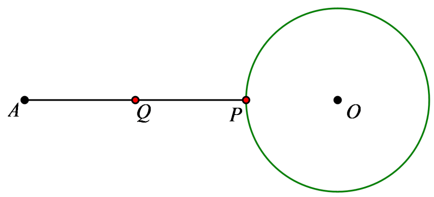
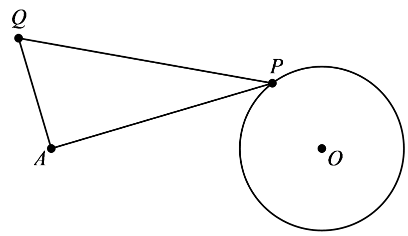
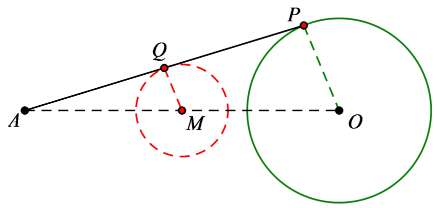
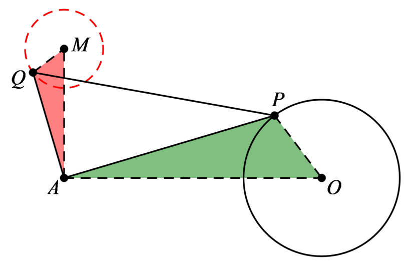
初中数学几何模型之圆弧轨迹型瓜豆原理专题

一．模型介绍

运动轨迹为圆弧型的瓜豆原理

<table>
<tr>
<td>模型
构造</td>
<td>(1) 如图，P 是圆 O 上一个动点，A 为定点，连接 AP，Q 为 AP 中点．Q 点轨迹是？

</td>
<td>(2) 如图，$\triangle APQ$ 是直角三角形，$\angle PAQ=90^\circ$ 且 $AP=k\cdot AQ$，当 P 在圆 O 运动时，Q 点轨迹是？

</td>
</tr>
<tr>
<td>解决
方法</td>
<td>

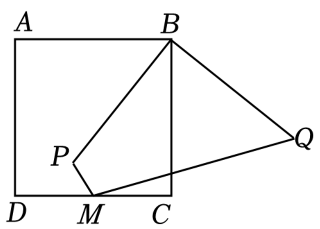
如图，连接 AO，取 AO 中点 M，任意时刻，均有 $\triangle AMQ \backsim \triangle AOP$，$\dfrac{OM}{OP}=\dfrac{AQ}{AP}=\dfrac{1}{2}$，则动点 Q 是以 M 为圆心，MQ 为半径的圆。</td>
<td>

如图，连结 AO，作 $AM\perp AO$，$AO:AM=k:1$；任意时刻均有 $\triangle APO \backsim \triangle AQM$，且相似比为 k。
则动点 Q 是以 M 为圆心，MQ 为半径的圆。</td>
</tr>
</table>

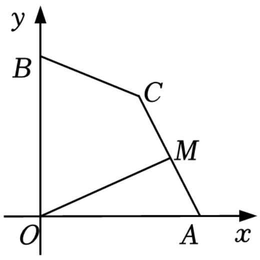
【最值原理】动点的轨迹为定圆时，可利用："一定点与圆上的动点距离最大值为定点到圆心的距离与半径之和，最小值为定点到圆心的距离与半径之差"的性质求解。

二．例题讲解

题目 1 如图，M 是正方形 $ABCD$ 边 CD 的中点，P 是正方形内一点，连接 BP，线段 BP 以 B 为中心逆时针旋转 90° 得到线段 BQ，连接 MQ．若 $AB=4$，$MP=1$，则 MQ 的最小值为 ______．



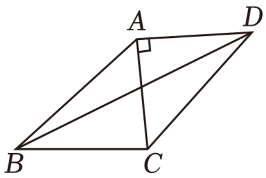
题目 2 如图，点 A、B 的坐标分别为 $A(\sqrt{2},0)$、$B(0,\sqrt{2})$，点 C 为坐标平面内一点，$BC=1$，点 M 为线段 AC 的中点，连接 OM，则 OM 最长为（　　）



A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{5}{2}$　　C. 2　　D. 3

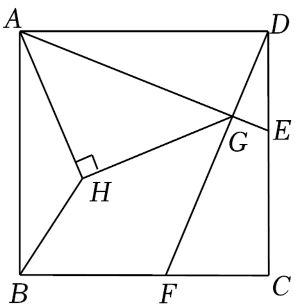
三. 巩固练习

题目 1 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=45°$，$AC=2$，以 AC 为边作等腰直角 $\triangle ACD$，连 BD，则 BD 的最大值是（　　）



