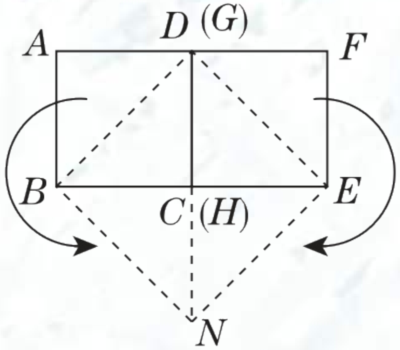
阶段拔尖专训1 特殊平行四边形性质和判定的综合应用的三种题型

题型1 特殊平行四边形中的操作型问题

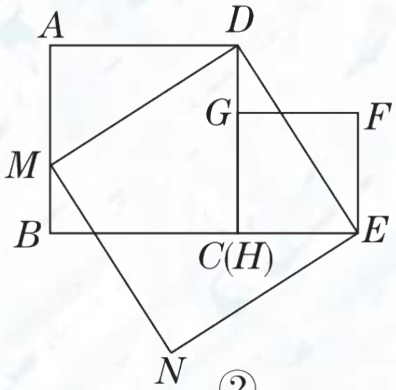
1.对于边长均为a的两个正方形$ABCD$和$EFGH$,按图①所示的方式摆放，沿虚线BD，EG剪开后，可以按图中所示的移动方式拼接为四边形$BNED$.从拼接的过程容易得到结论：

①四边形$BNED$是正方形；

②$S_{\text{正方形}ABCD}+S_{\text{正方形}EFGH}=S_{\text{正方形}BNED}$.



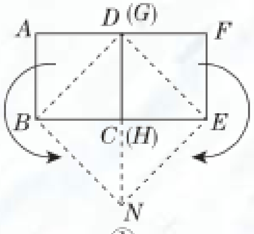
①



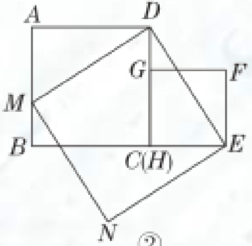
②

【实践与操作】

(1) 对于边长分别为$a,b(a>b)$的两个正方形$ABCD$和$EFGH$,按图②所示的方式摆放，连接DE，过点D作$DM\perp DE$,交AB于点M，过点M作$MN\perp DM$,过点E作$EN\perp DE$,MN与EN相交于点N.



①



②

①试说明四边形$MNED$是正方形，并用含a,b的代数式表示正方形$MNED$的面积.

【解】$\because$ 四边形$ABCD$，四边形$EFGH$均为正方形，

$\therefore AD=CD, \angle A=\angle ADC=\angle DCE=90^{\circ}$ $.\because DM\perp DE$,

$\therefore \angle MDE=90^{\circ}$ $.\therefore \angle ADC=\angle MDE.\therefore \angle ADM+\angle MDC=\angle CDE+\angle MDC.\therefore \angle ADM=\angle CDE.$

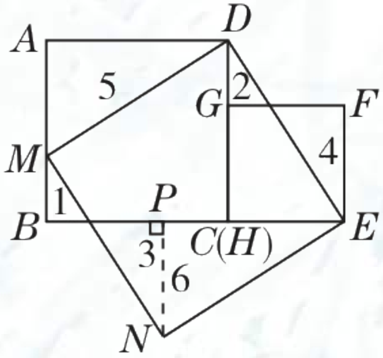
又$\because \angle A=\angle DCE, AD=CD$,

$\therefore \triangle ADM\cong\triangle CDE(\mathrm{ASA}).\therefore DM=DE.$由题易得四边形$MNED$是矩形，$\therefore$ 矩形$MNED$是正方形.$\because \angle DCE=90^{\circ}$ ，

$\therefore DE^2=CD^2+CE^2=a^2+b^2.\therefore$ 正方形$MNED$的面积为$a^2+b^2.$

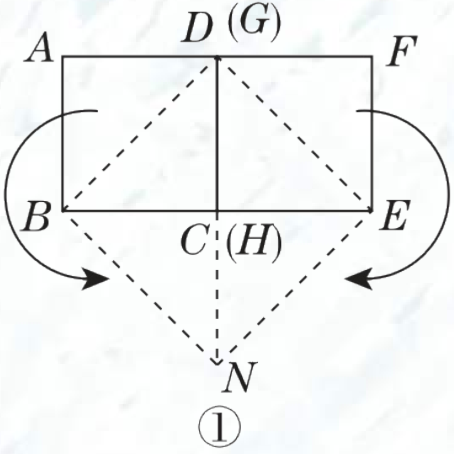
②在图②中，将正方形$ABCD$和正方形$EFGH$剪开后，能够拼接成正方形$MNED$，请简略说明你的拼接方法（类比图①,用数字表示对应的图形）.

