0.01) ()

- A. 1.63
B. 1.64
C. 1.65
D. 1.66

4. (2023·河南洛阳·二模(文)) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 3^{x+1} - 1, & x \geq 1 \\ -\log_3(x+5) - 2, & x < 1 \end{cases}$, 且 $f(m) = -2$, 则 $f(6+m) =$ ()

- A. 26
B. 16
C. -16
D. -26

5. (2023·四川成都·三模(理)) 若函数 $f(x) = 9^x + \frac{\log_3 \sqrt{x-1}}{x^2 - x}$ 的零点为 x_0 , 则 $9^{x_0}(x_0 - 1) =$ ().

- A. $\frac{1}{3}$
B. 1
C. $\sqrt{3}$
D. 2

6. (2023·河南·开封高中模拟预测(文)) 若关于 x 的不等式 $a \cdot 2^{|x|} > 2^{|x|} + 1 (x \in \mathbf{R})$ 有实数解, 则实数 a

的取值范围是 ()

- A. $(1, +\infty)$ B. $(2, +\infty)$ C. $[1, +\infty)$ D. $[2, +\infty)$

7. (2023·四川·内江市教育科学研究所三模(理)) 已知函数 $f(x)$ 满足: 对任意 $x \in \mathbf{R}$,

$$f\left(x+\frac{1}{2}\right)=-f\left(x-\frac{1}{2}\right). \text{ 当 } x \in[-1,0) \text{ 时, } f(x)=3^x-1, \text{ 则 } f\left(\log_3 90\right)= ()$$

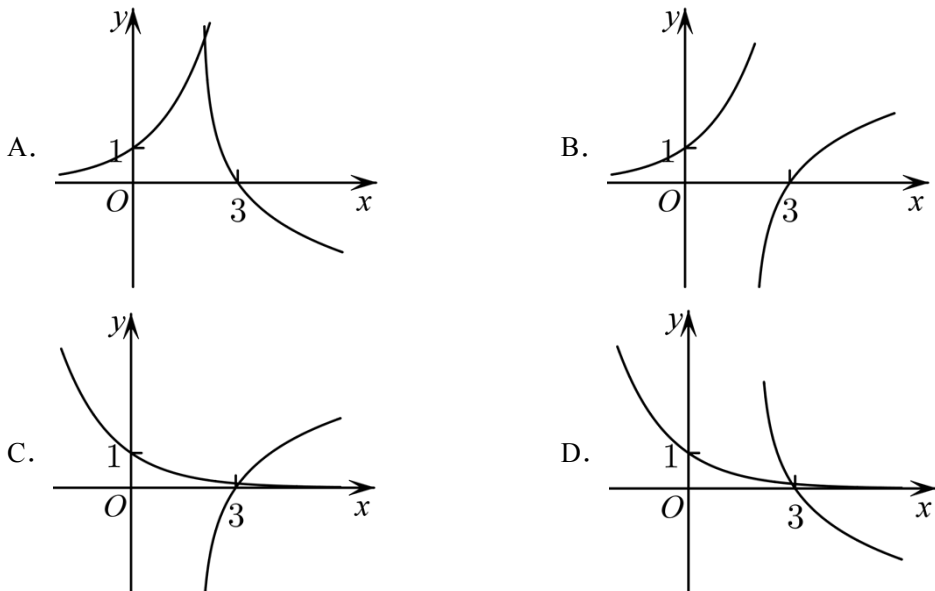
- A. $\frac{1}{9}$ B. $-\frac{1}{9}$ C. $\frac{17}{27}$ D. $-\frac{17}{27}$

8. (2023·上海宝山·二模) 关于函数 $f(x)=\left(2^x-\frac{1}{2^x}\right) \cdot x^{\frac{1}{3}}$ 和实数 m, n 的下列结论中正确的是 ()

- A. 若 $-3 < m < n$, 则 $f(m) < f(n)$ B. 若 $m < n < 0$, 则 $f(m) < f(n)$
C. 若 $f(m) < f(n)$, 则 $m^2 < n^2$ D. 若 $f(m) < f(n)$, 则 $m^3 < n^3$

二、多选题

9. (2023·湖南·模拟预测) 在同一直角坐标系中, 函数 $y=a^x$ 与 $y=\log_a(x-2)$ 的图象可能是 ()



10. (2023·全国·模拟预测) 已知 $a > b > 0$, 下列选项中正确的为 ()