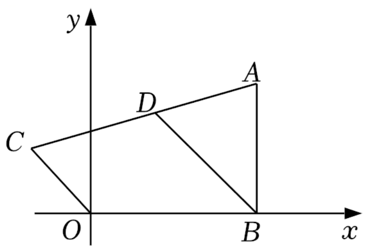
A. $\sqrt{10}-\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{10}+\sqrt{3}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{10}+\sqrt{2}$

题目 2 正方形 $ABCD$ 中，$AB=4$，点 E、F 分别是 CD、BC 边上的动点，且始终满足 $DE=CF$，DF、AE 相交于点 G. 以 AG 为斜边在 AG 下方作等腰直角 $\triangle AHG$ 使得 $\angle AHG=90°$，连接 BH. 则 BH 的最小值为（　　）



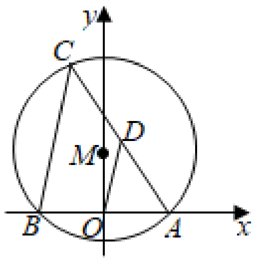
A. $2\sqrt{5}-2$　　B. $2\sqrt{5}+2$　　C. $\sqrt{10}-\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{10}+\sqrt{2}$

题目 3 如图，点 A 的坐标为 $(4,3)$，$AB\perp x$ 轴于点 B，点 C 为坐标平面内一点，$OC=2$，点 D 为线段 AC 的中点，连接 BD，则 BD 的最大值为（　　）



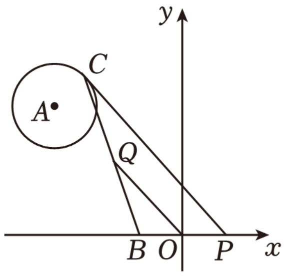
A. 3　　B. $\frac{7}{2}$　　C. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$　　D. $2\sqrt{5}$

题目 4 如图，点 M 坐标为 $(0,2)$，点 A 坐标为 $(2,0)$，以点 M 为圆心，MA 为半径作 $\odot M$，与 x 轴的另一个交点为 B，点 C 是 $\odot M$ 上的一个动点，连接 BC，AC，点 D 是 AC 的中点，连接 OD，当线段 OD 取得最大值时，点 D 的坐标为（　　）



A. $(0, 1+\sqrt{2})$　　　B. $(1, 1+\sqrt{2})$　　　C. $(2, 2)$　　　D. $(2, 4)$

题目 5 如图，点 A 的坐标为 $(-3, 3)$，点 P 的坐标为 $(1, 0)$，点 B 的坐标为 $(-1, 0)$，$\odot A$ 的半径为 1，C 为圆上一动点，Q 为 BC 的中点，连接 PC，OQ，则 OQ 长的最大值为（　　）



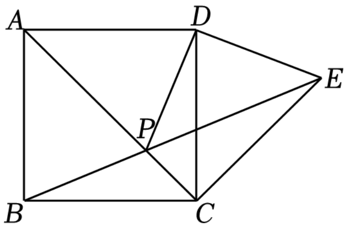
A. 5　　　B. 2.5　　　C. 6　　　D. 3

题目 6 如图，在正方形 $ABCD$ 中，$AB=2$，点 P 是对角线 AC 上一动点（不与 A，C 重合），连接 PD，PB. 过点 D 作 $DE \perp DP$，且 $DE=DP$，连接 PE，CE.

① $\angle APB=\angle CDE$；② PE 的长度最小值为 $\sqrt{2}$；

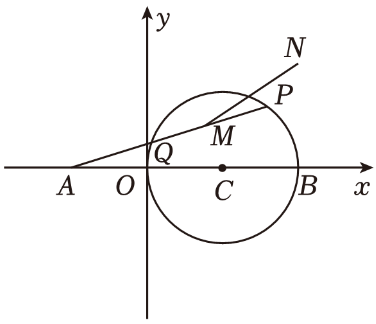
③ $PC^2+CE^2=2DE^2$；④ $CE+CP=2\sqrt{2}$.

