保密★启用前

# 广东省深圳市 2024 届高三第二次调研考试（二模）数学试题

副标题

考试时间：**分钟 满分：**分

注意事项：

1、填写答题卡的内容用 2B 铅笔填写

2、提前 xx 分钟收取答题卡

## 一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。（共 8 题）

1．已知 n 为正整数，且$n^2>2^n$，则

A．$n=1$　　B．$n=2$　　C．$n=3$　　D．$n\geq 4$

2．已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，过点 A 且以$\overrightarrow{DB_1}$为法向量的平面为$\alpha$，则$\alpha$截该正方体所得截面的形状为

A．三角形　　B．四边形　　C．五边形　　D．六边形

3．对于任意集合 M，N，下列关系正确的是

A．$M\cup \complement_{M\cup N}N=M\cup N$

B．$\complement_{M\cup N}(M\cap N)=(\complement_{M\cup N}M)\cup(\complement_{M\cup N}N)$

C．$M\cap \complement_{M\cup N}N=M\cap N$

D．$\complement_{M\cup N}(M\cap N)=(\complement_{M\cup N}M)\cap(\complement_{M\cup N}N)$

4．已知$a>0$，且$a\neq 1$，则函数$y=log_a\left(x+\frac{1}{a}\right)$的图象一定经过

A．一、二象限　　B．一、三象限　　C．二、四象限　　D．三、四象限

5．已知$z=\frac{2}{1+\mathrm{i}}$，其中 i 为虚数单位，则$\overline{z}\cdot(z-1)=$

A．$1+\mathrm{i}$　　B．$1-\mathrm{i}$　　C．$-1+\mathrm{i}$　　D．$-1-\mathrm{i}$

6．已知某六名同学在 CMO 竞赛中获得前六名（无并列情况），其中甲或乙是第一名，丙不是前三名，则这六名同学获得的名次情况可能有

A．72 种　　B．96 种　　C．144 种　　D．288 种

7．P 是椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）上一点，$F_1$、$F_2$ 是 C 的两个焦点，$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，点 Q 在 $\angle F_1PF_2$ 的平分线上，O 为原点，$OQ \parallel PF_1$，且 $|OQ|=b$．则 C 的离心率为

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

8．设函数 $f(x)=x+e^x$，$g(x)=x+\ln x$，若存在 $x_1$，$x_2$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$，则 $|x_1-x_2|$ 的最小值为

A．$\frac{1}{e}$　　B．1　　C．2　　D．e

**二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。（共 3 题）**

9．已知 m，n 是异面直线，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，那么

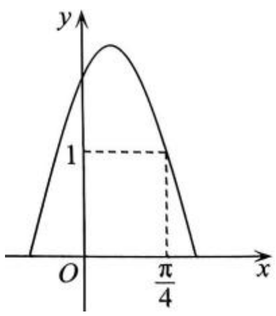
A．当 $m\perp\beta$，或 $n\perp\alpha$ 时，$\alpha\perp\beta$

B．当 $m\parallel\beta$，且 $n\parallel\alpha$ 时，$\alpha\parallel\beta$

C．当 $\alpha\perp\beta$ 时，$m\perp\beta$，或 $n\perp\alpha$

D．当 $\alpha$，$\beta$ 不平行时，m 与 $\beta$ 不平行，且 n 与 $\alpha$ 不平行

10．已知函数 $f(x)=\sin\omega x+a\cos\omega x$（$x\in R$，$\omega>0$）的最大值为 2，其部分图象如图所示，则




A．$a=\sqrt{3}$

B．函数 $f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 为偶函数

C．满足条件的正实数 $\omega$，存在且唯一

D．$f(x)$ 是周期函数，且最小正周期为 $\pi$

11．设函数 $f(x)=[x]$ 的函数值表示不超过 x 的最大整数，则在同一个直角坐标系中，函数 $y=f(x)$ 的图象与圆 $(x-t)^2+(y+t)^2=2t^2$ （$t>0$）的公共点个数可以是

A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

**三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。（共 3 题）**

12．已知样本 $x_1$，$x_2$，$x_3$ 的平均数为 2，方差为 1，则 $x_1^2$，$x_2^2$，$x_3^2$ 的平均数为__________.