- A. 若 $\sqrt{a}-\sqrt{b}=1$, 则 $a-b < 1$ B. 若 $a^2-b^2=1$, 则 $a-b < 1$
C. 若 $2^a-2^b=1$, 则 $a-b < 1$ D. 若 $\log_2 a-\log_2 b=1$, 则 $a-b < 1$

11. (2023·广东肇庆·模拟预测) 若 $a > b$, 则下列不等式中正确的有 ()

- A. $a-b > 0$ B. $2^a > 2^b$ C. $ac > bc$ D. $a^2 > b^2$

12. (2023·全国·模拟预测) 已知函数 $f(x)=\begin{cases} 4\sin \pi x, & 0 < x \leq 1 \\ 2^{x-1}+x, & x > 1 \end{cases}$, 若存在三个实数, 使得

$$f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=f\left(x_3\right), \text{ 则 } ()$$

- A. $x_1+x_2+x_3$ 的取值范围为 $(2,3)$ B. $x_2 f\left(x_3\right)$ 的取值范围为 $\left(\frac{5}{3}, 2\right)$

C. $x_1x_2x_3$ 的取值范围为 $\left(\frac{5}{36}, \frac{1}{2}\right)$

D. $x_1f(x_3)$ 的取值范围为 $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$

三、填空题

13. (2023·安徽淮北·一模(理)) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + 4^{\log_2 \sqrt{2}} + \log_{\sqrt{2}} 4 =$ _____.

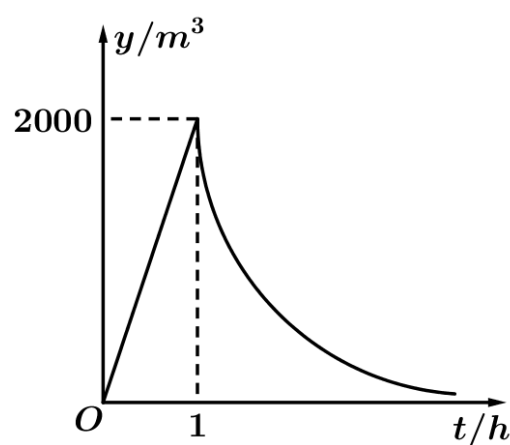
14. (2023·四川·模拟预测(理)) 已知两个条件: ① $a, b \in \mathbf{R}, f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$; ② $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减. 请写出一个同时满足以上两个条件的函数_____.

15. (2023·河南·模拟预测(文)) 函数 $f(x) = 4^x - 2^{x+1} + 3$ 在 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ 的值域为_____.

16. (2023·山西·二模(理)) 已知函数 $f(x) = \frac{x^3}{2^x - 2^{-x}}$ 给出下列结论: ① $f(x)$ 是偶函数; ② $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数; ③若 $t > 0$, 则点 $(t, f(t))$ 与原点连线的斜率恒为正. 其中正确结论的序号为_____.

四、解答题

17. (2023·全国·高三专题练习) 由于突发短时强降雨, 某小区地下车库流入大量雨水. 从雨水开始流入地下车库时进行监测, 已知雨水流入过程中, 地下车库积水量 y (单位: m^3) 与时间 t (单位: h) 成正比, 雨停后, 消防部门立即使用抽水机进行排水, 此时 y 与 t 的函数关系式为 $y = k \times \left(\frac{2}{5}\right)^t$ (k 为常数), 如图所示.



(1) 求 y 关于 t 的函数关系式;

(2) 已知该地下车库的面积为 2560 m^2 , 当积水深度小于等于 0.05 m 时, 小区居民方可入内, 那么从消防部门开始排水时算起, 至少需要经过几个小时以后, 小区居民才能进入地下车库?

18. (2023·全国·高三专题练习) (1) 计算: $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - (-9.6)^0 - \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$;

(2) 已知 $\frac{1}{a^2} + a^{-\frac{1}{2}} = 3$, 求 $\frac{a^2 + a^{-2} + 1}{a + a^{-1} + 2}$ 的值.

19. (2023·全国·高三专题练习) 已知 $a > 0$, 且 $a \neq 1$, 若函数 $y = |ax - 2|$ 与 $y = 3a$ 的图象有两个交点, 求实数 a 的取值范围.