以上判断，正确的有（　　）

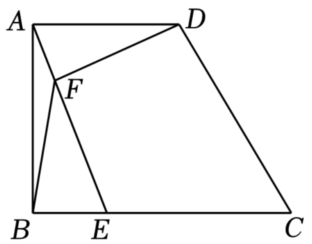


A. 1 个　　　B. 2 个　　　C. 3 个　　　D. 4 个

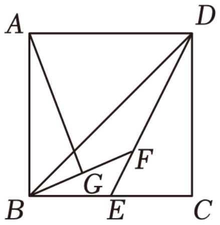
题目 7 如图，点 A，C，N 的坐标分别为 $(-2, 0)$，$(2, 0)$，$(4, 3)$，以点 C 为圆心、2 为半径画 $\odot C$，点 P 在 $\odot O$ 上运动，连接 AP，交 $\odot C$ 于点 Q，点 M 为线段 QP 的中点，连接 MN，则线段 MN 的最小值为 ______.



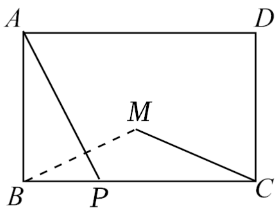
题目 8 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=\angle BAD=90°$，$AB=5$，$AD=4$，$AD<BC$，点 E 在线段 BC 上运动，点 F 在线段 AE 上，$\angle ADF=\angle BAE$，则线段 BF 的最小值为 __$\sqrt{29}-$ ______.



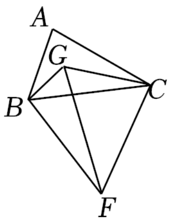
题目 9 如图正方形 $ABCD$ 的边长是 8，点 E 是 BC 边的中点，连接 DE，点 F 是线段 DE 上的一个动点，连接 BF，点 G 是线段 BF 的中点，则线段 AG 的最小值为 ______ $\sqrt{2}$ __.



题目 10 如图，在矩形 $ABCD$ 中，已知 $AB=3$，$BC=4$，点 P 是 BC 边上一动点（点 P 不与点 B，C 重合），连接 AP，作点 B 关于直线 AP 的对称点 M，连接 CM，则 CM 的最小值为 ______.

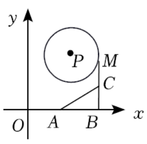


题目 11 如图，点 G 是 $\triangle ABC$ 内的一点，且 $\angle BGC=120^\circ$，$\triangle BCF$ 是等边三角形．若 $BC=3$，则 FG 的最大值为 ______ $\sqrt{3}$ __.



题目 12 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90^\circ$，$AB=2$，$BC=3$．点 D 为平面上一个动点，$\angle ADB=45^\circ$，则线段 CD 长度的最小值为 __ $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ ______.

题目 13 如图，点 $P(3,4)$，$\odot P$ 半径为 2，$A(2.8,0)$，$B(5.6,0)$，点 M 是 $\odot P$ 上的动点，点 C 是 MB 的中点，则 AC 的最小值是（　　）



A. 1.4　　B. $\frac{5}{2}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 2.6

题目 14 如图，已知 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle BAC=90^\circ$，点 D 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，连接 AD，BD，CD.

(1) 如图1，点D在BC上，$AD=\sqrt{10}$，且$\tan\angle CAD=\frac{1}{3}$，求$\triangle ABD$的面积；

(2) 如图2，点D为$\triangle ABC$内部一动点，将线段BD绕点B逆时针旋转90°得到线段BF，连接CF，点G是线段CD的中点，连接AG，猜想线段AG，CF之间存在的位置关系和数量关系，并证明你的猜想；

(3) 如图3，点C关于直线AB的对称点为点C'．连接AC'，BC'，点D为$\triangle ABC'$内部一动点，连接$C'D$．若$\angle BDC=90^\circ$，且$BC=8$，当线段$C'D$最短时，直接写出$\triangle ACD$的面积．

