专题 8 圆锥曲线的第二定义与焦点弦

网络构建

夯基·必备基础知识梳理

<u>焦点弦定义：</u>过焦点的直线与曲线相交于两点 A、B，弦 AB 叫做曲线的焦点弦。

秒杀题型一：椭圆与双曲线焦点弦中常考的秒杀公式：

①焦点弦长公式：$\dfrac{\frac{2b^2}{a}}{\left|1-e^2\cos^2\theta\right|}$（$\theta$ 为直线与焦点所在轴的夹角），通径：$\dfrac{2b^2}{a}$（最短焦点弦）；

②焦点弦被焦点分成两部分 m,n，则 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{2a}{b^2}$（定值）（取通径即可）。

③ $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{BF}$，则有 $e\left|\cos\theta\right|=\left|\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|$（$\theta$ 为直线与焦点所在轴的夹角）。

秒杀题型二：抛物线的焦点弦中常考的秒杀公式：

①过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 焦点的直线交抛物线于 A、B 两点，则：$y_Ay_B=-p^2$，$x_Ax_B=\dfrac{p^2}{4}$。（焦点在 y 轴上的性质对比给出。）

引伸：M $(a,0)$ $(a>0)$ 在抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的对称轴上，过 M 的直线交抛物线于两点。

$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，$y_1.y_2=-2pa$（定值）。

②$|AB|=\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}$（$\alpha$ 是直线 AB 与焦点所在轴的夹角）$=x_1+x_2+p$（焦点在 x

轴正半轴上)(其它三种同理可以推导)，焦点弦中通径(垂直于对称轴的焦点弦, 长为$2p$)最短。

③$\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{BF}$，则有$|\cos\theta|=\left|\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|$，$|AF|=\dfrac{p}{1-\cos\theta}$，$|BF|=\dfrac{p}{1+\cos\theta}$($\theta$为直线与焦点所在轴的夹角)。

④面积: $S_{\Delta AOB}=\dfrac{p^2}{2\sin\theta}$，$S_{AMNB}=\dfrac{2p^2}{\sin^3\theta}$($\theta$是直线$AB$与焦点所在轴的夹角)。

⑤以AB为直径的圆与准线MN相切，切点为MN中点Q，AQ,BQ分别是抛物线的切线，并且分别是$\angle MAB,\angle NBA$的角平分线。

⑥以MN为直径的圆与AB相切，切点为焦点F。

⑦以焦半径为直径的圆与y轴相切。

⑧A,O,N三点共线, B,O,M三点共线。

⑨$\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{2}{p}$(定值)。

⑩设抛物线的顶点为O，经过焦点垂直于轴的直线和抛物线交于两点B,C，经过抛物线上一点P垂直于轴的直线和轴交于点Q，线段$|PQ|$是$|BC|$和$|OQ|$的比例中项。

提升·必考题型归纳

【一】、椭圆中的焦点弦问题

例1． 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$过焦点$F$的直线$l$与椭圆C交于A，B两点（点A位于$x$轴上方)，若$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，则直线$l$的斜率$k$的值为__________.

【答案】$\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

【解析】由题可得$-y_1=2y_2$，联立直线与椭圆，利用韦达定理建立关系即可求出.

【详解】由题，点A位于x轴上方且$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，则直线$l$的斜率存在且不为0，

$F(1,0)$，设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则可得$-y_1=2y_2$，

设直线l方程为$x=ty+1$，

联立直线与椭圆$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\x=ty+1\end{cases}$可得$\left(3t^2+4\right)y^2+6ty-9=0$，

$\therefore\begin{cases}y_1+y_2=-\dfrac{6t}{3t^2+4}\\y_1y_2=\dfrac{-9}{3t^2+4}\end{cases}$，$\therefore y_2=\dfrac{6t}{3t^2+4},-2{y_2}^2=\dfrac{-9}{3t^2+4}$，

$\therefore -2\left(\dfrac{6t}{3t^2+4}\right)^2=\dfrac{-9}{3t^2+4}$，解得$t=\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

则直线的斜率为$\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

故答案为：$\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

【点睛】方法点睛：解决直线与圆锥曲线相交问题的常用步骤：

（1）得出直线方程，设交点为$A\left(x_1,\ y_1\right)$，$B\left(x_2,\ y_2\right)$；

（2）联立直线与曲线方程，得到关于x（或y）的一元二次方程；

（3）写出韦达定理；

（4）将所求问题或题中关系转化为x_1+x_2,x_1x_2形式；

（5）代入韦达定理求解.

例 2．过椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$的右焦点$F$作两条相互垂直的直线分别交椭圆于$A$，$B$，$C$，$D$四点，则$\dfrac{1}{|AB|}+\dfrac{1}{|CD|}$的值为(　　)

A．$\dfrac{1}{8}$　　B．$\dfrac{1}{6}$　　C．1　　D．$\dfrac{7}{12}$

【解答】解：由椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，得椭圆的右焦点为$F(1,0)$，

当直线AB的斜率不存在时，$AB:x=1$，

则$CD:y=0$．此时$|AB|=3$，$|CD|=4$，

则$\dfrac{1}{|AB|}+\dfrac{1}{|CD|}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{12}$；