20. (2023·全国·高三专题练习) 设函数 $f(x) = ka^x - a^{-x}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 是定义域为 R 的奇函数;

(1) 若 $f(1) > 0$, 判断 $f(x)$ 的单调性并求不等式 $f(x+2) + f(x-4) > 0$ 的解集;

(2) 若 $f(1) = \frac{3}{2}$, 且 $g(x) = a^{2x} + a^{-2x} - 4f(x)$, 求 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最小值.

21. (2023·北京·高三专题练习) 定义在 D 上的函数 $f(x)$, 如果满足: 对任意 $x \in D$, 存在常数 $M > 0$, 都有 $-M \leq f(x) \leq M$ 成立, 则称 $f(x)$ 是 D 上的有界函数, 其中 M 称为函数 $f(x)$ 的上界. 已知 $f(x) = 4^x + a \cdot 2^x - 2$.

(1) 当 $a = -2$ 时, 求函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的值域, 并判断函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是否为有界函数, 请说明理由;

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是以 2 为上界的有界函数, 求实数 a 的取值范围.

22. (2023·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x) = a^x + b^x$ ($a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$).

(1) 设 $a = 2, b = \frac{1}{2}$, 求方程 $f(x) = 2$ 的根;

(2) 设 $a = 2, b = \frac{1}{2}$, 若对任意 $x \in \mathbf{R}$, 不等式 $f(2x) \geq f(x) - 6m$ 恒成立, 求实数 m 的最大值;

(3) 若 $0 < a < 1, b > 1$, 函数 $g(x) = f(x) - 2$ 有且只有 1 个零点, 求 ab 的值.

关注有礼

学科网中小学资源库



扫码关注

可免费领取**180套**PPT教学模版

- ✦ 海量教育资源 一触即达
- ✦ 新鲜活动资讯 即时上线

专题 09 指数与指数函数

【考点预测】

1. 指数及指数运算

(1) 根式的定义:

一般地, 如果 $x^n = a$, 那么 x 叫做 a 的 n 次方根, 其中 ($n > 1, n \in N^*$), 记为 $\sqrt[n]{a}$, n 称为根指数, a 称为根底数.

(2) 根式的性质:

当 n 为奇数时, 正数的 n 次方根是一个正数, 负数的 n 次方根是一个负数.

当 n 为偶数时, 正数的 n 次方根有两个, 它们互为相反数.

(3) 指数的概念: 指数是幂运算 $a^n (a \neq 0)$ 中的一个参数, a 为底数, n 为指数, 指数位于底数的右上角, 幂运算表示指数个底数相乘.

(4) 有理数指数幂的分类

① 正整数指数幂 $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ 个 } a} (n \in N^*)$; ② 零指数幂 $a^0 = 1 (a \neq 0)$;

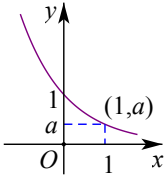
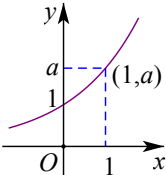
③ 负整数指数幂 $a^{-n} = \frac{1}{a^n} (a \neq 0, n \in N^*)$; ④ 0 的正分数指数幂等于 0, 0 的负分数指数幂没有意义.

(5) 有理数指数幂的性质

① $a^m a^n = a^{m+n} (a > 0, m, n \in Q)$; ② $(a^m)^n = a^{mn} (a > 0, m, n \in Q)$;

③ $(ab)^m = a^m b^m (a > 0, b > 0, m \in Q)$; ④ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} (a > 0, m, n \in Q)$.

2. 指数函数

$y = a^x$		
	$0 < a < 1$	$a > 1$
图 象		
	① 定义域 R , 值域 $(0, +\infty)$	

性质		
	② $a^0 = 1$ ，即时 $x = 0$ ， $y = 1$ ，图象都经过 $(0, 1)$ 点	
	③ $a^x = a$ ，即 $x = 1$ 时， y 等于底数 a	
	④ 在定义域上是单调减函数	在定义域上是单调增函数
	⑤ $x < 0$ 时， $a^x > 1$ ； $x > 0$ 时， $0 < a^x < 1$	$x < 0$ 时， $0 < a^x < 1$ ； $x > 0$ 时， $a^x > 1$
	⑥ 既不是奇函数，也不是偶函数	

【方法技巧与总结】

1. 指数函数常用技巧

(1) 当底数大小不定时，必须分“ $a > 1$ ”和“ $0 < a < 1$ ”两种情形讨论.

