华师一附中 2024 届高三高考考前素养卷

数 学 试 题

一.选择题: 本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的 4 个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 设复数 $z=\frac{-i^2+i}{-1-i^3}$,则 $\bar{z}$ 的虚部是

A. 1　B. -1　C. i　D. $-i$

2. 设双曲线 C:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F ,过 F 作双曲线的一条渐近线的垂线, 垂足为 H ,若 $\overrightarrow{FH}\cdot\overrightarrow{FO}=a^2$ (O 为坐标原点),则双曲线 C 的离心率为

A. $\sqrt{3}$　B. 3　C. 2　D. $\sqrt{2}$

3. 若命题 " $\exists a\in[1,3],ax^2+(a-2)x-2>0$ " 是假命题,则 x 不能等于

A. -1　B. 0　C. 1　D. $\frac{2}{3}$

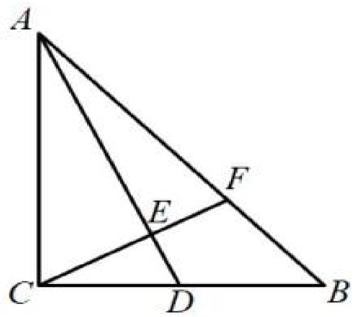
4. 函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$ 向左平移 φ 个单位后在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 单调递增,则 $\varphi=$

A. $\frac{\pi}{3}$　B. $\frac{\pi}{2}$　C. $\frac{\pi}{6}$　D. $\frac{2\pi}{3}$

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,若 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列,且 $S_{10}=0,S_6=2S_3+18$,则 $a_1=$ （ ）

A. 1　B. -9　C. 10　D. -10

6. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90°,AC=BC=1,D$ 是 CB 边的中点,过点 C 作 $CE\perp AD$ 于点 E ,延长 CE 交 AB 于点 F ,则 $BF=$



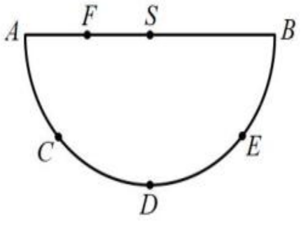
(第 6 题图)

A. $\frac{3}{4}$　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

7. $\frac{C_{29}^0}{1\times2}+\frac{C_{29}^1}{2\times3}+\frac{C_{29}^2}{3\times4}+\cdots\frac{C_{29}^{29}}{30\times31}=$

A. $\frac{2^{30}-31}{930}$　B. $\frac{2^{31}-32}{930}$　C. $\frac{2^{30}-31}{870}$　D. $\frac{2^{31}-32}{870}$

8. 如图所示是一个以 AB 为直径,点 S 为圆心的半圆,其半径为 4,F 为线段 AS 的中点,其中C,D,E 是半圆圆周上的三个点,且把半圆的圆周 分成了弧长相等的四段,若将该半圆围成一个以 S 为顶点的圆锥的侧面,则 在该圆锥中下列结论正确的是



(第 8 题图)

A. $\triangle CEF$ 为正三角形　　B. $SA\perp$ 平面 CEF

C. $SD//$ 平面 CEF　　D. 点 D 到平面 CEF 的距离为 $2\sqrt{3}$

二.选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分.在每小题给出的选项中, 有多 项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 设函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-2x^2+2x$,则下列结论正确的是 (

A. 存在实数 x_0 使得 $f(x_0)=f'(x_0)$　　B. 方程 $f(x)=3$ 有唯一正实数解

C. 方程 $f(x)=-1$ 有唯一负实数解　　D. $f(x)=1$ 有负实数解

10. 已知随机事件 A,B 满足 $P(A\bar{B})=P(\bar{A}B)=\frac{1}{4},P(A+B)=1$,则下列结论正确的是 ( )

A. $P(A)=P(B)$　　B. $P(A)=\frac{3}{4}$　　C. $P(B|A)=P(B)$　　D. $P(\bar{A}|B)=\frac{1}{3}$

11. 设点 $A(x_1,y_1)(x_1\neq 0)$ 是抛物线 $y^2=4x$ 上任意一点,过点 A 作抛物线 $x^2=4y$ 的两条切 线,分别交抛物线 $y^2=4x$ 于点 $B(x_2,y_2)$ 和点 $C(x_3,y_3)$,则下列结论正确的是 ( )

A. $(y_1+y_2)y_1y_2=-8$　　B. $y_1+y_2+y_3=0$

C. $y_1y_2y_3=16$　　D. 直线 BC 与抛物线 $x^2=4y$ 相切

三.填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12.已知曲线 $f(x)=\ln x+\frac{x^2}{a}$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$,则 a 的值为_________.

