高考数学 (江苏省专用)

§16.2　双曲线

五年高考

A组　自主命题·江苏卷题组

1.(江苏,8,5分)在平面直角坐标系xOy中,双曲线$\frac{x^2}{3}-y^2=1$右准线与它两条渐近线分别交于点P,Q,其焦点是F_1,F_2,则四边形F_1PF_2Q面积是________.

答案　$2\sqrt{3}$

解析　本题考查双曲线性质及应用.

由$\frac{x^2}{3}-y^2=1$得右准线方程为$x=\frac{3}{2}$,

渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$,$|F_1F_2|=4$,

不妨设P在x轴上方,则$P\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$Q\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$\therefore S_{四边形F_1PF_2Q}=2\times\frac{1}{2}\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.

2.(江苏,3,5分,0.885)双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$两条渐近线方程为________.

答案 $y=\pm\frac{3}{4}x$

解析 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$两条渐近线方程为 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=0$,化简得$y=\pm\frac{3}{4}x$.

3.(江苏,3,5分)在平面直角坐标系xOy中,双曲线 $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{3}=1$焦距是________.

答案 $2\sqrt{10}$

解析 由$\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{3}=1$,得$a^2=7,b^2=3$,所以$c^2=10,c=\sqrt{10}$,所以$2c=2\sqrt{10}$.

4.(江苏,12,5分,0.406)在平面直角坐标系xOy中,P为双曲线$x^2-y^2=1$右支上一个动点.若点P到直线$x-y+1=0$距离大于c恒成立,则实数c最大值为________.

答案 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

解析　双曲线x^2-y^2=1一条渐近线为直线y=x,显然直线y=x与直线x-y+1=0平行,且两直线之间距离为$\frac{|0-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.因为点$P$为双曲线$x^2$-$y^2$=1右支上一点,所以点$P$到直线$y$=$x$距离恒大于0,结合图形可知点$P$到直线$x$-$y$+1=0距离恒大于$\frac{\sqrt{2}}{2}$,结合已知可得$c$最大值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B组　统一命题·省(区、市)卷题组

考点一　双曲线定义和标准方程

1.(课标全国Ⅱ文改编,5,5分)若$a>1$,则双曲线$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$离心率取值范围是________.

答案　$(1,\sqrt{2})$

解析　本题考查双曲线方程和性质.

由题意知$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}$

因为$a>1$,所以$e<\sqrt{2}$,

又$e>1$,所以$1<e<\sqrt{2}$.

2.(课标全国Ⅱ理改编,9,5分)若双曲线C: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$一条渐近线被圆$(x-2)^2+y^2=4$所截得弦长为2,则$C$离心率为________.

答案 2

解析 本题主要考查双曲线方程和性质,直线与圆位置关系.

由题意可知圆圆心为(2,0),半径为2.因为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x$,即$bx\pm ay=0$,且双曲线一条渐近线与圆相交所得弦长为2,所以$\frac{|2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{2^2-1^2}$,所以$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$.故离心率$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=2$.

方法总结 求双曲线离心率e常见方法有两种.一是直接法:$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$;二是间接法:即由条件得到关于$a$、$c$等式,再化成关于$e$方程求解.

3.(课标全国Ⅲ理改编,5,5分)已知双曲线C: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$一条渐近线方程为$y=\frac{\sqrt{5}}{2}x$,且与椭圆$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$有公共焦点,则$C$方程为________.

答案 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

解析 本题考查求解双曲线方程.

由双曲线渐近线方程可设双曲线方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=k(k>0)$,即$\frac{x^2}{4k}-\frac{y^2}{5k}=1$,∵双曲线与椭圆$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$有公共焦点,∴$4k+5k=12-3$,解得$k=1$,故双曲线$C$方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.

一题多解 ∵椭圆$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$焦点为$(\pm3,0)$,双曲线与椭圆$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$有公共焦点,

∴$a^2+b^2=(\pm3)^2=9$①,

∵双曲线一条渐近线为$y=\frac{\sqrt{5}}{2}x$,∴$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$②,联立①②可解得$a^2=4,b^2=5$.∴双曲线$C$方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.