(2) 当 $0 < a < 1$ 时， $x \rightarrow +\infty$ ， $y \rightarrow 0$ ； a 的值越小，图象越靠近 y 轴，递减的速度越快.

当 $a > 1$ 时 $x \rightarrow +\infty$ ， $y \rightarrow 0$ ； a 的值越大，图象越靠近 y 轴，递增速度越快.

(3) 指数函数 $y = a^x$ 与 $y = (\frac{1}{a})^x$ 的图象关于 y 轴对称.

【题型归纳目录】

题型一：指数运算及指数方程、指数不等式

题型二：指数函数的图像及性质

题型三：指数函数中的恒成立问题

题型四：指数函数的综合问题

【典例例题】

题型一：指数运算及指数方程、指数不等式

例 1. (2023·四川凉山·三模(文)) 计算： $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} + e^{\ln 3} - (\sqrt{3} - 1)^0 + \lg 4 + \lg 0.25 = \underline{\hspace{2cm}}.$

答案：18

【解析】

分析：

根据指对数幂的计算公式求解即可

【详解】

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} + e^{\ln 3} - (\sqrt{3} - 1)^0 + \lg 4 + \lg 0.25 = 4^2 + 3 - 1 + \lg(4 \times 0.25) = 18$$

故答案为：18

例 2. (2023·河北邯郸·一模) 不等式 $10^x - 6^x - 3^x \geq 1$ 的解集为_____.

答案： $[1, +\infty)$

【解析】

分析：

将原不等式变为 $\left(\frac{1}{10}\right)^x + \left(\frac{6}{10}\right)^x + \left(\frac{3}{10}\right)^x \leq 1$ ，设 $f(x) = \left(\frac{1}{10}\right)^x + \left(\frac{6}{10}\right)^x + \left(\frac{3}{10}\right)^x$ ，然后利用函数的单调性解不等式.

【详解】

由 $10^x - 6^x - 3^x \geq 1$ ，可得 $\left(\frac{1}{10}\right)^x + \left(\frac{6}{10}\right)^x + \left(\frac{3}{10}\right)^x \leq 1$.

令 $f(x) = \left(\frac{1}{10}\right)^x + \left(\frac{6}{10}\right)^x + \left(\frac{3}{10}\right)^x$,

因为 $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x, y = \left(\frac{6}{10}\right)^x, y = \left(\frac{3}{10}\right)^x$ 均为 \mathbf{R} 上单调递减函数

则 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减，且 $f(1) = 1$,

$\therefore f(x) \leq f(1)$,

$\therefore x \geq 1$

故不等式 $10^x - 6^x - 3^x \geq 1$ 的解集为 $[1, +\infty)$.

故答案为： $[1, +\infty)$.

例 3. (2023·陕西·榆林市教育科学研究所模拟预测 (理)) 甲、乙两人解关于 x 的方程

$2^x + b \cdot 2^{-x} + c = 0$ ，甲写错了常数 b ，得到的根为 $x = -2$ 或 $x = \log_2 \frac{17}{4}$ ，乙写错了常数 c ，得到

的根为 $x = 0$ 或 $x = 1$ ，则原方程的根是 ()

A. $x = -2$ 或 $x = \log_2 3$

B. $x = -1$ 或 $x = 1$

C. $x = 0$ 或 $x = 2$

D. $x = -1$ 或 $x = 2$

答案：D

【解析】

分析：

令 $t = 2^x$ ，则方程 $2^x + b \cdot 2^{-x} + c = 0$ 可化为 $t^2 + ct + b = 0$ ，根据甲计算出常数 c ，根据乙计算出常数 b ，再将 b, c 代入关于 x 的方程 $2^x + b \cdot 2^{-x} + c = 0$ 解出 x 即可

【详解】

令 $t = 2^x$ ，则方程 $2^x + b \cdot 2^{-x} + c = 0$ 可化为 $t^2 + ct + b = 0$ ，甲写错了常数 b ，

所以 $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{17}{4}$ 是方程 $t^2 + ct + m = 0$ 的两根，所以 $c = -\left(\frac{1}{4} + \frac{17}{4}\right) = -\frac{9}{2}$ ，

乙写错了常数 c ，所以1和2是方程 $t^2 + nt + b = 0$ 的两根，所以 $b = 1 \times 2 = 2$ ，

则可得方程 $t^2 - \frac{9}{2}t + 2 = 0$ ，解得 $t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = 4$ ，