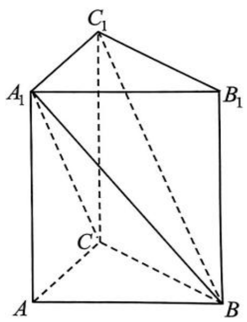
13．已知圆锥的内切球半径为 1，底面半径为 $\sqrt{2}$，则该圆锥的表面积为__________.

注：在圆锥内部，且与底面和各母线均有且只有一个公共点的球，称为圆锥的内切球.

14．已知△ABC 中，$tan\dfrac{B}{2}=3tan\dfrac{C}{2}$，双曲线 E 以 B，C 为焦点，且经过点 A，则 E 的两条渐近线的夹角为__________；$tan\dfrac{A}{2}+tan\dfrac{C}{2}$ 的取值范围为__________.

**四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。（共 5 题）**

15．如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 $BB_1C_1C\perp$ 底面 ABC，且 $AB=AC$，$A_1B=A_1C$.




（1）证明：$AA_1\perp$ 平面 ABC；

（2）若 $AA_1=BC=2$，$\angle BAC=90°$，求平面 $A_1BC$ 与平面 $A_1BC_1$ 夹角的余弦值.

16．已知函数 $f(x)=(ax+1)e^x$，$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，且 $f'(x)-f(x)=2e^x$.

（1）若曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线为 $y=kx+b$，求 k，b 的值；

（2）在（1）的条件下，证明：$f(x)\ge kx+b$.

17．某大型企业准备把某一型号的零件交给甲工厂或乙工厂生产．经过调研和试生产，质检人员抽样发现：甲工厂试生产的一批零件的合格品率为 94%；乙工厂试生产的另一批零件的合格品率为 98%；若将这两批零件混合放在一起，则合格品率为 97%.

（1）从混合放在一起的零件中随机抽取 3 个，用频率估计概率，记这 3 个零件中来自甲工厂的个数为 X，求 X 的分布列和数学期望；

（2）为了争取获得该零件的生产订单，甲工厂提高了生产该零件的质量指标．已知在甲工厂提高质量指标的条件下，该大型企业把零件交给甲工厂生产的概率，大于在甲工厂不提高质量指标的条件下，该大型企业把零件交给甲工厂生产的概率．

设事件 $A=$“甲工厂提高了生产该零件的质量指标”，事件 $B=$“该大型企业把零件交给甲工厂生产”、已知 $0<P\left(B\right)<1$，证明： $P\left(A\mid B\right)>P\left(A\mid \overline{B}\right)$ ．

18． 设抛物线 C：$x^2=2py$ （$p>0$），直线 l：$y=kx+2$ 交 C 于 A，B 两点．过原点 O 作 l 的垂线，交直线 $y=-2$ 于点 M．对任意 $k\in R$，直线 AM，AB，BM 的斜率成等差数列．

（1）求 C 的方程；

（2）若直线 $l'\parallel l$，且 l′ 与 C 相切于点 N，证明：△AMN 的面积不小于 $2\sqrt{2}$ ．

19．无穷数列 $a_1$，$a_2$，…，$a_n$，…的定义如下：如果 n 是偶数，就对 n 尽可能多次地除以 2，直到得出一个奇数，这个奇数就是 $a_n$ ；如果 n 是奇数，就对 $3n+1$ 尽可能多次地除以 2，直到得出一个奇数，这个奇数就是 $a_n$ ．

（1）写出这个数列的前 7 项；

（2）如果 $a_n=m$ 且 $a_m=n$，求 m，n 的值；

（3）记 $a_n=f\left(n\right)$，$n\in N^*$，求一个正整数 n，满足

$$n<f\left(n\right)<f\left(f\left(n\right)\right)<\cdots<\underbrace{f\left(f\left(\cdots f\left(n\right)\cdots\right)\right)}_{2024个f}$$ ．

**保密★启用前**

【答案区】

1．【答案】C

【解析】【解答】解：令 $a_n=\frac{n^2}{2^n},n\in\mathrm{N}^*$ ， 显然 $a_1=\frac{1}{2},a_2=1,a_3=\frac{9}{8}$ ，