当直线AB的斜率存在时，

设$AB:y=k(x-1)(k\neq 0)$，则$CD:y=-\dfrac{1}{k}(x-1)$．

又设点$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$．

联立方程组$\begin{cases} y=k(x-1) \\ 3x^2+4y^2=12 \end{cases}$，

消去 y 并化简得 $(4k^2+3)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$，

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{3+4k^2}, x_1x_2=\dfrac{4k^2-12}{3+4k^2}$，

$\therefore |AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(\dfrac{8k^2}{3+4k^2})^2-4\cdot\dfrac{4k^2-12}{3+4k^2}}=\dfrac{12(k^2+1)}{3+4k^2}$，

由题知，直线 CD 的斜率为 $-\dfrac{1}{k}$，

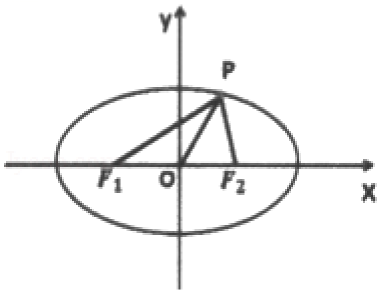
同理可得 $|CD|=\dfrac{12(k^2+1)}{4+3k^2}$.

$\therefore \dfrac{1}{|AB|}+\dfrac{1}{|CD|}=\dfrac{7(k^2+1)}{12(k^2+1)}=\dfrac{7}{12}$ 为定值.

故选：D.

小试牛刀

1．已知 P 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上的动点，F_1，F_2 分别是其左右焦点，O 是坐标原点，则 $\dfrac{|\overrightarrow{PF_1}|-|\overrightarrow{PF_2}|}{|\overrightarrow{PO}|}$ 的取值范围是__$[-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}]$__.



【解答】解：设 P 的坐标为 (m,n)

$\because$ 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 中，$a^2=8$，$b^2=4$，

$\therefore c=\sqrt{a^2-b^2}=2$，得椭圆的准线方程为 $x=\pm\dfrac{a^2}{c}$，即 $x=\pm4$

作出椭圆的右准线，设 P 在右准线上的射影为 Q，连结 PQ，

根据圆锥曲线的统一定义，得 $\dfrac{|PF_2|}{|PQ|}=e$，

$\therefore |PF_2|=e|PQ|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(4-m)=2\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}m$，同理可得 $|PF_1|=2\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}m$，

$\because |PO|=\sqrt{m^2+n^2}$，

$\therefore \dfrac{|\overrightarrow{PF_1}|-|\overrightarrow{PF_2}|}{|\overrightarrow{PO}|}=\dfrac{(2\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}m)-(2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}m)}{\sqrt{m^2+n^2}}=\dfrac{\sqrt{2}m}{\sqrt{m^2+n^2}}$

$\because$ 点 $P(m,n)$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上，得 $\dfrac{m^2}{8}+\dfrac{n^2}{4}=1$，

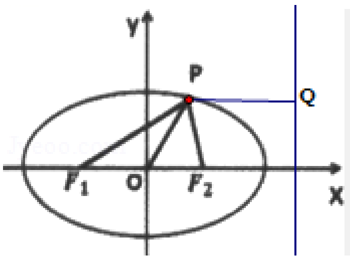
$\therefore n^2=4(1-\dfrac{m^2}{8})=4-\dfrac{m^2}{2}$，

由此可得 $\dfrac{|\overrightarrow{PF_1}|-|\overrightarrow{PF_2}|}{|\overrightarrow{PO}|}=\dfrac{\sqrt{2}m}{\sqrt{m^2+(4-\frac{m^2}{2})}}$，得 $(\dfrac{|\overrightarrow{PF_1}|-|\overrightarrow{PF_2}|}{|\overrightarrow{PO}|})^2=\dfrac{4m^2}{8+m^2}$，

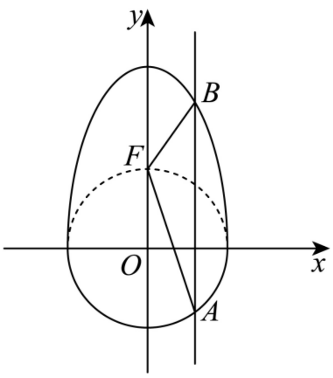
$\because m^2\in[0,\ a^2]$ 即 $m^2\in[0,\ 8]$，得 $\dfrac{4m^2}{8+m^2}\in[0,\ 2]$，

$\therefore \dfrac{|\overrightarrow{PF_1}|-|\overrightarrow{PF_2}|}{|\overrightarrow{PO}|}\in[-\sqrt{2},\ \sqrt{2}]$.

故答案为：$[-\sqrt{2},\ \sqrt{2}]$



2．（2024上·山东潍坊·高二统考期末）月光石是由两种长石混合组成的具有月光效应的长石族矿物.它的截面可近似看成由半圆和半椭圆组成，如图所示，在平面直角坐标系 xOy 中，半圆的圆心在坐标原点，半圆所在的圆过椭圆的上焦点 $F(0,1)$，半椭圆的短轴与半圆的直径重合.若直线 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 与半圆交于点 A，与半椭圆交于点 B，则△ABF 的面积为（　）



A．$\dfrac{9(\sqrt{2}+1)}{4}$　　B．$\dfrac{3(\sqrt{2}+1)}{2}$　　C．$\sqrt{2}+1$　　D．$\dfrac{\sqrt{2}+1}{4}$