13. 已知 $0<x<a,0<y<a$,若有且只有一组数对 (x,y) 满足不等式 $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-a)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-a)^2}+\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}\leq 2\sqrt{2}$,则实数 a 的取 值集合为_________.

14. 在三棱锥中 $P-ABC,AB=BC=2\sqrt{2}$,且 $AB\perp BC$,记直线 PA,PC 与平面 ABC 所 成角分别为 α,β ,已知 $\beta=2\alpha=60^\circ$,当三棱锥 $P-ABC$ 的体积最小时,则三棱锥$P-ABC$ 外接球的表面积为_________.

四. 解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

15.(本题满分 13 分)在等差数列 $\{a_n\}(n\in N^*)$ 中, $a_1+a_2=11,a_3=10$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2）若 $b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}a_{n+2}}$,数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ,证明: $T_n<\frac{1}{168}$.

16.(本题满分 15 分) 如图 1,在矩形 $ABCD$ 中, $AB=2,BC=2\sqrt{3}$,将 $\triangle ABD$ 沿矩形的对 角线 BD 进行翻折,得到如图 2 所示的三棱锥 $A-BCD$,且 $AB\perp CD$.

（1）求翻折后线段 AC 的长;

（2）点 M 满足 $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MD}$,求 CM 与平面 ABD 所成角的正弦值.

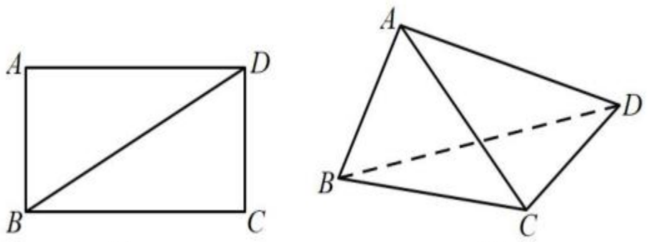


图1　　图2

(第 16 题图)

17. (本小题满分 15 分) 已知函数 $f(x)=e^x+ax^2-e,a\in R$. (注: $e=2.71828\cdots$ 是自然 对数的底数)

（1）若 $f(x)$ 无极值点,求实数 a 的取值范围;

（2） 当 $x\geq 0$ 时, $f(x)\geq \frac{1}{2}x^3+x-e+1$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

18.(本小题满分 17 分) 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的半长轴的长度与焦距相等,且 过焦点且与 x 轴垂直的直线被椭圆截得的弦长为 3,

（1）求椭圆 C 的方程;

（2）已知直线 $l_0:x+2y-2=0$ 与椭圆 C 交于 A,B 两点,过点 $P(2,3)$ 的直线交椭圆 C 于 E,F 两点 (E 在靠近 P 的一侧).

(i) 求 $\frac{|PE|}{|PF|}$ 的取值范围;

(ii) 在直线 l_0 上是否存在一定点 M ,使 $\angle EMA=\angle FMA$ 恒成立? 若存在,求出 M 点的 坐标; 若不存在, 请说明理由.

19. (本小题满分 17 分) 泊松分布是一种重要的离散型分布, 用于描述稀有事件的发生情况. 如果随机变量 X 的所有可能取值为 0,1,2,⋯ ,且 $P(x=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},k=0,1,2,\cdots$ 其中 $\lambda>0$, 则称 X 服从泊松分布,记作 $X\sim P(\lambda)$.

（1） 设 $X\sim P(\lambda)$,且 $P(X=1)=P(X=3)$,求 $P(X=2)$;

（2）已知当 $n\geq 20,0<p\leq 0.05$ 时,可以用泊松分布 $P(np)$ 近似二项分布 $B(n,p)$,即 对于 $X\sim B(n,p),Y\sim P(np)$,当 k 不太大时,有 $P(X=k)\approx P(Y=k)$.