4.(天津文改编,5,5分)已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$右焦点为$F$,点$A$在双曲线渐近线上,△$OAF$是边长为2等边三角形($O$为原点),则双曲线方程为________.

答案 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$

解析 本题主要考查双曲线几何性质和双曲线方程.

不妨设点A在第一象限,由题意可知$c=2$,点A坐标为$(1,\sqrt{3})$,所以$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$,又$c^2=a^2+b^2$,所以$a^2=1$,$b^2=3$,故所求双曲线方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

方法总结 求双曲线方程惯用方法:(1)待定系数法:设出所求双曲线方程,依据题意结构关于a,b方程组,从而求得a,b,写出双曲线方程;(2)定义法:依据题意建立动点所满足关系式,结合双曲线定义求出动点所满足轨迹方程.

5.(天津理改编,5,5分)已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$左焦点为$F$,离心率为$\sqrt{2}$.若经过$F$和$P(0,4)$两点直线平行于双曲线一条渐近线,则双曲线方程为________.

答案 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$

解析 本题主要考查双曲线几何性质和双曲线标准方程.

由离心率为$\sqrt{2}$可知$a=b$,$c=\sqrt{2}a$,所以$F(-\sqrt{2}a,0)$,由题意可知$k_{PF}=\frac{4-0}{0-(-\sqrt{2}a)}=\frac{4}{\sqrt{2}a}=1$,所以$\sqrt{2}a=4$,解得$a=2\sqrt{2}$,所以双曲线方程为$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$.

方法总结 求双曲线方程惯用方法:(1)待定系数法:设出所求双曲线方程,依据题意结构关于参数a,b方程组,从而解方程组求出参数a和b值;(2)定义法:依据题意得到动点所满足关系式,结合双曲线定义求出动点所满足轨迹方程.

6.(北京,10,5分)已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$一条渐近线为$\sqrt{3}x+y=0$,则$a=$________.

答案 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

解析 由双曲线$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$知其渐近线方程为$y=\pm\frac{1}{a}x$,又因为$a>0$,所以$\frac{1}{a}=\sqrt{3}$,解得$a=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

7.(天津改编,6,5分)已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$一条渐近线过点$(2,\sqrt{3})$,且双曲线一个焦点在抛物线$y^2=4\sqrt{7}x$准线上,则双曲线方程为________.

答案 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$

解析 因为点$(2,\sqrt{3})$在渐近线$y=\frac{b}{a}x$上,所以$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,又因为抛物线准线为$x=-\sqrt{7}$,所以$c=\sqrt{7}$,故$a^2+b^2=7$,解得$a=2,b=\sqrt{3}$.故双曲线方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$.

评析 本题考查了双曲线和抛物线方程和性质.考查了用待定系数法求方程问题,属中等题.

8.(天津改编,5,5分)已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$一条渐近线平行于直线$l:y=2x+10$,双曲线一个焦点在直线$l$上,则双曲线方程为________.