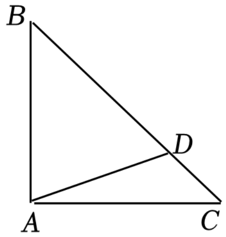


图1

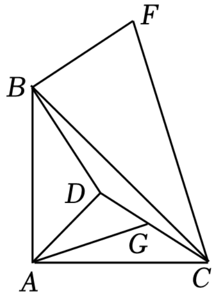


图2

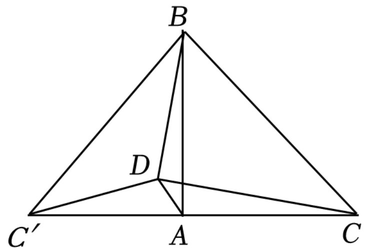


图3

题目 15 阅读理解：(1)【学习心得】

学习完“圆”这一章内容后，有一些几何问题，如果添加辅助圆，可以使问题变得容易．我们把这个过程称为“化隐圆为显圆”．这类题目主要是两种类型．

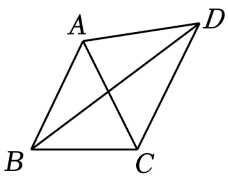


图1

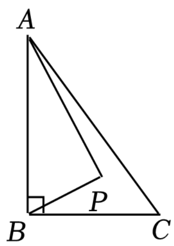


图2

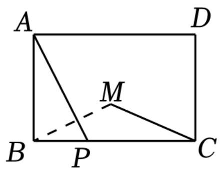


图3

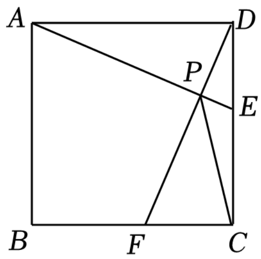


图4

①类型一，“定点＋定长”：如图1，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle BAC=52^\circ$，D是$\triangle ABC$外一点，且$AD=AC$，求$\angle BDC$的度数．

解：由于$AB=AC=AD$，根据圆的定义可知，点B、C、D一定在以点A(定点)为圆心，AB(定长)为半径的$\odot A$上，则$\angle BAC$是BC所对的圆心角，而$\angle BDC$是BC所对的圆周角，从而可容易得到$\angle BDC=$_________．

②类型二，“定角＋定弦”：如图2，$Rt\triangle ABC$中，$AB\perp BC$，$AB=12$，$BC=8$，P是$\triangle ABC$内部的一个动点，且满足$\angle PAB=\angle PBC$，求线段CP长的最小值．

解：$\because \angle ABC=90^\circ$，

$\therefore \angle ABP+\angle PBC=90^\circ$．

$\because \angle PAB=\angle PBC$，

$\therefore \angle BAP+\angle ABP=90^\circ$．

$\therefore \angle APB=90^\circ$．(定角)

$\therefore$点P在以AB(定弦)为直径的$\odot O$上．

又$\because$点P在$\triangle ABC$内部，

$\therefore$点P在弧BM上(不包括点B、点M)，(如图5)请完成后面的过程．

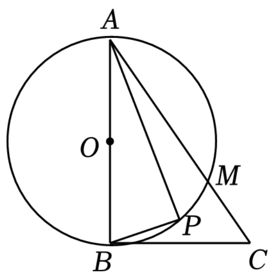


图5

(2)【问题解决】

如图3，在矩形$ABCD$中，已知$AB=3$，$BC=4$，点P是BC边上一动点（点P不与B，C重合），连接AP，作点B关于直线AP的对称点M，则线段MC的最小值为________.

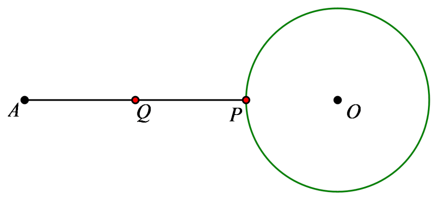
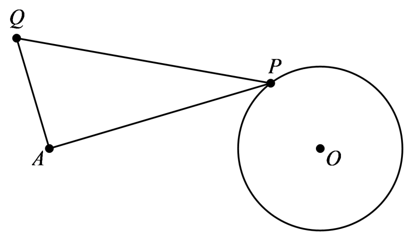
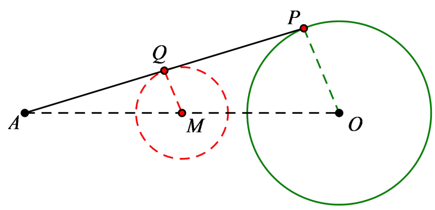
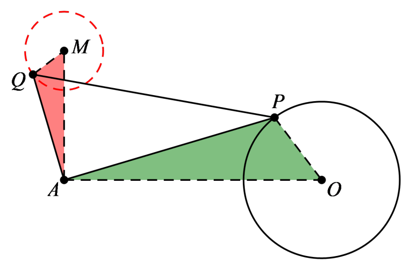
(3)【问题拓展】

如图4，在正方形$ABCD$中，$AD=6$，动点E，F分别在边DC，CB上移动，且满足$DE=CF$．连接AE和DF，交于点P．点E从点D开始运动到点C时，点P也随之运动，点P的运动路径长为__________.