当 $n\geq 4$ 时，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^2}{2n^2}=\frac{n^2+2n+1}{n^2+n^2}<\frac{n^2+2n+1}{n^2+3n}<1$ ， 即 $a_{n+1}<a_n\leq a_4=1$ ，

因此当 $n\geq 4$ 时，$n^2\leq 2^n$ ，

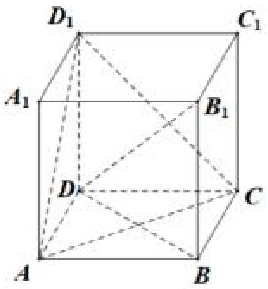
所以 $n$ 为正整数，且 $n^2>2^n$ ， 有 $n=3$ .

故答案为：C

【分析】根据给定条件，构造数列 $a_n=\frac{n^2}{2^n}$ ， 探讨该数列单调性即得.

2．【答案】A

【解析】【解答】解：连接 $AC,AD_1,CD_1,BD$ 如图所示：




因为 $BB_1\perp$ 平面 $ABCD$ ， $AC\subset$ 平面 $ABCD$ ，

所以 $BB_1\perp AC$ ，

又四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $BD\perp AC$ ，

又 $BB_1\cap BD=B$ ， $BB_1,BD\subset$ 平面 $BB_1D$ ，

所以 $AC\perp$ 平面 $BB_1D$ ，

因为 $B_1D\subset$ 平面 $BB_1D$ ，

所以 $AC\perp B_1D$ ，

同理可证明 $AD_1\perp B_1D$ ，

因为 $AD_1\cap AC=A$ ， $AD_1,AC\subset$ 平面 $ACD_1$ ，

故 $B_1D\perp$ 平面 $ACD_1$ ，

故平面 $\alpha$ 即为平面 $ACD_1$ ，

则 $\alpha$ 截该正方体所得截面的形状为三角形.

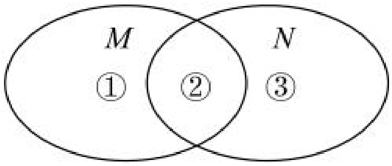
故答案为：A

【分析】作出辅助线，根据线面垂直的判定定理得到 $DB_1\perp$ 平面 $ACD_1$ ， 故平面 $\alpha$ 即为平面 $ACD_1$ ， 得到截面的形状.

3. 【答案】B

【解析】【解答】解：

对于 A：如图所知，




$\complement_{M\cup N}N$ 为区域①，所以 $M\cup\complement_{M\cup N}N=M$ ， 故 A 错误；

对于 B：$\complement_{M\cup N}(M\cap N)$ 为区域①和③；$\left(\complement_{M\cup N}M\right)$ 为区域③，$\left(\complement_{M\cup N}N\right)$ 为区域①，则 $\left(\complement_{M\cup N}M\right)\cup\left(\complement_{M\cup N}N\right)$ 也为为区域①和③；两边相等，故 B 正确；

对于 C：$\left(\complement_{M\cup N}N\right)$ 为区域①，$M\cap\complement_{M\cup N}N$ 为区域①，不等于区域②（区域②为 $M\cap N$ ），故 C 错误；

对于 D：$\complement_{M\cup N}(M\cap N)$ 为区域①和③；而 $\left(\complement_{M\cup N}M\right)$ 为区域③，$\left(\complement_{M\cup N}N\right)$ 为区域①，所以 $\left(\complement_{M\cup N}M\right)\cap\left(\complement_{M\cup N}N\right)$ 为空集，所以 D 错误；

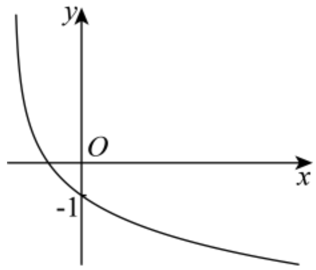
故答案为：B.

【分析】利用韦恩图进行判断即可得到结果.