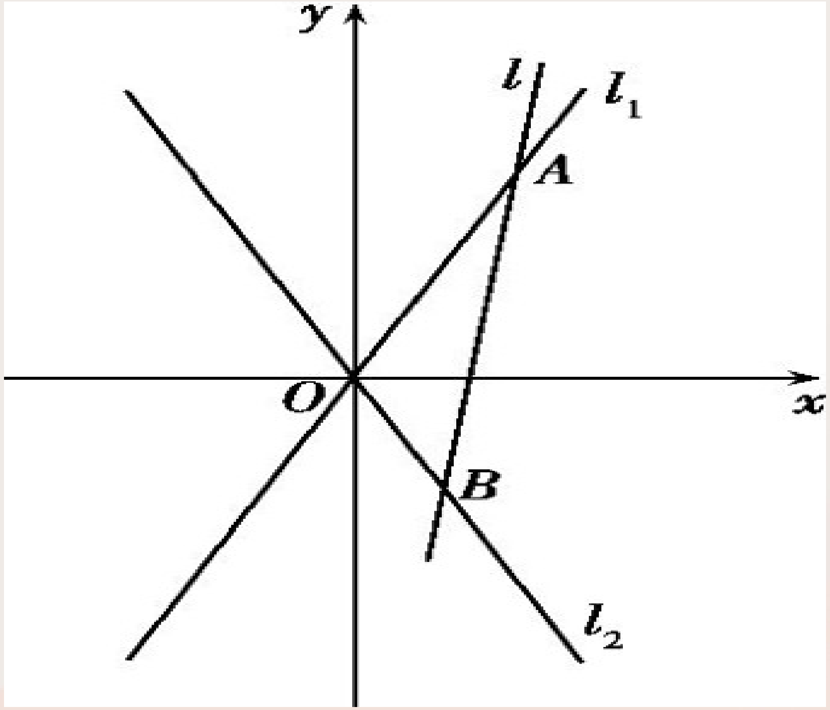
答案 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$

解析 由题意得$\frac{b}{a}=2$且$c=5$.故由$c^2=a^2+b^2$,得$25=a^2+4a^2$,则$a^2=5,b^2=20$,从而双曲线方程为$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$.

9.(福建,19,13分)已知双曲线E: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$两条渐近线分别为$l_1:y=2x,l_2:y=-2x$.

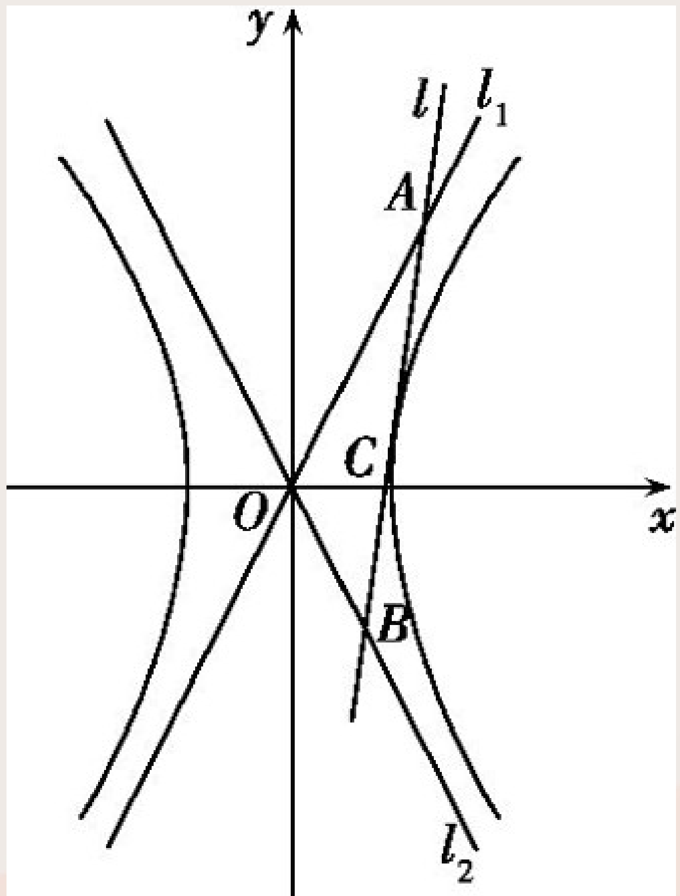
(1)求双曲线E离心率;

(2)如图,O为坐标原点,动直线l分别交直线l_1,l_2于A,B两点(A,B分别在第一、四象限),且△OAB面积恒为8.试探究:是否存在总与直线l有且只有一个公共点双曲线E?若存在,求出双曲线E方程;若不存在,说明理由.