(i) 已知甲地区共有 100000 户居民，每户居民每天有 0.00010 的概率需要一名水电 工。试估计某天需要至少 2 名水电工的概率;

(ii) 在 (i) 的基础上,已知乙地区共有 200000 户居民,每户居民每天有 0.00004 的概率需要一名水电工。试估计某天两个地区一起至少需要 3 名水电工的概率.

数 学 试 题 参 考 答 案

总分：150 分 考试时同：120 分钟 命审题：数学核心素养小组

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的.

1. 【答案】A

【解析】$z=\frac{1+i}{-1+i}=-\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-i$,则三=i, 虚部是 1,选 A

2. 【答案】D

【解析】∵FH·FO-|FH|FOcos<FH、FO>=b-ccos<FH,FO>=b²-a²,∴c²=2a³

∴离心率 e=、2

3. 【答案】C

【解析】淘法法或写出真命题，然后根据主元思想求出 X 的取值范围.

4. 【答案】 B

【解析】函数 f(x)=sin(2x+0) 向左平移 φ 个单位后为 f(x+o)=sin(2x+3o), 当

时，2x+3p∈[30,x+30].∵f(x+o)=sin(2x+3o) 单调递增，且 0<g<x,: $3\varphi=\frac{3\pi}{2}$ … $\varphi=\frac{\pi}{2}$

5.【答案】B

【解析 1 设数列， 的公差为 d, 首项为 a,∵S,=2S,+18, 两边同除以 6 得： ∴3d=3,

解得 d=1, 又 S。=0, 即：$\frac{S_{10}}{10}=a_1+9d=0$),解得 q=-9, 故选：B

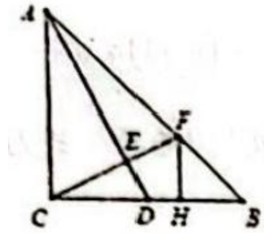
6. 【答案】C

【解析】(方法一)设 AF=λAB,~~∵AD~~⊥CF,∴AD.C~~F=0~~,∴ $\frac{\overline{AC}+\overline{AB}}{2}\cdot(\overline{AF}-\overline{AC})=0$

∴(AC+AB)·(AAB-AC)=0,∴(A-I)AB.AC+λAB²-AC²=0,∵AC=BC=1,

∴A~~C²=~~1,AB²=2,AB.AC=1, 代入解得.$\lambda=\frac{2}{3}$.∴ $\overline{AF}=\frac{2}{3}\overline{AB}$.: ,故选 C

(方法二)因为∠ACB=90°,AC=BC, 所以 aABC 为等腰直角三角形，又因 为 AC=1,AD 为 中 线 ，所 以 BC=1, $CD=BD=\frac{1}{2}$ ，所 以 $AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.因为 CE⊥AD,



所以∠CED=90°, 所以

即$CE=\frac{AC\cdot CD}{AD}=\frac{1\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$AD.CE=AC\cdot CD$, 以$\frac{\frac{\sqrt{5}}{10}}{\frac{\sqrt{5}}{5}}=\frac{x}{1-x}$

以$DE=\sqrt{CD^2-CE^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{10}$

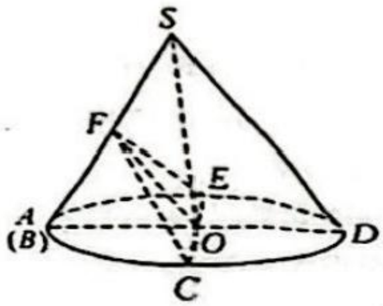
,m

过成F作FH⊥CB交CB于点N, 所以∠FHB- , *因为*$\tan\angle FCB=\frac{DE}{CE}=\frac{FH}{CH}$, *设FH=HB=x, 则*

$x=\frac{1}{3}$, $BF=\frac{\sqrt{2}}{3}$.*

\- - - - - -

.