初中数学几何模型之圆弧轨迹型瓜豆原理专题

一．模型介绍

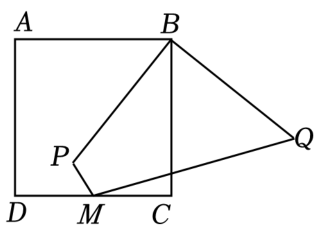
运动轨迹为圆弧型的瓜豆原理

模型构造	(1) 如图，P 是圆 O 上一个动点，A 为定点，连接 AP，Q 为 AP 中点． Q 点轨迹是？ 	(2) 如图，$\triangle APQ$ 是直角三角形，$\angle PAQ=90^\circ$ 且 $AP=k\cdot AQ$，当 P 在圆 O 运动时，Q 点轨迹是？ 
解决方法	 如图，连接 AO，取 AO 中点 M，任意时刻，均有 $\triangle AMQ\backsim\triangle AOP$，$\frac{OM}{OP}=\frac{AQ}{AP}=\frac{1}{2}$，则动点 Q 是以 M 为圆心，MQ 为半径的圆。	 如图，连结 AO，作 $AM\perp AO$，$AO{:}AM=k{:}1$；任意时刻均有 $\triangle APO\backsim\triangle AQM$，且相似比为 k。 则动点 Q 是以 M 为圆心，MQ 为半径的圆。

【最值原理】动点的轨迹为定圆时，可利用："一定点与圆上的动点距离最大值为定点到圆心的距离与半径之和，最小值为定点到圆心的距离与半径之差"的性质求解。

二．例题讲解

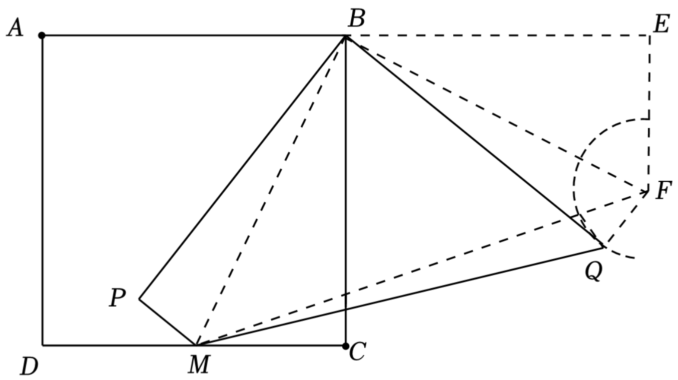
题目 1 如图，M 是正方形 $ABCD$ 边 CD 的中点，P 是正方形内一点，连接 BP，线段 BP 以 B 为中心逆时针旋转 90° 得到线段 BQ，连接 MQ．若 $AB=4$，$MP=1$，则 MQ 的最小值为 ______．



答案：$2\sqrt{10}-1$．

【分析有据】连接 BM，将 $\triangle BCM$ 绕 B 逆时针旋转 90° 得 $\triangle BEF$，连接 MF，QF，证明 $\triangle BPM\cong\triangle BQF(SAS)$，得 $MP=QF=1$，故 Q 的运动轨迹是以 F 为圆心，1 为半径的弧，求出 $BM=\sqrt{BC^2+CM^2}=2\sqrt{5}$，可得 $MF=\sqrt{2}BM=2\sqrt{10}$，由 $MQ\geqslant MF-QF$，知 $MQ\geqslant 2\sqrt{10}-1$，从而可得 MQ 的最小值为 $2\sqrt{10}-1$．

【解答有法】解：连接 BM，将 $\triangle BCM$ 绕 B 逆时针旋转 90° 得 $\triangle BEF$，连接 MF，QF，如图：



$\because \angle CBE=90^\circ$, $\angle ABC=90^\circ$, $\therefore \angle ABC+\angle CBE=180^\circ$,

$\therefore A$, B, E 共线, $\because \angle PBM=\angle PBQ-\angle MBQ=90^\circ-\angle MBQ=\angle FBQ$,

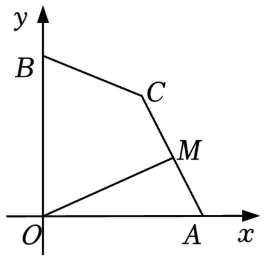
由旋转性质得 $PB=QB$, $MB=FB$, $\therefore \triangle BPM\cong\triangle BQF(SAS)$, $\therefore MP=QF=1$,

$\therefore Q$ 的运动轨迹是以 F 为圆心, 1 为半径的弧, $\because BC=AB=4$, $CM=\frac{1}{2}CD=2$,

$\therefore BM=\sqrt{BC^2+CM^2}=2\sqrt{5}$, $\because \angle MBF=90^\circ$, $BM=BF$, $\therefore MF=\sqrt{2}BM=2\sqrt{10}$,

$\because MQ\geqslant MF-QF$, $\therefore MQ\geqslant 2\sqrt{10}-1$, $\therefore MQ$ 的最小值为 $2\sqrt{10}-1$. 故答案为: $2\sqrt{10}-1$.