解析　(1)因为双曲线E渐近线分别为$y=2x,y=-2x$,所以$\frac{b}{a}=2$,所以$\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{a}=2$,故$c=\sqrt{5}a$,

从而双曲线E离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$



(2)解法一:由(1)知,双曲线E方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4a^2}=1$.

设直线l与x轴相交于点C.

当$l\perp x$轴时,若直线l与双曲线E有且只有一个公共点,

则$|OC|=a,|AB|=4a$,

又因为$\triangle OAB$面积为8,

所以$\frac{1}{2}|OC|\cdot|AB|=8$,

所以$\frac{1}{2}a\cdot 4a=8$,解得$a=2$,

此时双曲线E方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$.

若存在满足条件双曲线E,则E方程只能为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$.

以下证实:当直线l不与x轴垂直时,双曲线E:$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$也满足条件.

设直线l方程为$y=kx+m$,依题意,得$k>2$或$k<-2$,

则$C\left(-\frac{m}{k},0\right)$,记$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.

由$\begin{cases}y=kx+m,\\ y=2x\end{cases}$得$y_1=\frac{2m}{2-k}$,同理得$y_2=\frac{2m}{2+k}$.

由$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|OC|\cdot|y_1-y_2|$得,

$\frac{1}{2}\left|-\frac{m}{k}\right|\cdot\left|\frac{2m}{2-k}+\frac{2m}{2+k}\right|=8$,即$m^2=4|4-k^2|=4(k^2-4)$.

由$\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1\end{cases}$得$(4-k^2)x^2-2kmx-m^2-16=0$.

因为$4-k^2<0$,

所以$\Delta=4k^2m^2+4(4-k^2)(m^2+16)=-16(4k^2-m^2-16)$,

又因为$m^2=4(k^2-4)$,

所以$\Delta=0$,即l与双曲线E有且只有一个公共点.

所以,存在总与l有且只有一个公共点双曲线E,且E方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$.

解法二:

由(1)知,双曲线E方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4a^2}=1$.

设直线l方程为$x=my+t$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

依题意得$-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2}$.

由$\begin{cases}x=my+t,\\y=2x\end{cases}$得$y_1=\dfrac{2t}{1-2m}$,同理得$y_2=\dfrac{-2t}{1+2m}$.

设直线l与x轴相交于点C,则$C(t,0)$.

由$S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}|OC|\cdot|y_1-y_2|=8$,

得$\dfrac{1}{2}|t|\cdot\left|\dfrac{2t}{1-2m}+\dfrac{2t}{1+2m}\right|=8$,

所以$t^2=4|1-4m^2|=4(1-4m^2)$.

由$\begin{cases}x=my+t,\\\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{4a^2}=1\end{cases}$得$(4m^2-1)y^2+8mty+4(t^2-a^2)=0$.

因为$4m^2-1<0$,直线l与双曲线E有且只有一个公共点当且仅当$\Delta=64m^2t^2-16(4m^2-1)(t^2-a^2)=0$,

即$4m^2a^2+t^2-a^2=0$,即$4m^2a^2+4(1-4m^2)-a^2=0$,

即$(1-4m^2)(a^2-4)=0$,

所以$a^2=4$,

所以,存在总与l有且只有一个公共点双曲线E,且E方程为$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1$.

解法三:

当直线l不与x轴垂直时,设直线l方程为$y=kx+m$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

依题意得$k>2$或$k<-2$.

由$\begin{cases} y=kx+m \\ 4x^2-y^2=0 \end{cases}$得$(4-k^2)x^2-2kmx-m^2=0$,

因为$4-k^2<0$,$\Delta>0$,所以$x_1x_2=\frac{-m^2}{4-k^2}$,

又因为△OAB面积为8,

所以$\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\cdot\sin\angle AOB=8$,又易知$\sin\angle AOB=\frac{4}{5}$,

所以$\frac{2}{5}\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}=8$,化简得$x_1x_2=4$.

所以$\frac{-m^2}{4-k^2}=4$,即$m^2=4(k^2-4)$.