所以原方程的根是 $x = -1$ 或 $x = 2$

故选：D

例 4. (2023·全国·高三专题练习 (文)) 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数，当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = 4^x - 3 \times 2^x + 2a$ 。则关于 x 的不等式 $f(x) \leq -6$ 的解集为 ()

- A. $(-\infty, -2]$ B. $(-\infty, -1]$ C. $[-2, 0) \cup (0, 2)$ D. $[-2, 0) \cup (2, +\infty)$

答案：A

【解析】

分析：

由 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数求出 a 值，并求出 $x < 0$ 时，函数 $f(x)$ 的解析式，再分段讨论解不等式作答。

【详解】

因函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数，且当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = 4^x - 3 \times 2^x + 2a$ ，

则 $f(0) = 4^0 - 3 \times 2^0 + 2a = 2a - 2 = 0$ ，解得 $a = 1$ ，即当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = 4^x - 3 \times 2^x + 2$ ，

当 $x < 0$ 时， $-x > 0$ ，则 $f(x) = -f(-x) = -(4^{-x} - 3 \times 2^{-x} + 2)$ ，

而当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = (2^x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$ ，则当 $f(x) \leq -6$ 时， $\begin{cases} x < 0 \\ -(4^{-x} - 3 \times 2^{-x} + 2) \leq -6 \end{cases}$ ，即

$$\begin{cases} x < 0 \\ (2^{-x} - 4)(2^{-x} + 1) \geq 0 \end{cases}$$

变形得 $\begin{cases} x < 0 \\ 2^{-x} \geq 4 \end{cases}$ ，解得 $x \leq -2$ ，

所以不等式 $f(x) \leq -6$ 的解集为 $(-\infty, -2]$ 。

故选：A

例 5. (2023·全国·高三专题练习) 化简：

$$(1) (\sqrt[3]{2} \times \sqrt{3})^6 + (-2018)^0 - 4 \times \left(\frac{16}{49}\right)^{-\frac{1}{2}} + \sqrt[4]{(3-\pi)^4}$$

$$(2) \frac{\sqrt{a^3 b^2} \sqrt[3]{ab^2}}{\left(\sqrt[4]{ab^{\frac{1}{2}}}\right)^4 a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}} (a > 0, b > 0).$$

$$(3) \frac{a^{\frac{3}{2}} - 1}{a + a^{\frac{1}{2}} + 1} - \frac{a + a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + 1} + \frac{a - 1}{a^{\frac{1}{2}} - 1}.$$

答案：(1) $99+\pi$ ；(2) $\frac{a}{b}$ ；(3) $a^{\frac{1}{2}}$.

【解析】

分析：

(1) 根据指数幂的化简原则，计算整理，即可得答案.

(2) 根据指数幂的化简原则，计算整理，即可得答案.

(3) 根据指数幂的化简原则，结合立方差公式，通分计算，即可得答案.

【详解】

$$(1) \text{ 原式} = (\sqrt[3]{2})^6 \times (\sqrt{3})^6 + 1 - 4 \times \sqrt{\frac{49}{16}} + |3 - \pi| = 4 \times 27 + 1 - 7 + \pi - 3 = 99 + \pi$$

$$(2) \text{ 原式} = \frac{\left(a^3 b^2 a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{a b^2 a^{-\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}} = \frac{\left(a^{\frac{10}{3}} b^{\frac{8}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{7}{3}}} = \frac{a^{\frac{5}{3}} b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{7}{3}}} = \frac{a}{b}.$$

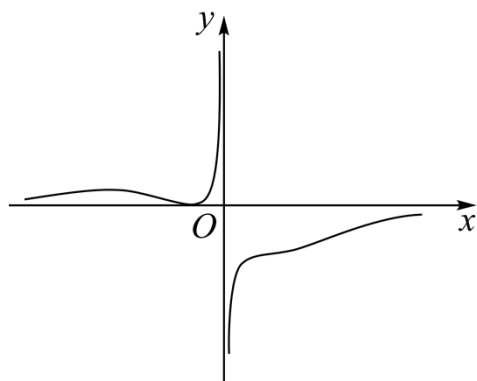
$$(3) \text{ 原式} = \frac{\left(a^{\frac{1}{2}} - 1\right) \cdot \left(a + a^{\frac{1}{2}} + 1\right)}{a + a^{\frac{1}{2}} + 1} - \frac{a^{\frac{3}{2}} - a + a - a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{1}{2}} - a + 1}{a - 1} = a^{\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1 - a}{a - 1} = a^{\frac{1}{2}}.$$