题目 2 如图,点 A、B 的坐标分别为 $A(\sqrt{2},0)$、$B(0,\sqrt{2})$,点 C 为坐标平面内一点,$BC=1$,点 M 为线段 AC 的中点,连接 OM,则 OM 最长为 (　　)



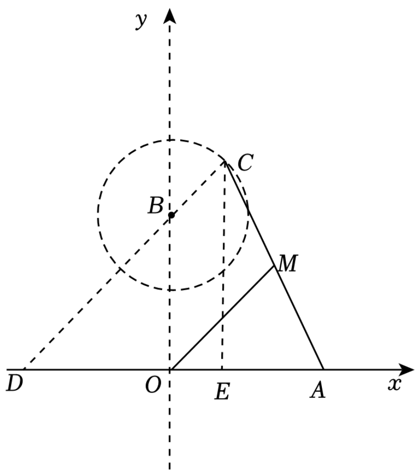
A. $\frac{3}{2}$　　　　B. $\frac{5}{2}$　　　　C. 2　　　　D. 3

答案: A.

【分析有据】根据同圆的半径相等可知:点 C 在半径为 1 的 $\odot B$ 上,根据三角形的中位线定理可知,C 在 BD 与圆 B 的交点时, OM 最小,在 DB 的延长线上时, OM 最大,根据平行线分线段成比例定理求得 C 的坐标,进而即可求得 M 的坐标.

【解答有法】解:如图, $\because$ 点 C 为坐标平面内一点, $BC=1$,

$\therefore C$ 在 $\odot B$ 上,且半径为 1,取 $OD=OA=\sqrt{2}$,连接 CD,



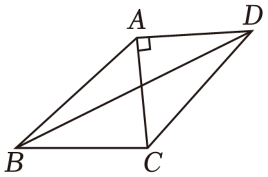
$\because AM=CM$，$OD=OA$，$\therefore OM$ 是 $\triangle ACD$ 的中位线，$\therefore OM=CD$，

当 OM 最大时，即 CD 最大，而 D，B，C 三点共线时，当 C 在 DB 的延长线上时，OM 最大，

$\because OB=OD=\sqrt{2}$，$\angle BOD=90^\circ$，$\therefore BD=2$，$\therefore CD=2+1=3$，$\therefore OM=\dfrac{3}{2}$．故选：$A$．

三．巩固练习

题目 1 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=45^\circ$，$AC=2$，以 AC 为边作等腰直角 $\triangle ACD$，连 BD，则 BD 的最大值是（　　）



A. $\sqrt{10}-\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{10}+\sqrt{3}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{10}+\sqrt{2}$

【分析有据】如图所示，以 AC 为斜边，作等腰直角 $\triangle AOC$，过点 O 作 $OE\perp AD$ 交 DA 延长线于 E，连接 OD，则 $\angle AOC=90^\circ$，$OC=OA=\sqrt{2}$，$\angle OAC=45^\circ$，先证明点 B 在以 O 为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径的圆周上运动（AB 右侧），故当点 O 在线段 BD 上时，BD 最大，再求出 OE，DE 的长，进而利用勾股定理求出 OD 的长即可得到答案．

【解答有法】解：如图所示，以 AC 为斜边，作等腰直角 $\triangle AOC$，过点 O 作 $OE\perp AD$ 交 DA 延长线于 E，连接 OD，$\therefore \angle AOC=90^\circ$，$OC=OA=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AC=\sqrt{2}$，$\angle OAC=45^\circ$，

$\because \angle ABC=45^\circ$，$\therefore$ 点 B 在以 O 为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径的圆周上运动（AB 右侧），

$\therefore$ 当点 O 在线段 BD 上时，BD 最大，

$\because \triangle ACD$ 是以 AC 为边的等腰直角三角形，

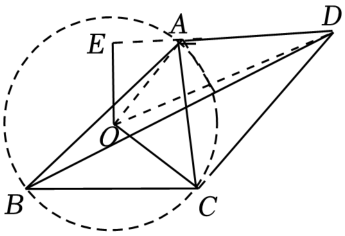
$\therefore \angle CAD=90^\circ$，$AD=AC=2$，$\therefore \angle OAE=45^\circ$，

$\therefore \triangle AOE$ 是等腰直角三角形，

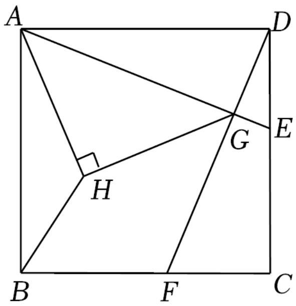
$\therefore AE=OE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}OA=1$，$\therefore DE=AE+AD=3$，