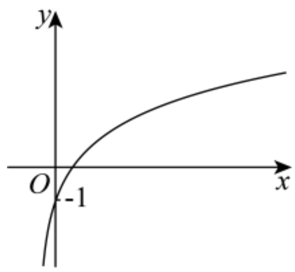
4. 【答案】D

【解析】【解答】解：当 $x=0$ 时，$y=log_a\frac{1}{a}=-1$ ，

则当 $0<a<1$ 时，函数图象过二、三、四象限；




则当$a>1$时，函数图象过一、三、四象限；




所以函数$y=log_a\left(x+\frac{1}{a}\right)$的图象一定经过三、四象限.

故答案为：D

【分析】由函数$y=log_a\left(x+\frac{1}{a}\right)$过$(0,-1)$点，分类可解.

5. 【答案】B

【解析】【解答】解：由题意知，$z=\frac{2}{1+\mathrm{i}}=\frac{2(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=1-\mathrm{i}$ ，

所以$\overline{z}=1+\mathrm{i}$ ，

所以$\overline{z}(z-1)=(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i}-1)=1-\mathrm{i}$ .

故答案为：B

【分析】根据复数的乘、除法运算可得$z=1-\mathrm{i}$ ， 进而$\overline{z}=1+\mathrm{i}$ ， 结合复数的乘法计算即可求解.

6. 【答案】C

【解析】【解答】解：由题意，丙可能是4，5，6名，有3种情况，

若甲是第一名，则获得的名次情况可能是$C_3^1A_4^4=72$种，

若乙是第一名，则获得的名次情况可能是$C_3^1A_4^4=72$种，

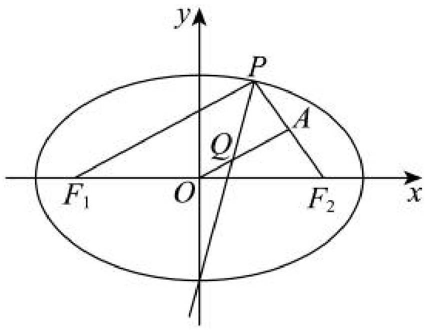
所以所有符合条件的可能是$72+72=144$种.

故答案为：C.

【分析】根据题意分别求出甲是第一，乙是第一的可能情况，再利用分类加法计数原理计算即可.

7. 【答案】C

【解析】【解答】解：如图所示：




设$|PF_1|=m$ ，$|PF_2|=n$， 延长$OQ$交$PF_2$于$A$，

由题意知$OQ \parallel PF_1$ ，$O$为$F_1F_2$的中点，故$A$为$PF_2$中点，

又$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$ ，即$PF_1 \perp PF_2$ ，则$\angle QAP=\frac{\pi}{2}$ ，

又由$\angle QPA=\frac{\pi}{4}$ ，则$\triangle AQP$是等腰直角三角形，

故有$\begin{cases} m+n=2a \\ m^2+n^2=4c^2 \\ b+\frac{1}{2}n=\frac{1}{2}m \end{cases}$ ，化简得$\begin{cases} m-n=2b \\ m+n=2a \end{cases}$ ，即$\begin{cases} m=a+b \\ n=a-b \end{cases}$ ，

代入$m^2+n^2=4c^2$得$(a+b)^2+(a-b)^2=4c^2$ ，

即$a^2+b^2=2c^2$ ，由$b^2=a^2-c^2$所以$2a^2=3c^2$ ，

所以$e^2=\frac{2}{3}$ ，$e=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

故答案为：C.

【分析】设$|PF_1|=m$ ，$|PF_2|=n$， 由题意得出$\triangle AQP$是等腰直角三角形，列方程组得到含$a,c$的齐次方程求解离心率即可.

