江西省南昌市2024年高考数学二模试卷

副标题

考试时间：**分钟 满分：**分

注意事项：

1、填写答题卡的内容用2B铅笔填写

2、提前 xx 分钟收取答题卡

一、单选题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。（共8题）

1．已知向量$\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(-2,3)$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$(　)

A．2　　B．4　　C．6　　D．8

2．设复数z满足$z+1=(2+\mathrm{i})z$，则$|z|=$（ ）

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C．1　　D．$\sqrt{2}$

3．已知集合$A=\{x\mid lnx\le 0\}$，$B=\{x\mid 2^x\le 2\}$，则“$x\in A$”是“$x\in B$”的(　)

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

4．已知$f(x)=\begin{cases}-x^2-2x,x<0\\ log_2(x+1),x\ge 0\end{cases}$，则不等式$f(x)<2$的解集是(　)

A．$(-\infty,2)$　　B．$(-\infty,3)$　　C．$[0,3)$　　D．$(3,+\infty)$

5．在三棱锥$A-BCD$中，$AB\perp$平面$BCD, AB=\sqrt{3}, BC=BD=CD=2, E,F$ 分别为AC，CD的中点，则下列结论正确的是（ ）

A．AF，BE是异面直线，$AF\perp BE$　　B．AF，BE是相交直线；$AF\perp BE$

C．AF，BE是异面直线，AF与BE不垂直　　D．AF，BE是相交直线，AF与BE不垂直

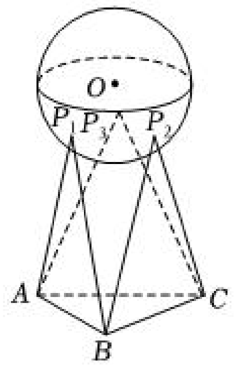
6．已知$2cos\left(2x+\dfrac{\pi}{12}\right)cos\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)-cos3x=\dfrac{1}{4}$，则$sin\left(\dfrac{\pi}{6}-2x\right)=$（ ）

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$-\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{7}{8}$　　D．$-\dfrac{7}{8}$

7．已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为F_1,F_2，双曲线的右支上有一点A, AF_1与双曲线的左支交于B，线段AF_2的中点为M，且满足$BM\perp AF_2$，若$\angle F_1AF_2=\frac{\pi}{3}$，则双曲线$C$的离心率为（ ）

A．$\sqrt{3}$　　B．$\sqrt{5}$　　C．$\sqrt{6}$　　D．$\sqrt{7}$

8．校足球社团为学校足球比赛设计了一个奖杯，如图，奖杯的设计思路是将侧棱长为6的正三棱锥$P-ABC$的三个侧面沿AB，BC，AC展开得到面P_1AB，P_2BC，P_3AC，使得平面P_1AB，P_2BC，P_3AC均与平面ABC垂直，再将球O放到上面使得P_1，P_2，P_3三个点在球O的表面上，若奖杯的总高度为$6\sqrt{2}$，且$AB=4$，则球O的表面积为(　)



A．$\frac{140\pi}{3}$　　B．$\frac{100\pi}{9}$　　C．$\frac{98\pi}{9}$　　D．$\frac{32\pi}{3}$

二、多选题：本题共3小题，共18分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。（共3题）

9．为了解中学生喜爱足球运动与性别是否有关，甲、乙两校的课题组分别随机抽取了本校部分学生进行调查，得到如下两个表格：

甲校样本

	喜爱足球运动	不喜爱足球运动	合计
男性	15	5	20
女性	8	12	20
合计	23	17	40

乙校样本

保密★启用前

	喜爱足球运动	不喜爱足球运动	合计
男性	70	30	100
女性	45	55	100
合计	115	85	200

则下列判断中正确的是（ ）

(参考公式及数据：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, n=a+b+c+d$).

α	0.1	0.01	0.001
x_α	2.706	6.635	10.828

A．样本中，甲校男学生喜爱足球运动的比例高于乙校男学生喜爱足球运动的比例

B．样本中，甲校女学生喜爱足球运动的比例高于乙校女学生喜爱足球运动的比例

C．根据甲校样本有99% 的把握认为中学生喜爱足球运动与性别有关

D．根据乙校样本有99% 的把握认为中学生喜爱足球运动与性别有关

10．已知 $f(x)=x+a\cos x(a\neq 0)$ ，则下列说法中正确的是（ ）

A． $f(x)$ 在 R 上可能单调递减

B．若 $f(x)$ 在 R 上单调递增，则 $a\in[-1,0)\cup(0,1]$

C． $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 是 $f(x)$ 的一个对称中心

D． $f(x)$ 所有的对称中心在同一条直线上

11．已知 $|AB|=4$ ， M 为 AB 上一点，且满足 $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}$. 动点 C 满足 $|AC|=2|CM|$ ， D 为线段 BC 上一点，满足 $|CD|=|DM|$ ，则下列说法中正确的是(　)