在 $Rt\triangle DOE$ 中，由勾股定理得 $OD=\sqrt{OE^2+DE^2}=\sqrt{10}$，

$\therefore BD$ 的最大值 $=DO+BO=\sqrt{10}+\sqrt{2}$，故选：$D$．



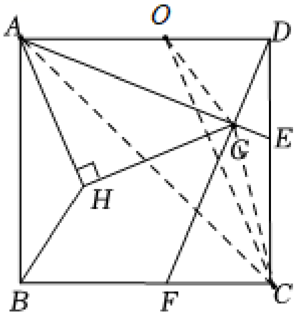
题目 2 正方形 $ABCD$ 中，$AB=4$，点 E、F 分别是 CD、BC 边上的动点，且始终满足 $DE=CF$，DF、AE 相交于点 G．以 AG 为斜边在 AG 下方作等腰直角 $\triangle AHG$ 使得 $\angle AHG=90°$，连接 BH．则 BH 的最小值为（　　）



A. $2\sqrt{5}-2$　　B. $2\sqrt{5}+2$　　C. $\sqrt{10}-\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{10}+\sqrt{2}$

【分析有据】连接 AC，取 AD 的中点 O，连接 OG，CO，利用 $\triangle BAH\backsim\triangle CAG$，得 $CG=\sqrt{2}BH$，再证明 $\triangle ADE\cong\triangle DCF(SAS)$，得 $\angle DAE=\angle CDF$，则 $\angle AGD=\angle ADE=90°$，可知当点 O、G、C 三点共线时，CG 最小，从而解决问题．

【解答有法】解：连接 AC，取 AD 的中点 O，连接 OG，CO，



$\because\triangle AHG$ 和 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，

$\therefore\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AG}{AH}=\sqrt{2}$，$\angle BAC=\angle HAG$，

$\therefore\angle BAH=\angle CAG$，$\therefore\triangle BAH\backsim\triangle CAG$，

$\therefore CG=\sqrt{2}BH$，$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AD=CD$，$\angle ADE=\angle DCF$，$\because DE=CF$，

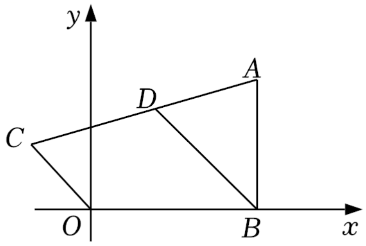
$\therefore\triangle ADE\cong\triangle DCF(SAS)$，$\therefore\angle DAE=\angle CDF$，

$\therefore\angle AGD=\angle ADE=90°$，$\therefore$ 当点 O、G、C 三点共线时，CG 最小，

$\therefore CG$ 的最小值为 $OC-OG=2\sqrt{5}-2$，

$\therefore BH$ 的最小值为 $\dfrac{2\sqrt{5}-2}{\sqrt{2}}=\sqrt{10}-\sqrt{2}$，故选：$C$．

题目 3 如图，点 A 的坐标为 $(4,3)$，$AB\perp x$ 轴于点 B，点 C 为坐标平面内一点，$OC=2$，点 D 为线段 AC 的中点，连接 BD，则 BD 的最大值为（　　）



A. 3　　B. $\frac{7}{2}$　　C. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$　　D. $2\sqrt{5}$

【分析有据】作点 A 关于 x 轴的对称点 E，根据中位线的性质得到 $BD=\frac{1}{2}EC$，求出 CE 的最大值即可.

【解答有法】解：如图，作点 A 关于 x 轴的对称点 $E(4,-3)$，

则点 B 是 AE 的中点，又∵点 D 是 AC 的中点，

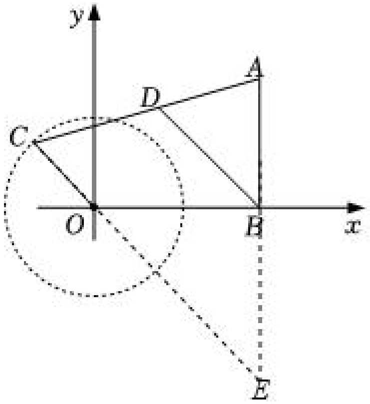
∴BD 是 $\triangle AEC$ 的中位线，∴$BD=\frac{1}{2}EC$，∴当 EC 最大时，BD 最大，

∵点 C 为坐标平面内一点，且 $OC=2$，

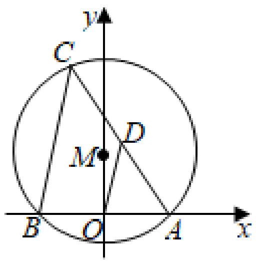
∴点 C 在以 O 为圆心，2 为半径的 $\odot O$ 上运动，

∴当 EC 经过圆心 O 时，EC 最大. ∵$OB=4$，$BE=3$，∴$OE=5$，∴CE 的最大值为 $5+2=7$，

∴BD 的最大值 $=\frac{7}{2}$. 故选：B.