【方法技巧与总结】

利用指数的运算性质解题.对于形如 $a^{f(x)} = b$ ， $a^{f(x)} > b$ ， $a^{f(x)} < b$ 的形式常用“化同底”转化，再利用指数函数单调性解决；或用“取对数”的方法求解.形如 $a^{2x} + Ba^x + C = 0$ 或 $a^{2x} + Ba^x + C \dots 0$ (,, 0) 的形式，可借助换元法转化二次方程或二次不等式求解.

题型二：指数函数的图像及性质

例 6. (2023·浙江绍兴·模拟预测) 函数 $f(x) = \frac{(x+m)^2}{a^x - a^{-x}}$ ，的图象如图所示，则 ()



- A. $m < 0, 0 < a < 1$ B. $m < 0, a > 1$ C. $m > 0, 0 < a < 1$ D. $m > 0, a > 1$

答案：C

【解析】

分析：

依据图像列不等式求得 m 、 a 的取值范围，即可进行选择

【详解】

由图像可知，当 $x > 0$ 时， $f(x) < 0$ ，则 $x > 0$ 时， $(x+m)^2 > 0$ ，则 $m \geq 0$ ，

又由 $f(x)$ 图像不关于原点中心对称可知 $m \neq 0$ ，则 $m > 0$

则 $x > 0$ 时， $a^x - a^{-x} < 0$ ，即 $\frac{a^{2x}-1}{a^x} < 0$ ，则 $0 < a < 1$

故选：C

例 7. (2023·全国·高三专题练习) 函数 $f(x) = |2^x - 1| - m$ 恰有一个零点，则 m 的取值范围是 ()

- A. $(1, +\infty)$ B. $\{0\} \cup (1, +\infty)$ C. $\{0\} \cup [1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

答案：C

【解析】

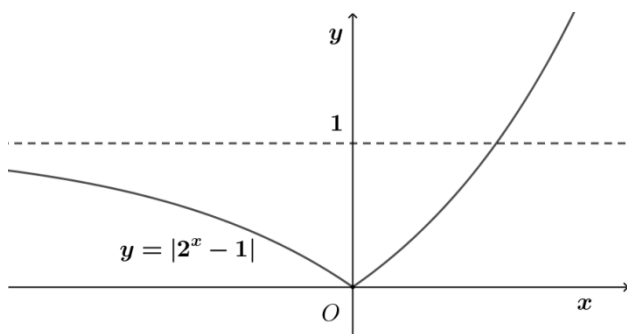
分析：

将问题转化为 $y = |2^x - 1|$ 与 $y = m$ 只有一个交点，画出 $y = |2^x - 1|$ 的图象，应用数形结合法求 m 的取值范围.

【详解】

由题设， $y = |2^x - 1|$ 与 $y = m$ 只有一个交点，

又 $y = |2^x - 1|$ 的图象如下：



$\therefore m \in \{0\} \cup [1, +\infty)$.

故选：C.

例 8. (2023·四川省泸县第二中学模拟预测 (文)) 函数 $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ ，下列关于函数 $f(x)$

的说法错误的是 ()

- A. 函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称
B. 函数 $f(x)$ 的值域为 $(0, 1)$

C. 不等式 $f(x) > \frac{1}{2}$ 的解集是 $(0, +\infty)$

D. $f(x)$ 是增函数

答案: A

【解析】

分析:

利用特殊值法可判断 A 选项; 求出函数 $f(x)$ 的值域, 可判断 B 选项; 解不等式 $f(x) > \frac{1}{2}$ 可

判断 C 选项; 利用指数型函数的单调性可判断 D 选项.

【详解】

对于 A 选项, 函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $f(0) = \frac{1}{2} \neq 0$,

所以, 函数 $f(x)$ 的图象不关于原点对称, A 错;

对于 B 选项, 因为 $e^{-x} + 1 > 1$, 所以, $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \in (0, 1)$, B 对;

对于 C 选项, 由 $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} > \frac{1}{2}$ 可得 $e^{-x} < 1$, 则 $-x < 0$, 解得 $x > 0$, C 对;

对于 D 选项, 对任意的 $x \in \mathbf{R}$, $y = 1 + e^{-x} > 1$,

且函数 $y = 1 + e^{-x}$ 在 \mathbf{R} 上单调递减, 故函数 $f(x)$ 是增函数, D 对.