A．若 $CM\perp AB$ ，则 D 为线段 BC 的中点

B．当 $AC=3$ 时， $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

C．点 D 到 A ， B 距离之和的最大值为5

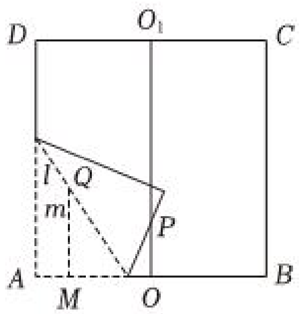
D. $\angle MCB$ 的正切值的最大值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。 （共 3 题）

12. 在$\triangle ABC$中，角 A，B，C 所对的边分别为a,b,c，若$a\sin B=2b\cos A$，则$\tan A=$__________.

13. 一次知识竞赛中，共有A,B,C,D,E5 个题，参赛人每次从中抽出一个题回答(抽后不放回).已知参赛人甲A题答对的概率为$\dfrac{3}{4}$，B题答对的概率为$\dfrac{1}{4}$，C,D,E题答对的概率均为$\dfrac{1}{2}$，则甲前 3 个题全答对的概率为__________.

14. 如图，有一张较大的矩形纸片$ABCD$，O，O_1分别为AB，CD的中点，点P在OO_1上，$|OP|=2$. 将矩形按图示方式折叠，使直线AB(被折起的部分)经过P点，记AB上与P点重合的点为M，折痕为l. 过点M再折一条与BC平行的折痕m，并与折痕l交于点Q，按上述方法多次折叠，Q点的轨迹形成曲线E. 曲线E在Q点处的切线与AB交于点N，则$\triangle PQN$的面积的最小值为__________.



四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。 （共 5 题）

15. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$a_1=1,a_2=3,a_n+a_{n+2}=ka_{n+1}$.

（1）当$k=2$时，求S_{10}；

（2）若$k=\dfrac{5}{2}$，设$b_n=a_{n+1}-2a_n$，求$\{b_n\}$的通项公式.

16. 一条生产电阻的生产线，生产正常时，生产的电阻阻值X(单位：Ω) 服从正态分布$N\left(1000,5^2\right)$.

(参考数据：若$X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 则$P(\mu-\sigma<X\le\mu+\sigma)=0.6826$，

$P(\mu-2\sigma<X\le\mu+2\sigma)\approx0.9544$，$P(\mu-3\sigma<X\le\mu+3\sigma)\approx0.9974$)

保密★启用前

（1）生产正常时，从这条生产线生产的电阻中抽取2只，求这两只电阻的阻值在区间$(995,1000]$和$(1005,1010]$内各一只的概率；（精确到0.001）

（2）根据统计学的知识，从服从正态分布$N\left(\mu,\sigma^2\right)$的总体中抽取容量为$n$的样本，则这个样本的平均数服从正态分布$N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$. 某时刻，质检员从生产线上抽取5只电阻，测得阻值分别为：1000，1007，1012，1013，1013（单位：Ω）. 你认为这时生产线生产正常吗？说明理由.

17. 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$经过点$E\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$P$为椭圆$C$的右顶点，$O$为坐标原点，$\triangle OPE$的面积为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求椭圆C的标准方程；

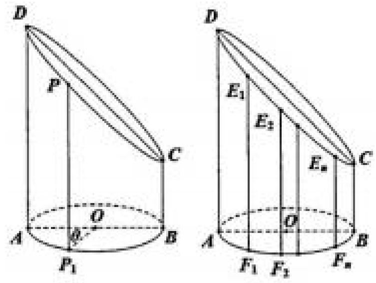
（2）过点$D(-1,0)$作直线l与椭圆C交于A，B，A关于原点O的对称点为C，若$|BA|=|BC|$，求直线AB的斜率.

18. 已知$f\left(x\right)=a^x-x^a(x>0,a>0$ 且$a\neq1)$.

（1）当$a=e$时，求证：$f\left(x\right)$在$\left(e,+\infty\right)$上单调递增；

（2）设$a>e$，已知$\forall x\in\left[\dfrac{e^2}{2}\ln a,+\infty\right)$，有不等式$f\left(x\right)\geq0$恒成立，求实数$a$的取值范围.