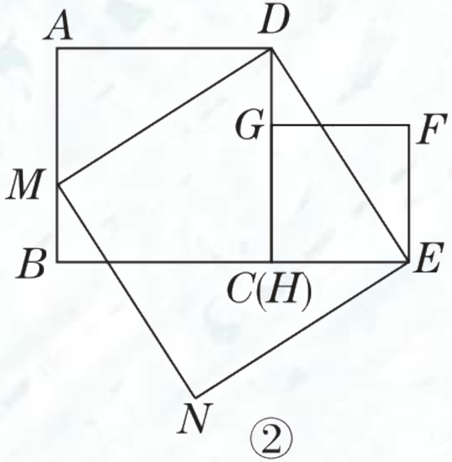
如图，过点N作$NP \perp BE$,垂足为P.



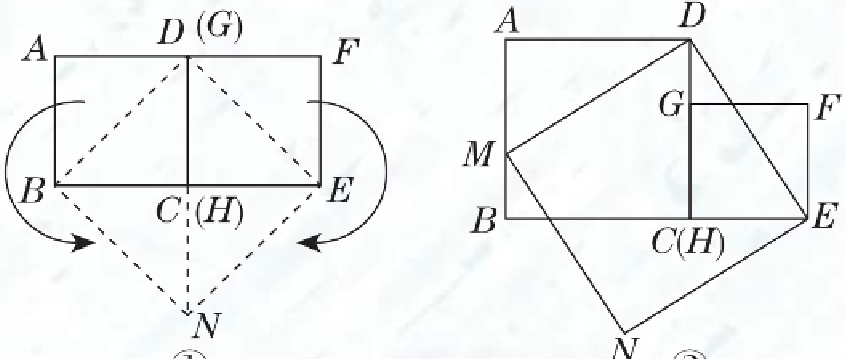
可证明图中的6与5位置的两个直角三角形全等，4与3位置的两个直角三角形全等，1与2位置的两个直角三角形全等，因此将5放到6的位置，将4放到3的位置，将1放到2的位置，恰好能够拼接成正方形$MNED$.

(2) 对于n（n是大于2的自然数）个任意的正方形，能否通过若干次拼接，将其拼接为一个正方形？请简略说明你的理由





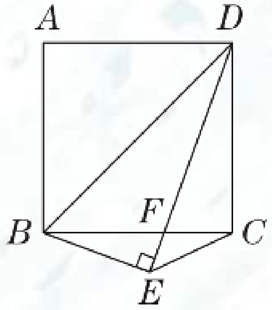
能.理由：由(1)②可知任意两个正方形都可以拼接为一个正方形，而拼接出的这个正方形可以与第三个正方形再拼接为一个正方形，⋯ ，以此类推，对于n（n是大于2的自然数）个任意的正方形，可以通过$(n-1)$次拼接，得到一个正方形.



① ②

题型2 特殊平行四边形中的探究型问题

2.[2024·烟台期中] 如图，在正方形$ABCD$中，$DE \perp BE$交BC于点F，连接BD，CE.



(1) $\angle EBD$与$\angle ECB$有何数量关系，并说明理由；

【解】$\angle EBD+\angle ECB=90°$.

理由：如图①，过点C作$CH\perp CE$交DE于H，

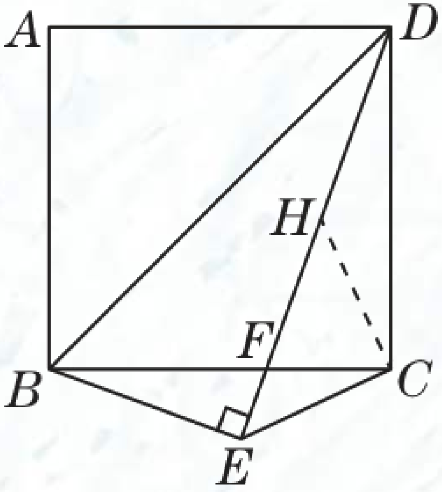
则$\angle ECH=90°$.

$\because$ 四边形$ABCD$是正方形，

$\therefore BC=DC, \angle BCD=90°=\angle ECH.$

$\therefore \angle DBC=\angle BDC=45°$ $, \angle HCD=\angle ECB.$

$\because BE\perp DE$，$\therefore \angle BED=90°=\angle BCD.$



①

又$\because \angle BFE=\angle DFC$,

$\therefore \angle EBC=\angle CDF$.

又$\because BC=DC$, $\therefore \triangle ECB\cong\triangle HCD$(ASA).

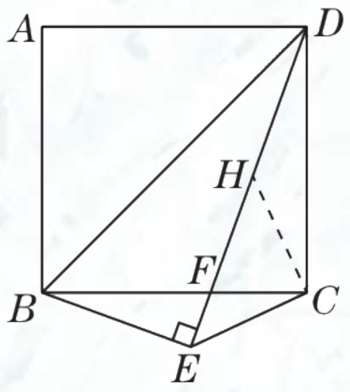
$\therefore HC=EC$. $\therefore \angle HEC=\angle EHC=45^\circ$.

$\therefore \angle BEC=90^\circ+45^\circ=135^\circ$.

$\therefore \angle EBC+\angle ECB=45^\circ$.

又$\because \angle CBD=45^\circ$,

$\therefore \angle EBD+\angle ECB=\angle CBD+\angle EBC+\angle ECB=45^\circ+45^\circ=90^\circ$.



①

(2) 过点A作$AN \perp DE$于点N，交BD于点M，探究线段DN，BE，AN之间的数量关系.