故选: A.

例 9. (2023·河南·三模(文)) 已知 $f(x-1)$ 为定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, $f(1)=0$, 且 $f(x)$ 在 $[-1, 0)$ 上单调递增, 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 则不等式 $f(2^x - 5) < 0$ 的解集为 ()

A. $(2, \log_2 6)$

B. $(-\infty, 1) \cup (2, \log_2 6)$

C. $(\log_2 6, +\infty)$

D. $(1, 2) \cup (\log_2 6, +\infty)$

答案: D

【解析】

分析:

首先判断出 $f(x)$ 的对称性, 求得 $f(x) < 0$ 的解集, 从而求得 $f(2^x - 5) < 0$ 的解集.

【详解】

因为 $f(x-1)$ 为定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(-1, 0)$ 对称,

且 $f(-1) = 0$, 又 $f(1) = 0$, 所以 $f(-3) = 0$.

依题意可得, 当 $-3 < x < -1$ 或 $x > 1$ 时, $f(x) < 0$.

所以 $f(2^x - 5) < 0$ 等价于 $-3 < 2^x - 5 < -1$ 或 $2^x - 5 > 1$,

解得 $1 < x < 2$ 或 $x > \log_2 6$.

故选: D

例 10. (2023·新疆阿勒泰·三模(理)) 函数 $y = a^{x-1} + 1$ 图象过定点 A, 点 A 在直线

$mx + ny = 3 (m > 1, n > 0)$ 上, 则 $\frac{1}{m-1} + \frac{2}{n}$ 最小值为_____.

答案: $\frac{9}{2}$ ##4.5

【解析】

分析:

根据指数函数过定点的求法可求得 $A(1, 2)$, 代入直线方程可得 $(m-1) + 2n = 2$, 根据

$\frac{1}{m-1} + \frac{2}{n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m-1} + \frac{2}{n} \right) ((m-1) + 2n)$, 利用基本不等式可求得最小值.

【详解】

当 $x = 1$ 时, $y = a^0 + 1 = 2$, $\therefore y = a^{x-1} + 1$ 过定点 $A(1, 2)$,

又点 A 在直线 $mx + ny = 3$ 上, $\therefore m + 2n = 3$, 即 $(m-1) + 2n = 2$,

$\because m > 1, n > 0, \therefore m-1 > 0$,

$\therefore \frac{1}{m-1} + \frac{2}{n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m-1} + \frac{2}{n} \right) ((m-1) + 2n) = \frac{1}{2} \left(5 + \frac{2n}{m-1} + \frac{2(m-1)}{n} \right) \geq$
 $\frac{1}{2} \left(5 + 2\sqrt{\frac{2n}{m-1} \cdot \frac{2(m-1)}{n}} \right) = \frac{9}{2}$ (当且仅当 $\frac{2n}{m-1} = \frac{2(m-1)}{n}$, 即 $m = \frac{5}{3}, n = \frac{2}{3}$ 时取等号),

$\therefore \frac{1}{m-1} + \frac{2}{n}$ 的最小值为 $\frac{9}{2}$.

故答案为: $\frac{9}{2}$.

例 11. (2023·北京·高三专题练习) 已知 $f(x) = 2^{2x} + 2^{x+1} - a2^x + 1$ (其中 $a \in \mathbb{R}$ 且 a 为常数)

有两个零点, 则实数 a 的取值范围是_____.

答案: $(4, +\infty)$

【解析】

分析:

设 $t = 2^x \in (0, +\infty)$, 可转化为 $t^2 + (2-a)t + 1 = 0$ 有两个正解, 进而可得参数范围.

【详解】

设 $t = 2^x \in (0, +\infty)$,

由 $f(x) = 2^{2x} + 2^{x+1} - a2^x + 1$ 有两个零点,

即方程 $t^2 + (2-a)t + 1 = 0$ 有两个正解,

$$\text{所以 } \begin{cases} \Delta = (2-a)^2 - 4 > 0 \\ t_1 + t_2 = a - 2 > 0 \\ t_1 t_2 = 1 > 0 \end{cases}, \text{ 解得 } a > 4,$$

即 $a \in (4, +\infty)$,

故答案为: $(4, +\infty)$.