由(1)得双曲线E方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4a^2}=1$,

由$\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4a^2}=1 \end{cases}$得$(4-k^2)x^2-2kmx-m^2-4a^2=0$,

因为$4-k^2<0$,直线l与双曲线E有且只有一个公共点当且仅当$\Delta=4k^2m^2+4(4-k^2)(m^2+4a^2)=0$,

即$(k^2-4)(a^2-4)=0$,所以$a^2=4$,

所以双曲线E方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$.

当$l\perp x$轴时,由$\triangle OAB$面积等于8可得$l:x=2$,又易知$l:x=2$与双曲线E: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$有且只有一个公共点.

总而言之,存在总与l有且只有一个公共点双曲线E,且E方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$.

评析　本题主要考查双曲线方程与性质、直线与圆锥曲线位置关系等基础知识,考查抽象概括能力、推理论证能力、运算求解能力,考查特殊与普通思想、数形结合思想、分类与整合思想、函数与方程思想.

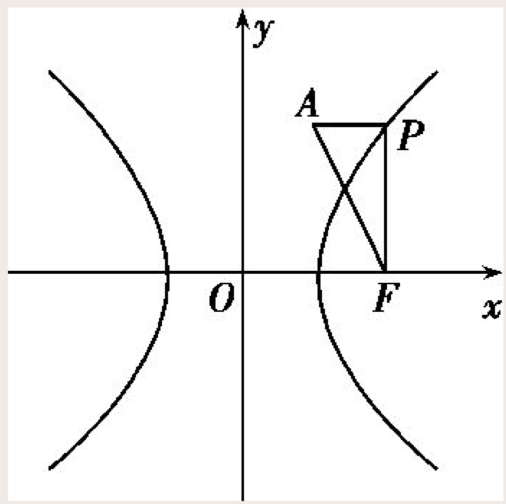
考点二　双曲线性质

1.(课标全国Ⅰ文改编,5,5分)已知F是双曲线$C:x^2-\frac{y^2}{3}=1$右焦点,P是C上一点,且PF与x轴垂直,点A坐标是$(1,3)$,则$\triangle APF$面积为________.

答案 $\frac{3}{2}$

解析 本题考查双曲线几何性质.

易知$F(2,0)$,不妨取P点在x轴上方,如图.



$\because PF\perp x$轴,

$\therefore P(2,3),|PF|=3$,又$A(1,3)$,

$\therefore |AP|=1,AP\perp PF$,

$\therefore S_{\triangle APF}=\frac{1}{2}\times3\times1=\frac{3}{2}$.

2.(北京文,10,5分)若双曲线$x^2-\frac{y^2}{m}=1$离心率为$\sqrt{3}$,则实数$m=$________.

答案　2

解析　本题考查双曲线性质.

由题意知,$a^2=1,b^2=m$.

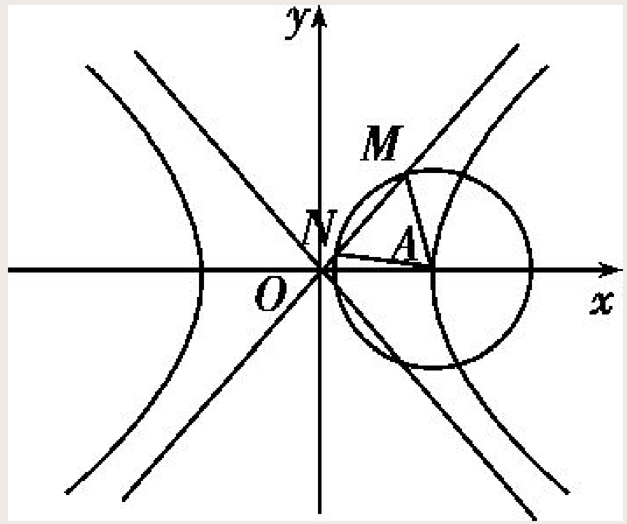
$\because e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{m}{1}}=\sqrt{3}$,$\therefore m=2$.