19. 如图所示，用一个不平行于圆柱底面的平面，截该圆柱所得的截面为椭圆面，得到的几何体称之为“斜截圆柱”. 图一与图二是完全相同的“斜截圆柱”，AB是底面圆O的直径，$AB=2BC=2$，椭圆所在平面垂直于平面$ABCD$，且与底面所成二面角为45°，图一中，点P是椭圆上的动点，点P在底面上的投影为点P_1，图二中，椭圆上的点$E_i\left(i=1,2,3,\cdots,n\right)$在底面上的投影分别为$F_i$，且$F_i$均在直径$AB$的同一侧.



图一　　图二

（1）当 $\angle AOP_1=\dfrac{2\pi}{3}$ 时，求 PP_1 的长度；

（2）(i) 当 $n=6$ 时，若图二中，点 F_1，F_2，$\cdots$，F_6 将半圆 A 均分成 7 等份，求 $(E_1F_1-2)\cdot(E_2F_2-2)\cdot(E_3F_3-2)$；

(ii) 证明：$\overset{\frown}{AF_1}\cdot E_1F_1+\overset{\frown}{F_1F_2}\cdot E_2F_2+\dots+\overset{\frown}{F_{n-1}F_n}\cdot E_nF_n+\overset{\frown}{F_nB}\cdot BC<2\pi$．

保密★启用前

【答案区】

1. 【答案】B

【解析】【解答】解：由题意可得 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-2)+2\times3=4$.

故答案为：B.

【分析】根据数量积的坐标表示运算求解.

2. 【答案】B

【解析】【解答】解：由 $z+1=(2+i)z$ ，可得 $z=\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i}{2}$ ，故

$|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故答案为：B.

【分析】根据复数的四则运算结合复数的模长公式求解即可.

3. 【答案】A

【解析】【解答】解：由题意可得：$A=\{x\,|\,lnx\le0\}=\{x\,|\,0<x\le1\}$ ，

$B=\{x\,|\,2^x\le2\}=\{x\,|\,x\le1\}$ ，

因为集合 A 是集合 B 的真子集，可知"$x\in A$"是"$x\in B$"的 充分不必要条件 .

故答案为：A.

【分析】求集合 A，B，根据包含关系分析充分、必要条件.

4. 【答案】B

【解析】【解答】解：因为 $f(x)<2$ ，则有当 $x<0$ ， 则 $-x^2-2x<2$ ， 解得 $x<0$；

当 $x\ge0$ ， 则 $\log_2(x+1)<2$ ， 解得 $0\le x<3$；

综上所述： 不等式 $f(x)<2$ 的解集是 $(-\infty,3)$.

故答案为：B.

【分析】分 $x<0$ 和 $x\ge0$ ， 结合一元二次不等式以及对数函数单调性分析求解.

5. 【答案】A

【解析】【解答】解：经过平面 ACD 外一点 B 与平面 ACD 内一点 E 的直线 BE 与平面 ACD 内不经过 E 点的直线 AF 是异面直线；

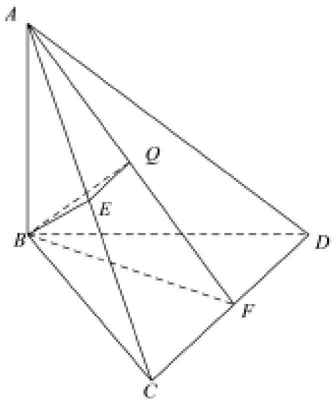
证明 BE 与 AF 垂直，证明如下：

证明：因为 $AB\perp$ 平面 BCD ， $CD\subset$ 平面 BCD ， 所以 $AB\perp CD$ ，

因为 $BC=BD=CD$ ， F 分别为 CD 的中点，连接 BF ， 所以 $BF\perp CD$ ，

因为 $AB\cap BF=B$ ， $AB,BF\subset$ 平面 ABF ， 所以 $CD\perp$ 平面 ABF ，

取 AF 的中点 Q ， 连接 BQ ， EQ， 如图所示：



因为 $AF\subset$ 平面 ABF ， 所以 $CD\perp AF$ ，

又因为 $EQ//CD$ ， 所以 $EQ\perp AF$ ，

因为 $BC=BD=CD=2$ ， 所以 $BF=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}=AB$ ，

又因为 Q 为 AF 的中点，所以 $BQ\perp AF$ ，

因为 $BQ\cap EQ=Q$ ， $BQ,EQ\subset$ 平面 BEQ ， 所以 $AF\perp$ 平面 BEQ ，

又因为 $BE\subset$ 平面 BEQ ， 所以 $AF\perp BE$.

故答案为：A.

【分析】根据异面直线的定义判断直线 AF ， BE 是异面直线，再证明 BE 与 AF 垂直，连接 BF ， 即可得到 $CD\perp$ 平面 ABF ， 取 AF 的中点 Q ， 连接 BQ ， EQ， 从而得到 $EQ\perp AF$ 、 $BQ\perp AF$ ， 即可证明 $AF\perp$ 平面 BEQ ， 从而证明 $AF\perp BE$.