例 12. (2023·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x) = 2^x + k \cdot 2^{-x}$ (k 为常数, $k \in \mathbf{R}$) 是 \mathbf{R} 上的奇函数.

(1) 求实数 k 的值;

(2) 若函数 $y = f(x)$ 在区间 $[1, m]$ 上的值域为 $\left[n, \frac{15}{4}\right]$, 求 $m+n$ 的值.

答案: (1) $k = -1$

(2) $\frac{7}{2}$

【解析】

分析:

(1) 由 $f(0) = 0$ 求得参数值, 再检验即可;

(2) 由函数的单调性得 $\begin{cases} f(1) = n \\ f(m) = \frac{15}{4} \end{cases}$, 代入可求得 m, n .

(1)

由 $f(x)$ 是奇函数得 $f(0) = 1 + k = 0$, $k = -1$, 此时 $f(x) = 2^x - 2^{-x}$ 是奇函数;

(2)

由复合函数的性质得 $f(x) = 2^x - 2^{-x} = 2^x - \frac{1}{2^x}$ 在定义域内是增函数,

$$\text{所以 } \begin{cases} f(1) = n \\ f(m) = \frac{15}{4} \end{cases}, \quad n = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad 2^m - \frac{1}{2^m} = \frac{15}{4}, \quad 2^m = 4 \text{ 或 } 2^m = -\frac{1}{4} \text{ (舍去)},$$

$m = 2$,

所以 $m+n = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$.

【方法技巧与总结】

解决指数函数有关问题, 思路是从它们的图像与性质考虑, 按照数形结合的思路分析, 从图像与性质找到解题的突破口, 但要注意底数对问题的影响.

题型三: 指数函数中的恒成立问题

例 13. (2023·北京·高三专题练习) 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 且当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = 2^{-x}$, 若对任意的 $x \in [m, m+1]$, 不等式 $f(x) \geq f^2(x-m)$ 恒成立, 则正数 m 的取值范围为 ()

- A. $m \geq 1$ B. $m > 1$ C. $0 < m < 1$ D. $0 < m \leq 1$

答案: A

【解析】

分析:

分析可知 $f(x) = 2^{|x|}$, 由已知可得 $|x| \geq 2|x-m|$ 对任意的 $x \in [m, m+1]$ 恒成立, 解得 $x \leq 2m$ 对任意的 $x \in [m, m+1]$ 恒成立, 可得出关于实数 m 的不等式, 解之即可.

【详解】

因为函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 且当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = 2^{-x}$,

则当 $x \geq 0$ 时, $-x \leq 0$, $f(x) = f(-x) = 2^x$, 故对任意的 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = 2^{|x|}$,

对任意的 $x \in [m, m+1]$, 不等式 $f(x) \geq f^2(x-m)$ 恒成立,

即 $2^{|x|} \geq 2^{2|x-m|}$, 即 $|x| \geq 2|x-m|$ 对任意的 $x \in [m, m+1]$ 恒成立,

且 m 为正数, 则 $x \geq 2(x-m)$, 可得 $x \leq 2m$, 所以, $m+1 \leq 2m$, 可得 $m \geq 1$.

故选: A.

例 14. (2023·北京·高三专题练习) 已知函数 $f(x) = 3^x - 3^{-x}$.

(1) 利用函数单调性的定义证明 $f(x)$ 是单调递增函数;

(2) 若对任意 $x \in [-1, 1]$, $[f(x)]^2 + mf(x) \geq -4$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

答案: (1) 证明见解析

(2) $[-4, 4]$

【解析】

分析:

(1) 利用单调性的定义, 取值、作差、整理、定号、得结论, 即可得证.

(2) 令 $t = 3^x - 3^{-x}$, 根据 x 的范围, 可得 t 的范围, 原式等价于 $h(t) = t^2 + mt$, $t \in \left[-\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right]$,

只需 $h(t)_{\min} \geq -4$ 即可, 分别讨论 $-\frac{m}{2} \leq -\frac{8}{3}$ 、 $-\frac{8}{3} < -\frac{m}{2} < \frac{8}{3}$ 和 $-\frac{m}{2} \geq \frac{8}{3}$ 三种情况, 根据二次函数的性质, 计算求值, 分析即可得答案.

(1)

由已知可得 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ,

任取 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1 < x_2$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。
如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/058027120044006073>