8. 【答案】B

【解析】【解答】解：由题意可得$f(x_1)=g(x_2)$ ，即$x_1+e^{x_1}=x_2+lnx_2$ ，所以

$x_1+e^{x_1}=e^{lnx_2}+lnx_2$ ，

又 $f'(x)=1+e^x>0$ ， 所以 $f(x)$ 在 R 上单调递增，

即 $f(x_1)=f(lnx_2)$ ， 所以 $x_1=lnx_2$ ，

且 $|x_1-x_2|=|lnx_2-e^{x_1}|=|lnx_2-x_2|$ ，

令 $h(x)=lnx-x$ ， $x\in(0,+\infty)$，

则 $h'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$ ， 其中 $x>0$ ，

令 $h'(x)=0$ ， 则 $x=1$ ，

当 $x\in(0,1)$ 时， $h'(x)>0$ ， 则 $h(x)$ 单调递增，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $h'(x)<0$ ， 则 $h(x)$ 单调递减，

所以当 $x=1$ 时， $h(x)$ 有极大值，即最大值，

所以 $h(x)\le h(1)=-1$ ， $|h(x)|\ge1$，

所以 $|x_1-x_2|_{min}=|lnx_2-x_2|_{min}=|-1|=1$ .

故答案为：B

【分析】根据题意，由条件可得 $f(x_1)=f(lnx_2)$ ， 即可得到 $x_1=lnx_2$ ， 构造函数 $h(x)=lnx-x$ ， 求导得其最值，即可得到结果.

9. 【答案】A,B

【解析】【解答】解：A：当 $m\perp\beta$ ， $m\subset\alpha$ 时， $\alpha\perp\beta$；

当 $n\perp\alpha$ ， $n\subset\beta$ 时， $\alpha\perp\beta$ ， 故 A 正确；

B：当 $m//\beta$ ， $n//\alpha$ 时，又 $m,n$ 为异面直线，所以 $\alpha//\beta$ ， 故 B 正确；

C：当 $\alpha\perp\beta$ 时，由 $m\subset\alpha$ ， 得 $m//\beta$ 或 $m$ 与 $\beta$ 相交；

当 $\alpha\perp\beta$ 时，由 $n\subset\beta$ ， 得 $n//\alpha$ 或 $n$ 与 $\alpha$ 相交，故 C 错误；

D：当 $\alpha,\beta$ 不平行时，可能 $m//\beta$ 或 $m$ 与 $\beta$ 相交， $n//\alpha$ 或 $n$ 与 $\alpha$ 相交，故 D 错误.

故答案为：AB

【分析】根据线线、线面和面面之间的基本关系，结合选项依次判断即可.

10. 【答案】A,C,D

【解析】【解答】解：因为 $f(x)=sin\omega x+acos\omega x=\sqrt{a^2+1}sin(\omega x+\varphi)$ （其中 $sin\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$ 、 $cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$ ），

又 $f(x)_{max}=\sqrt{a^2+1}=2$ ， 解得 $a=\pm\sqrt{3}$ ，

又 $f(0)=a>0$ ， 所以 $a=\sqrt{3}$ ， 故 A 正确；

则 $f(x)=sin\omega x+\sqrt{3}cos\omega x=2sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$ ，

又 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2sin\left(\frac{\pi\omega}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=1$ ， 即 $sin\left(\frac{\pi\omega}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ ，

结合图象可知 $\frac{\pi\omega}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in Z$ ， 所以 $\omega=2+8k,k\in Z$ ，

又 $\frac{T}{2}>\frac{\pi}{4}$ ， 所以 $\begin{cases}\frac{2\pi}{\omega}>\frac{\pi}{2}\\ \omega>0\end{cases}$ ， 解得 $0<\omega<4$ ， 所以 $\omega=2$ ， 故 C 正确；

所以 $f(x)=2sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ ， 则 $f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=2sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=2sin2x$ 为奇函数，

故 B 错误；

$f(x)$ 是周期函数，且最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$ ， 故 D 正确.

故答案为：ACD

【分析】利用辅助角公式化简函数解析式，再根据函数的最大值及 $f(0)>0$ 求出 $a$ ， 由 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ 求出 $\omega$ 的取值，再根据周期确定 $\omega$ 的值，即可得到函数解析式，即可判断.

11. 【答案】A,B,D

【解析】【解答】解：由 $(x-t)^2+(y+t)^2=2t^2(t>0)$ ， 得该圆心为 $(t,-t)$ ， 半径为 $\sqrt{2}t$ ，

易知该圆过原点，由 $f(x)=[x]$ ， 当 $x\in[-3,3)$ 时，