7. 【答案】B

【解析】

$\because\frac{C_{29}^{k}}{(k+1)\times(k+2)}=\frac{29!}{k!(29-k)!}\cdot\frac{1}{(k+1)\times(k+2)}=\frac{29!}{(k+2)!(29-k)!}=\frac{31!}{(k+2)!(29-k)!}\cdot\frac{1}{30\times31}$

中$k=0,1,2\cdots\cdots29$, $\therefore\frac{C_{29}^{0}}{1\times2}+\frac{C_{29}^{1}}{2\times3}+\frac{C_{29}^{2}}{3\times4}+\cdots+\frac{C_{29}^{29}}{30\times31}=\frac{1}{30\times31}(C_{31}^{2}+C_{31}^{3}+\cdots C_{31}^{31})=\frac{2^{31}\cdot}{30\times31}$ 930

选B.

8.【答案】C

【解析】选项A,该半圆田成的圆锥如图所示，设圆锥底面半径为r,

则2πr=4π,∴r=2,∴CE=4,∵F 为AS 的中点，O为AS的中点，

∴FO//SD,」 且$SO=2=\frac{1}{2}CE$,∴∠CFE=90*,△CEF 为等腰直角三角形，选项A错误；

选项B,若SA⊥平面CEF, 则∠AFO=90°, 直角ACEF 中，

AO=OF=AF=2,∴∠AFO=60”, 选项B错误；

选项C,∵FOI/SD,∴SD// 平面CEF, 选项C正确：

选项D,∵CE⊥AD,CE⊥SO,∴CE⊥ 平面SAD,∴ 平面CEF⊥ 平面SAD,∴D 到直线FO 的距离即为D 到平面CEF 的距离，又∵FO//SD,∴D 到直线FO 的距离等于O 到直线SD 的距离，为√3,选项D错误：故正确选项为C

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题 目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分。

9. 【答案】ABC

【解析】由题意可知，函数

$f(x)=\frac{1}{2}x^3-2x^2+2x=\frac{1}{2}x(x^2-4x+4)=\frac{1}{2}x(x-2)^2$，而 $f'(x)=\frac{1}{2}(x-2)(3x-2)$，

结合图像易得.故正确选项为 ABC

10.【答案】ABD

【解析】∵ NA)=AXAB)+F(AB)∴P(AB)=P(A)-P(AB). $P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{4}$

∵PXB)=NAB)+NAB)∴NAB)=XB)-P(AB),

∵PAE)-PAB)∴NA)-NAB)=P(B)-P(AB),∴P(A)=P(B), 故 A 正确;

∵NA+B)=/(A)+F(B)-/XAB)-1 ∴P(AB)=2P(A)-1,又∵

解得$P(A)=\frac{3}{4}$ $P(AB)=\frac{1}{2}$ 、故B正确:

$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{2}\div\frac{3}{4}=\frac{2}{3}\neq P(B)$，故C 不正确:

$P(\bar{A}|B)=\frac{P(\bar{A}B)}{P(B)}=\frac{1}{4}\times\frac{4}{3}=\frac{1}{3}$、故D 正确;

综上，选ABD

11.【答案】BCD

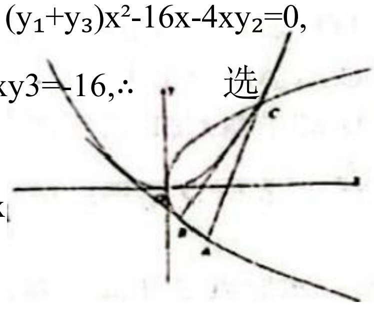
【解析】"直线AB 的斜率为$k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{y_1-y_2}{\frac{y_1^2}{4}-\frac{y_2^2}{4}}=\frac{4}{y_1+y_2}$

∴直线AB 的方程为$y-y_1=\frac{4}{y_1+y_2}(x-x_1)$, 即$(y_1+y_2)y-y^2-y,y_2=4x-4x$,∵$y^2=4x_1$,

∴直线 AB 的方程为 $Uy+y_2)y-y;y_2=4x$, 联立 $x^2=4y$, 消 y 得：$(y_1+y_3)x^2-16x-4xy_2=0$,

∵直线 AB 与抛物线 $x^2=4y$ 相切，∴$\Delta=16^2+16(y+y_2)V:=0$,∴$OY+y_2)xy3=-16$,∴ 选

项A 错误:



同理可得 $0y+y,)y,yy,=-16$,∴$G;+y;)y_2=(x+y,)yyy$,∵$y\neq0$,∴$0_1+y_2)_2=0Y+y_3)x$

整理得 $V_2-y,)U_1+y_2+y,)=0$,∵$y;\neq y;$,∴$y+y_2+y=0$,∴ 选项 B 正

确;

由 $+y_2+y;=0$ 可得 $y+y;=-yy$, 代入 $Cy+y_3)xy_2=-16$ 得Y =16

∴选项 C 正确:

将直线 BC 的方程与抛物线$x^2=4y$ 联立，同理可得

$\Delta=16^2+16(y_2+y_3)y_2y_3=16^2-16y;y_2J_3=0$,

∴直线BC 与抛物线 $x^2=4y$ 相切，∴选项 D 正确；综上所述，正确

选项为BCD

三 、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

·2.【答案】a=√3+1

【解析】:函数$f(x)=\ln x+\frac{x^2}{a}$的导数$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2x}{a}$, ∵函数 tx) 在 x=1 处的倾斜角为$\frac{\pi}{3}$,

∴ $f'(1)=1+\frac{2}{a}=\sqrt{3}$ $\frac{2}{a}=\sqrt{3}-1$, ∴a=√5+1

13.【答案】{1

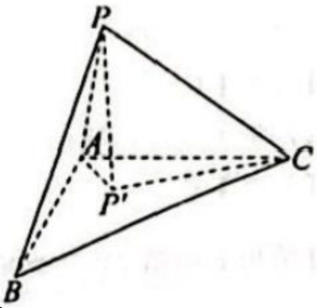
【解析】如图所示，0<x<a,0<y<a,A(a,0),B(a,a),C(0,a),P(x,y)

√F+y²+√(x-a}+y³+√F²+(y-a)+√(x-a)³+(y-a)³=|PO|+|PJl+|Pc|+|r

=|Po|+|PB|+|PA|+|PC|≥|OB|+|AC|=2√Za

∵有且只有一组数对(x,y) 满足不等式∴a=1,a 的取值集合为{1}

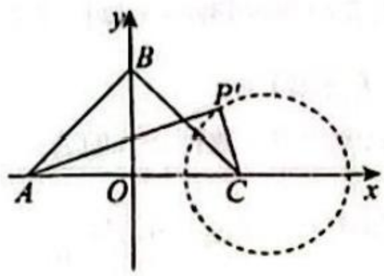
14. 【答案】16n



【解析】设点 P 在平面 ABC 内的投影为 P, 因为直线 PA,PC 与平面 β ,且 P=2a=60°, 则 α=30°,根据线面夹角关系可知|PP|=√3|PC|,

$|P'P|=\frac{\sqrt{3}}{3}|P'A|$,

所以 3|PC|=|PA|, 由阿波罗尼斯圆可知，投影 P 在圆上运动，以 AC 为 x 轴，过 AC 的中点 O 作垂线，建立如图所示直角坐标系.令 P(x,y), 由题可知 A(-2,0),B(0,2),C(2,0).



则 3√(x-2)²+y²-√(x+2)+y²,化简得 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}$,

可知 P 在以 $\left(\frac{5}{2},0\right)$为圆心，半径为 $\frac{3}{2}$ 的圆上，

当|PC| 最小时， IPP| 最小，即三棱锥 P-ABC 的体积最小，

此时 Pa.0), $|P'C|_{min}=\frac{3}{2}-\left(\frac{5}{2}-2\right)=1$,IPpL=√5,IPB|√5,

∴P 点在底面 ABC 上的射影 P 在 AC 上，且∠APC=90, 又∠ABC=90°

∴此时三棱锥 P-ABC 的外接球的球心为 AC 的中点，外接球的半径

$R=\frac{1}{2}AC=2$, ∴Snmam=4πR²=4π·2²=16π

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.【解析】(1)设等差数列{a.}的公差为 d, 因为 $\begin{cases}a_2=11\\a_3=10\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2a_1+d=11\\a_1+2d=10\end{cases}$ 解得, $\begin{cases}a_1=4\\d=3\end{cases}$,

所以 $a_4=a_1+(n-1)d=4+3(n-1)=3n+1$.

所以数列{o,}的通项公式为 a,=3n+1 ....4 分