题目 4 如图，点 M 坐标为 $(0,2)$，点 A 坐标为 $(2,0)$，以点 M 为圆心，MA 为半径作 $\odot M$，与 x 轴的另一个交点为 B，点 C 是 $\odot M$ 上的一个动点，连接 BC，AC，点 D 是 AC 的中点，连接 OD，当线段 OD 取得最大值时，点 D 的坐标为（　　）



A. $(0,1+\sqrt{2})$　　B. $(1,1+\sqrt{2})$　　C. $(2,2)$　　D. $(2,4)$

【分析有据】根据垂径定理得到 $OA=OB$，然后根据三角形中位线定理得到 $OD\parallel BC$，$OD=\frac{1}{2}BC$，即当 BC 取得最大值时，线段 OD 取得最大值，根据圆周角定理得到 $CA\perp x$ 轴，进而求得 $\triangle OAD$ 是等腰直角三角形，即可得到 $AD=OA=2$，得到 D 的坐标为 $(2,2)$.

【解答有法】解：∵$OM\perp AB$，∴$OA=OB$，∵$AD=CD$，

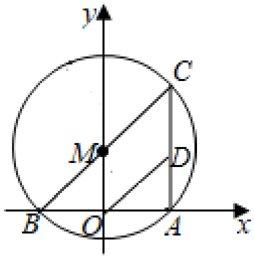
$\therefore OD // BC$, $OD=\frac{1}{2}BC$, $\therefore$ 当 BC 取得最大值时, 线段 OD 取得最大值, 如图,

$\because BC$ 为直径, $\therefore \angle CAB=90^\circ$, $\therefore CA\perp x$ 轴, $\because OB=OA=OM$,

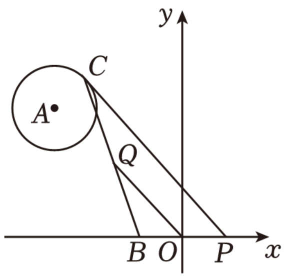
$\therefore \angle ABC=45^\circ$, $\because OD // BC$, $\therefore \angle AOD=45^\circ$,

$\therefore \triangle AOD$ 是等腰直角三角形,

$\therefore AD=OA=2$, $\therefore D$ 的坐标为 $(2,2)$, 故选: C.



题目 5 如图,点 A 的坐标为 $(-3,3)$,点 P 的坐标为 $(1,0)$,点 B 的坐标为 $(-1,0)$,$\odot A$ 的半径为1,C 为圆上一动点,Q 为 BC 的中点,连接 PC,OQ,则 OQ 长的最大值为 (   )



A. 5　　　　B. 2.5　　　　C. 6　　　　D. 3

【分析有据】由点 P、点 B 的坐标得 O 是 BP 的中点, 则 OQ 是 $\triangle CBP$ 的中位线, $OQ=\frac{1}{2}PC$, 当 PC 的长最大时, OQ 的长最大, 根据点与圆的位置关系可得 PC 长的最大值为 $AP+1$, 求出 $AP=\sqrt{(1+3)^2+3^2}=5$, 即可求解.

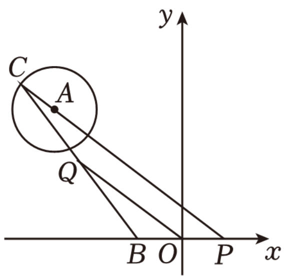
【解答有法】解: $\because$ 点 P 的坐标为 $(1,0)$, 点 B 的坐标为 $(-1,0)$,

$\therefore O$ 是 BP 的中点, $\because Q$ 为 BC 的中点,

$\therefore OQ$ 是 $\triangle CBP$ 的中位线,

$\therefore OQ=\frac{1}{2}PC$,

$\therefore$ 当 PC 的长最大时, OQ 的长最大, 如图,



$\because$ 点 A 的坐标为 $(-3,3)$, 点 P 的坐标为 $(1,0)$,

$\therefore AP=\sqrt{(1+3)^2+3^2}=5$,

$\therefore PC$ 长的最大值为 $AP+1=6$,

$\therefore OQ$ 长的最大值为 $OQ=\frac{1}{2}PC=3$,