3.(课标全国Ⅰ理,15,5分)已知双曲线C:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$右顶点为$A$,以$A$为圆心,$b$为半径作圆$A$,圆$A$与双曲线$C$一条渐近线交于$M,N$两点.若$\angle MAN=60°$,则$C$离心率为________.

答案　$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

解析　本题考查双曲线几何性质和圆性质.

不妨设点M、N在渐近线$y=\frac{b}{a}x$上,如图,△AMN为等边三角形,且$|AM|=b$,



则A点到渐近线$y=\frac{b}{a}x$距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}b$,

又将$y=\frac{b}{a}x$变形为普通形式为$bx-ay=0$,则$A(a,0)$到渐近线$bx-ay=0$距离$d=\frac{|ba|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|ab|}{c}$,所以$\frac{|ab|}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}b$,即$\frac{a}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以双曲线离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

4.(山东理,14,5分)在平面直角坐标系xOy中,双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$右支与焦点为$F$抛物线$x^2=2py(p>0)$交于$A,B$两点.若$|AF|+|BF|=4|OF|$,则该双曲线渐近线方程为________.

答案 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$

解析 本题考查双曲线、抛物线基础知识,考查运算求解能力和方程思想方法.

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.

因为$4|OF|=|AF|+|BF|$,所以$4\times\frac{p}{2}=y_1+\frac{p}{2}+y_2+\frac{p}{2}$,即$y_1+y_2=p$①.由$\begin{cases}x^2=2py,\\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$消去$x$,得$a^2y^2-2pb^2y+a^2b^2=0$,所以$y_1+y_2=\frac{2pb^2}{a^2}$②.由①②可得$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,故双曲线渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$.

思绪分析 由抛物线定义和$|AF|+|BF|=4|OF|$可得y_1+y_2值(用p表示).再联立双曲线和抛物线方程,消去x得关于y一元二次方程,由根与系数关系得y_1+y_2.从而得$\frac{b}{a}$值,进而得渐近线方程.

解题关键 求渐近线方程关键是求 $\frac{b}{a}$ 值,利用题中条件建立等量关系是突破口,注意到$|AF|$、$|BF|$为焦半径,所以应利用焦半径公式求解.又A、B为两曲线交点,所以应联立它们方程求解.这么利用y_1+y_2这个整体来建立等量关系便可求解.

5.(课标Ⅰ改编,5,5分,0.801)已知$M(x_0,y_0)$是双曲线C: $\frac{x^2}{2}-y^2=1$上一点,F_1,F_2是C两个焦点.若$\overrightarrow{MF_1}\ \overrightarrow{MF_2}$0,则$y_0$取值范围是________.

答案 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

解析 若$\overrightarrow{MF_1}\ \overrightarrow{MF_2}$,则点$M$在以原点为圆心,半焦距$c=\sqrt{3}$为半径圆上,则$\begin{cases}x_0^2+y_0^2=3,\\ \frac{x_0^2}{2}-y_0^2=1,\end{cases}$解得$y_0^2=\frac{1}{3}$.可知$\overrightarrow{MF_1}\ \overrightarrow{MF_2}0\Rightarrow$点$M$在圆$x^2+y^2=3$内部$\Rightarrow y_0^2<\frac{1}{3}\Rightarrow y_0\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

6.(课标Ⅱ改编,11,5分,0.692)已知A,B为双曲线E左,右顶点,点M在E上,△ABM为等腰三角形,且顶角为120°,则E离心率为________.

答案 $\sqrt{2}$

解析 设双曲线E标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,则$A(-a,0)$,$B(a,0)$,不妨设点$M$在第一象限内,则易得$M(2a,\sqrt{3}a)$,又$M$点在双曲线$E$上,于是 $\frac{(2a)^2}{a^2}-\frac{(\sqrt{3}a)^2}{b^2}=1$,解得$b^2=a^2$,∴$e=\ =\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$ $\sqrt{2}$

7.(课标全国Ⅱ理改编,11,5分)已知F_1,F_2是双曲线E: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$左,右焦点,点$M$在$E$上,$MF_1$与$x$轴垂直,$\sin\angle MF_2F_1=\frac{1}{3}$,则$E$离心率为________.