6. 【答案】D

【解析】【解答】解：由 $2cos\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)-cos3x=\frac{1}{4}$ ，

可得 $2cos\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)-cos\left[\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)+\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\right]=\frac{1}{4}$ ，

$\cos\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\quad =\cos\left[\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)-\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\right]$

$=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$ ， 令 $t=x+\frac{\pi}{6}$ ， 则 $x=t-\frac{\pi}{6}$ ， 即 $\cos t=\frac{1}{4}$ ，

所以 $\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=\sin\left[\frac{\pi}{6}-2\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2t\right)=\cos 2t$

$=2\cos^2 t-1=2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2-1=-\frac{7}{8}$.

故答案为：D.

【分析】根据已知条件，利用余弦的两角和公式化简得 $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$ ， 再根据正弦的二倍角公式及诱导公式计算即可.

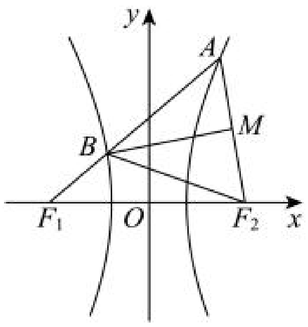
7. 【答案】D

【解析】【解答】解：因为线段 AF_2 的中点为 M ， 且满足 $BM\perp AF_2$ ， 所以 $|AB|=|BF_2|$ ，

故 $\triangle ABF_2$ 为等腰三角形，又因为 $\angle F_1AF_2=\frac{\pi}{3}$ ， 所以 $\triangle ABF_2$ 为正三角形，

根据双曲线定义知：$|AF_1|-|AF_2|=2a=|AF_1|-|AB|=|BF_1|$ ，

设 $|AB|=x$ ， 则 $|BF_2|-|BF_1|=2a$ ， 解得 $x=4a$ ，



在 $\triangle AF_1F_2$ 中，由余弦定理可得：$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{(x+2a)^2+x^2-4c^2}{2x(x+2a)}=\frac{52a^2-4c^2}{48a^2}=\frac{1}{2}$ ， 解得 $e=\sqrt{7}$.

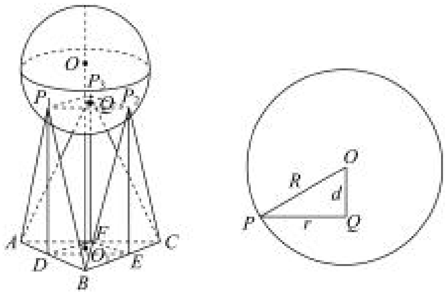
故答案为：D.

【分析】由题意，利用等腰三角形的性质、双曲线的定义结合余弦定理求解即可.

8. 【答案】C

【解析】【解答】解：连接 P_1P_2 、 P_2P_3 、 P_1P_3 ， 取 AB 、 BC 、 AC 中点 D 、 E 、 F ，

连接 P_1D 、 P_2E 、 P_3F 如图所示：



由题意可知： $P_1A=P_1B=P_2B=P_2C=P_3C=P_3A=6$ ， 且 $AB=4$ ，

则 $P_1D=P_2E=P_3F=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$ ，

因为平面 P_1AB ， P_1BC ， P_3AC 均与平面 ABC 垂直，

设 P_1 ， P_2 ， P_3 三点所在的圆为圆 Q ， 底面 ABC 的中心为 O_1 ， 则 $QO_1=4\sqrt{2}$ ，

又因为奖杯总高度为 $6\sqrt{2}$ ，

设球半径为 R ， 球心 O 到圆 Q 面的距离为 d ，

则 $OQ=d=6\sqrt{2}-4\sqrt{2}-R$ ， 即 $d=2\sqrt{2}-R$ ，

因为 $\triangle P_1P_2P_3\cong\triangle DEF$ ， $DE=DF=EF=\frac{1}{2}AB=2$ ，

所以 $\triangle P_1P_2P_3$ 是边长为2的等边三角形，

设 $\triangle P_1P_2P_3$ 的外接圆半径为 r ， 则 $2r=\frac{2}{sin60^{\circ}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$ ， 在直角 $\triangle OP_1Q$ 中，

$R^2=r^2+d^2$ ， 即 $R^2=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(2\sqrt{2}-R\right)^2$ ， 解得 $R=\frac{7}{3\sqrt{2}}$ ，

所以球 O 的表面积为 $4\pi R^2=4\pi\times\left(\frac{7}{3\sqrt{2}}\right)^2=\frac{98\pi}{9}$.

故答案为：C.