答案 $\sqrt{2}$

解析 解法一:由$MF_1\perp x$轴,可得$M\left(-c,\frac{b^2}{a}\right)$,$\therefore|MF_1|=\frac{b^2}{a}$.由$\sin\angle MF_2F_1=\frac{1}{3}$,可得$\cos\angle MF_2F_1=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,又$\tan\angle MF_2F_1=\frac{|MF_1|}{|F_1F_2|}=\frac{\frac{b^2}{a}}{2c}$,$\therefore\frac{\frac{b^2}{a}}{2c}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$,$\therefore b^2=\frac{\sqrt{2}}{2}ac$,$\because c^2=a^2+b^2\Rightarrow b^2=c^2-a^2$,$\therefore c^2-a^2-\frac{\sqrt{2}}{2}ac=0\Rightarrow e^2-\frac{\sqrt{2}}{2}e-1=0$,$\therefore e=\sqrt{2}$

解法二:由$MF_1\perp x$轴,得$M\left(-c,\frac{b^2}{a}\right)$,$\therefore|MF_1|=\frac{b^2}{a}$,由双曲线定义可得$|MF_2|=2a+|MF_1|=2a+\frac{b^2}{a}$,又$\sin\angle MF_2F_1=\frac{|MF_1|}{|MF_2|}=\frac{\frac{b^2}{a}}{2a+\frac{b^2}{a}}=\frac{1}{3}\Rightarrow a^2=b^2\Rightarrow a=b$,$\therefore e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{2}$

解题思绪 解法一是利用三角函数知识求出$\tan\angle MF_2F_1$,得到关于a,b,c一个等式;解法二是先由双曲线定义得出$|MF_2|$,再由$\sin\angle MF_2F_1=\frac{1}{3}$得到关于$a,b$一个等式,最终求出$e$.

8.(课标Ⅰ改编,4,5分,0.472)已知F为双曲线$C:x^2-my^2=3m(m>0)$一个焦点,则点F到C一条渐近线距离为________.

答案 $\sqrt{3}$

解析 由题意知,双曲线标准方程为$\frac{x^2}{3m}-\frac{y^2}{3}=1$,其中$a^2=3m,b^2=3$,故$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3m+3}$,不妨设$F(\sqrt{3m+3},0)$为双曲线右焦点,故其中一条渐近线方程为$y=\frac{1}{\sqrt{m}}x$,即$x-\sqrt{m}y=0$,由点到直线距离公式可得$d=\frac{|\sqrt{3}\cdot\sqrt{m+1}|}{\sqrt{1+(-\sqrt{m})^2}}=\sqrt{3}$

评析　本题考查双曲线方程、性质以及点到直线距离公式等基础知识,考查考生对知识灵活利用能力和运算求解能力.

9.(天津改编,4,5分)已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$($a$>0,$b$>0)焦距为$2\sqrt{5}$,且双曲线一条渐近线与直线2$x$+$y$=0垂直,则双曲线方程为________.

答案　$\frac{x^2}{4}-y^2=1$

解析　由题意可得$\begin{cases}\frac{b}{a}=\frac{1}{2},\\ a^2+b^2=5,\\ a>0,b>0,\end{cases}$解得$a$=2,$b$=1,所以双曲线方程为$\frac{x^2}{4}-y^2=1$.

易错警示　易将双曲线标准方程中a,b,c之间关系与椭圆标准方程中a,b,c之间关系混同,这是失分主要原因.

评析　本题主要考查双曲线几何性质,双曲线标准方程求法,考查学生对基础知识和基本技能应用能力,考查方程思想方法应用.